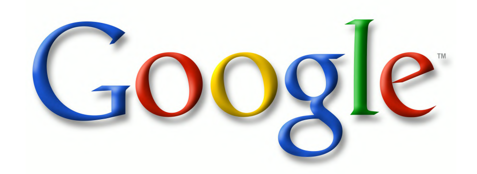
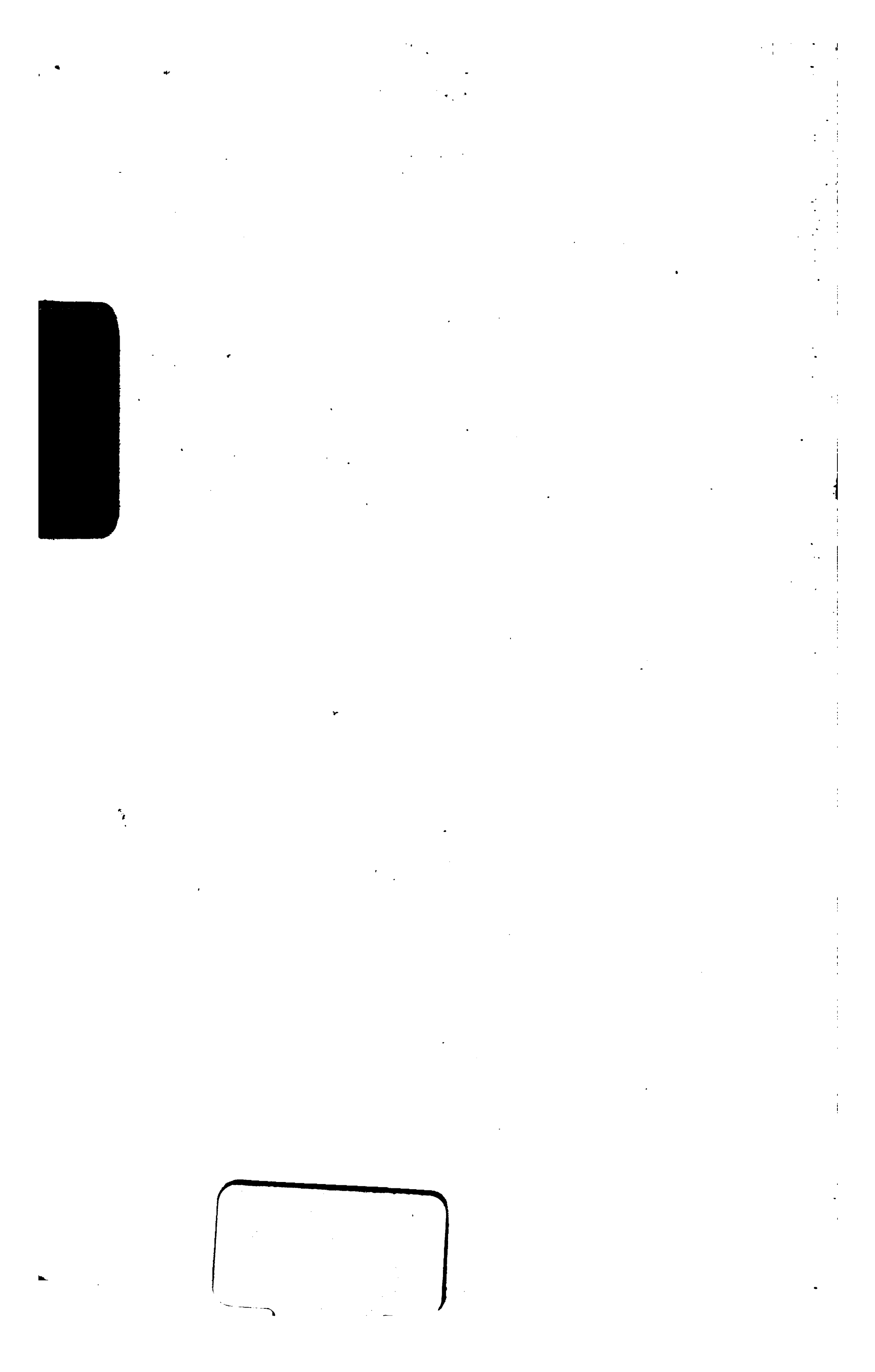
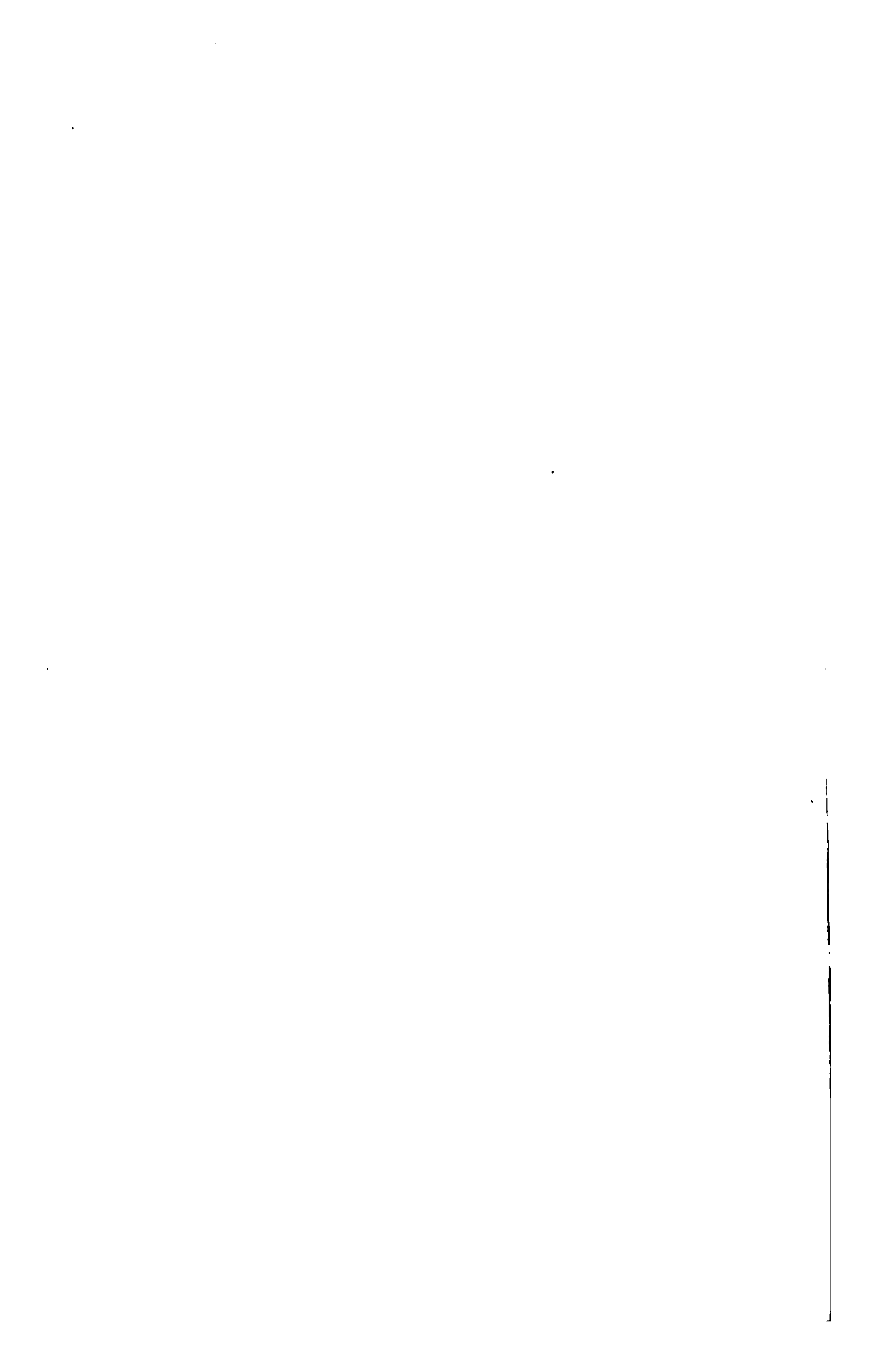
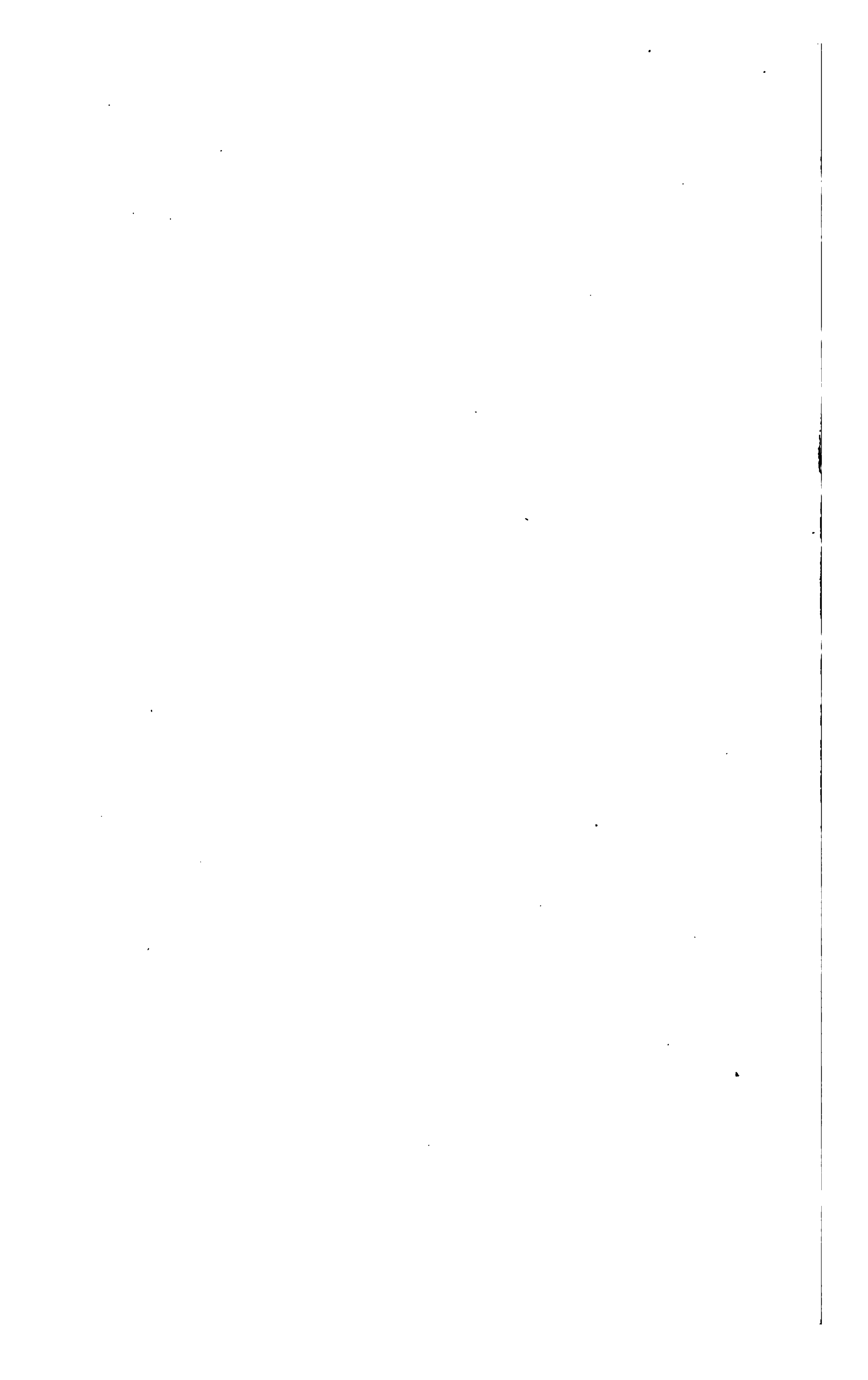



NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06910109 9







VORLESUNGEN

ÜBER

TECHNISCHE MECHANIK

VON

DR. AUG. FÖPPL

PROF. A. D. TECHN. HOCHSCHULE IN MÜNCHEN

DRITTER BAND

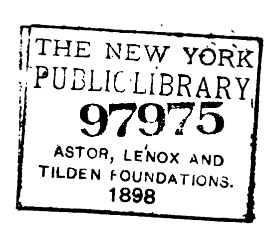
FESTIGKEITSLEHRE

MIT 70 FIGUREN IM TEXT

LEIPZIG

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER

1897



Vorwort.

An der technischen Hochschule in München erstreckten sich die Vorlesungen über technische Mechanik von jeher über das ganze Gebiet der Mechanik, soweit es für die Ausbildung der Techniker überhaupt in Betracht kommt. Schon mein Vorgänger, Bauschinger, war bemüht, seinen Hörern alles zu bieten, was der Techniker von der Mechanik wissen sollte, und ich bin ihm darin gefolgt. Der Besuch einer vom mathematischen Standpunkte aus abgehaltenen Vorlesung über analytische Mechanik kann zwar den sich für die theoretischen Seiten der Mechanik näher interessirenden Studirenden daneben lebhaft empfohlen werden; für die weitaus überwiegende Mehrzahl der Hörer reicht aber nach den Traditionen unserer Hochschule die Vorlesung über technische Mechanik schon vollständig aus. Bei den grossen Ansprüchen, die heute von allen Seiten an die Zeit und an die Arbeitskraft der studirenden Techniker gestellt werden, ist der Vortheil, der diesen hieraus erwächst, nicht zu unterschätzen.

Die heute allgemeiner bekannten Lehrbücher der Mechanik gehen meist von ganz anderen Voraussetzungen über Umfang und Zweck des Vortrags aus und sie decken sich daher nur wenig mit der Darstellung, die ich für meine Vorlesungen wählen musste. Viele darunter sind von Mathematikern abgefasst, die auf die Behandlung der zur technischen Mechanik im engeren Sinne gerechneten Fragen von vornherein verzichteten. Andere dagegen, die von Technikern herrühren, lassen häufig eine hinreichend umfassende Darstellung vermissen; augenscheinlich rechnen die Verfasser darauf, dass noch eine Ergänzung durch ein besonderes Studium der analytischen Mechanik hinzutrete. Dazu kommen dann noch solche Bücher,

deren Autoren zwar denselben Zweck verfolgten, wie ich auch, die aber dabei ihr Ziel nach meiner Schätzung zu niedrig steckten.

An unserer Hochschule bildet das Abiturientenzeugniss einer Mittelschule die Bedingung für die Zulassung zu den Studien. Zu diesen Mittelschulen werden zwar ausser den humanistischen und den Real-Gymnasien auch die bayerischen Industrieschulen gerechnet. In mathematisch-naturwissenschaftlicher Beziehung (auch im Zeichnen) sind aber die Abiturienten der Industrieschulen besser vorgebildet, als die der Gymnasien. Es ist daher in München nicht nöthig — wie es anderwärts wohl sein mag — auf Hörer von geringerer Vorbildung, als sie dem Reifezeugniss eines Gymnasiums entspricht, Rücksicht zu nehmen. Jungen Männern von solcher Art, die alles gethan haben, um sich vor Beginn ihrer Studien die nöthige geistige Reife zu erwerben und die nun auf die Höhen ihrer Wissenschaft geführt zu werden erwarten, darf man die Mechanik nicht in einer zurechtgestutzten, für eine geringe Auffassungsgabe berechneten Form vortragen, wie sie zu den Zeiten der höheren Gewerbeschulen am Platze gewesen sein mag. Die Studirenden können verlangen, dass sie einen Einblick in alle Probleme erhalten, die für die Technik überhaupt von grundsätzlicher Bedeutung sind.

Schon bald nachdem ich meine Vorlesungen an der hiesigen Hochschule aufgenommen hatte, wurde mir von meinen Hörern der Wunsch ausgesprochen, in den Besitz eines Lehrbuchs zu kommen, das sich möglichst eng an die Vorlesungen anschlösse. Ich musste diesen Wunsch als berechtigt anerkennen und suchte ihm einstweilen dadurch entgegenzukommen, dass ich autographirte Blätter herstellen liess, die in gedrängter Kürze die wichtigsten Sätze und Formeln enthielten. Ich konnte aber nicht lange im Zweifel darüber bleiben, dass dies nur ein Nothbehelf war; und nachdem schon einzelne meiner Schüler damit begonnen hatten, ihre eigenen Ausarbeitungen vervielfältigen zu lassen, um dem Bedürfnisse abzuhelfen, entschloss ich mich endlich selbst, meine Vorlesungen für den Druck zu bearbeiten.

Die Vorlesungen zerfallen in vier Theile, von denen der erste eine Einführung in die Mechanik bildet, während die drei übrigen die graphische Statik, die Festigkeitslehre und die Dynamik behandeln. Der erste Theil fällt in das zweite Studiensemester, darauf folgen die beiden nächsten Theile neben einander im dritten und schliesslich der letzte Theil im vierten Studiensemester. Jeder dieser Theile soll bei der Veröffentlichung in einem besonderen Bande zur Darstellung kommen, der von den übrigen unabhängig ist. Dabei sollen indessen Wiederholungen so weit als thunlich vermieden werden. Wer nur einen dieser Bände zur Hand nimmt, wird daher Manches vermissen, was sonst aufgenommen worden wäre, wenn der Band nicht durch die übrigen ergänzt werden sollte.

Bei der Vertheilung des Stoffes auf die einzelnen Bände war nicht nur auf die Zahl der in jedem Semester zur Verfügung stehenden Vorlesungsstunden, sondern auch auf die bis zur gegebenen Zeit von den Studirenden bereits erreichte mathematische Vorbildung Rücksicht zu nehmen. Hiernach wird der erste Band nur geringe Ansprüche an die mathematischen Vorkenntnisse machen und jeder folgende allmählich höhere. Man wird auch schon innerhalb des jetzt vorliegenden Bandes bemerken, dass sich diese Ansprüche vom Anfange gegen das Ende hin steigern. — Die Studirenden der Architektur hören übrigens — von seltenen Ausnahmen abgesehen — nur die beiden ersten Theile der Mechanik, entsprechend den für die Zulassung zu den Staatsprüfungen vorgeschriebenen Bedingungen.

Verschiedene Gründe, von denen ich einen nachher noch erwähnen werde, haben mich veranlasst, zuerst die Vorlesungen über Festigkeitslehre herauszugeben, also nicht mit dem ersten, sondern mit dem dritten Bande zu beginnen. Man verfügt zwar gerade in der Festigkeitslehre schon über einige werthvolle Werke, die sich in ihrer ganzen Anlage nicht gar zu weit von meiner eigenen Arbeit entfernen. Dass aber die Herausgabe meiner Vorlesungen dadurch nicht überflüssig gemacht wurde, wird der kundige Leser bald genug herausfinden.

Bei der Ausarbeitung habe ich mich möglichst eng an das Vorlesungsheft angeschlossen. Von den Zwischenrechnungen, die sich bei der Ableitung der Formeln im Vortrage nöthig machen, habe ich, um nicht zu weitläufig zu werden, so viel als anging, ohne das Verständniss zu erschweren, weggelassen; manche sind aber auch entweder ganz beibehalten oder doch durch entsprechende Andeutungen hinreichend gekennzeichnet. Freilich: den Besuch der Vorlesung selbst wird das Buch schwerlich ganz ersetzen können; in dieser Absicht ist es aber auch nicht geschrieben worden.

An einzelnen Stellen, so namentlich im letzten Abschnitte und auch bei einigen Uebungsaufgaben, bin ich gelegentlich ein wenig über das, was ich in der Vorlesung selbst vorzubringen pflege, hinausgegangen. Es handelt sich dabei um Dinge, die nach meiner Meinung eigentlich besprochen werden sollten, die aber wegen Zeitmangel gewöhnlich wegfallen müssen. Sonst noch über das eigentliche Ziel der Vorlesung mit dem Buche hinauszugehen, hielt ich mit Rücksicht auf den Zweck der Bearbeitung für unzulässig. Wer sich das höchste Ziel — weit über die Bedürfnisse der technischen Praxis hinaus — stecken will, kann ein Studium der ausführlicheren Handbücher und der Quellen später doch nicht entbehren. Zur Vorbereitung auf das Studium auch der schwierigeren Schriften dürfte mein Buch aber jedenfalls ausreichen und das ist wohl alles, was man nach dieser Seite hin von ihm verlangen kann. Jenen, die diesen Weg einschlagen wollen, empfehle ich, nachdem sie sich mit meinem Buche hinreichend vertraut gemacht haben, zunächst das zweibändige Werk von Love, Treatise on the theory of elasticity, Cambridge 1892 und 1893, das viele Literaturangaben enthält und damit von selbst den weiteren Weg anzeigt.

In erster Linie wende ich mich mit dieser Veröffentlichung an die Hörer meiner Vorlesungen, denen ich damit beim Eindringen in den Gegenstand nach Kräften behülflich sein möchte. Ich denke indessen, dass das Buch auch den in der Praxis stehenden Ingenieuren, die das Differentiiren noch nicht

ganz verlernt haben, von Nutzen sein kann. Freilich wird jetzt oft die Behauptung wiederholt, dass die Ingenieure in der Praxis nur noch die Elementarmathematik zu gebrauchen wüssten; in dieser Form vermag ich aber an die Behauptung nicht recht zu glauben. Nach meiner Schätzung ist die Elementarmathematik schwieriger zu erlernen und auch schwieriger im Gedächtnisse zu behalten, als jene einfachen Theile der Differential- und Integralrechnung, um die es sich bei den Anwendungen gewöhnlich handelt. Wer den Begriff des Differentialquotienten einmal richtig erfasst hat, wird ihn schwerlich wieder vergessen, was mit den einfachen planimetrischen Sätzen z. B. viel leichter geschehen kann. So viel Differentialrechnung als dazu nöthig ist, um dem Gedankengange einer einfachen physikalischen Ueberlegung — und die grundlegenden physikalischen Ueberlegungen sind in diesem Sinne immer einfach — folgen zu können, glaube ich daher trotz alledem bei der Mehrzahl der in der Praxis stehenden Ingenieure, die überhaupt eine Hochschulbildung durchgemacht haben, getrost voraussetzen zu können. Wenn man solche Fragen erörtert, darf man nicht übersehen, dass sich nach deutschem Rechte jeder nach Gutdünken den Titel „Ingenieur“ beilegen darf; es bleibt daher, wenn von den Kenntnissen die Rede ist, die noch vorhanden sind, häufig die Frage offen, von welchem Ausgangszustande dieser Rest übrig blieb.

Zudem glaube ich dem in der Rechnung Ungeübten — falls er nur mit den Grundbegriffen überhaupt noch genügend vertraut ist — durch die vollständig durchgerechneten Uebungsbeispiele in den Aufgaben die Benutzung des Buches erleichtert zu haben. Diese Aufgaben löse ich als Musterbeispiele auch in den Vorlesungen selbst; sie dienen in vielen Fällen nicht nur zur Uebung, sondern sind zugleich zu wesentlichen Ergänzungen des Textes bestimmt.

Freilich wird der Praktiker nicht nur durch die Differentialformeln, sondern mehr vielleicht noch durch das leidige Schlagwort von dem Gegensatze zwischen Theorie und Praxis von dem Studium solcher Bücher abgehalten. Diese Behauptung

lasse ich aber auf dem Gebiete der technischen Mechanik durchaus nicht gelten; hier kann nur von einem Gegensatze zwischen falscher oder unvollständiger Theorie und der richtigen Theorie die Rede sein. Die richtige Theorie ist immer in Uebereinstimmung mit der Praxis. — Dass mein Ziel bei der Bearbeitung der Mechanik ausschliesslich die Erkenntniss der Wirklichkeit ist — was mit Recht gefordert werden darf — wird der Leser bald herausfinden. In der That sind die Lehren dieses Bandes keineswegs allein am Schreibtische zusammengestellt, sondern sie sind ganz wesentlich auf eigene Erfahrungen aufgebaut. Grade bei der Bearbeitung der Festigkeitslehre sind mir die Ergebnisse sehr zahlreicher Versuche der verschiedensten Art, die ich während der letzten Jahre in dem mit meinem Lehrstuhle verbundenen Laboratorium anstellen konnte, erheblich zu statten gekommen und dies ist auch einer der Gründe, die mich dazu führten, diesen Theil des ganzen Werkes zuerst in Angriff zu nehmen.

Analytische Entwickelungen betrachte ich immer nur als ein Mittel zur Erkenntniss des inneren Zusammenhanges der Thatsachen. Wer auf sie verzichten wollte, würde das schärfste und zuverlässigste Werkzeug zur Verarbeitung der Beobachtungsthatsachen aus der Hand geben. In der That gibt es auch heute kaum ein einziges Gebiet der Mechanik oder der Physik, das man ohne Benutzung der Hülfsmittel der höheren Rechnungsarten hinreichend zu beherrschen vermöchte.

Gelegentlich eines Vortrages, den ich vor Kurzem vor der mathematischen Abtheilung der Naturforscherversammlung in Braunschweig hielt, wurde mir der Wunsch ausgesprochen, ich möchte ein Buch bearbeiten, das zur Einführung des Mathematikers in die technische Mechanik geeignet wäre. Ich weiss zwar wohl, dass man dabei an eine andere, im Einzelnen kürzere, im Ganzen umfassendere Arbeit dachte, als ich sie mit meinen Vorlesungen biete. In Ermangelung jener anderen darf ich aber vielleicht auch für diese Arbeit auf ein gewisses Interesse mancher Mathematiker hoffen. — So wenig

ich mich auch auf die Seite jener Fachgenossen stellen kann, die sich neuerdings in einen oft erbittert zum Ausdrucke gebrachten Gegensatz gegen die Mathematiker gestellt haben, so muss ich es doch als einen erfreulichen Erfolg dieser Erörterungen betrachten, dass sich die Mathematiker jetzt unter der Führung des Herrn F. Klein dazu entschlossen haben, den Sorgen und den Bedürfnissen der Techniker künftighin eine sorgfältigere Beachtung zu schenken. Wenn man es daran schon früher nicht hätte fehlen lassen, wäre eine solche Bewegung, wie sie zur Zeit in der Frage der Ausbildung der Ingenieure durch weite technische Kreise geht, schwerlich möglich gewesen.

Die drei anderen Bände des Werkes hoffe ich in Zwischenräumen von je etwa einem Jahre erscheinen lassen zu können, so dass es bis zum Schlusse des Jahrhunderts fertig vorliegen dürfte. — Ueber Druck und Ausstattung des Bandes wird Niemand klagen können; die Verlagshandlung hat Alles, was an ihr lag, gethan, um dem Buche eine gute Aufnahme zu sichern.

München, im October 1897.

A. Föppl.

Inhaltsübersicht.

---

*) In letzter Zeit hatte ich Gelegenheit, eine grosse Zahl von Versuchen mit Eisenbahnwagenkuppelungen durchzuführen. Dabei hat sich von Neuem die einfachere Berechnungsweise der Haken nach Gl. 116 bewährt. Die Formel von v. Bach liefert hiernach viel zu hohe Werthe für die Spannung σ, steht also im Widerspruche mit der Erfahrung. Im Texte konnte ich von dieser neuen und entscheidenden Bestätigung meiner Ansicht, ebenso wie von einem anderen Versuche, den ich hierzu anstellen liess, noch keine Erwähnung machen; eine Veröffentlichung hierüber ist in den Mittheilungen des Münchener Laboratoriums zu erwarten.

Berichtigung.

Durch ein Versehen ist in Abb. 50, S. 233 der Kreis, der einen aufgeschlitzten Kolbenring darstellt, ganz durchgezogen, während an der Stelle $\varphi = 0$ eine kleine Lücke sein sollte; sonst dürfte das Buch von sinnstörenden Druckfehlern frei sein.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Untersuchungen über den Spannungszustand.

---

§ 1. Die specifische Spannung.

Bei vielen Aufgaben der Mechanik genügt es, die festen Körper als durchaus unveränderlich oder als starr zu betrachten. In anderen Fällen reicht aber dieser Grad der Annäherung an das wirkliche Verhalten der in der Natur vorkommenden festen Körper nicht aus. Man kann diese Fälle in zwei Gruppen eintheilen. Zur ersten Gruppe gehören jene, bei denen man unsicher darüber ist, ob sich ein gegebener Körper unter gewissen Umständen in der That nahezu als starr verhalten wird, oder ob er nicht vielmehr grössere Formänderungen erfahren, vielleicht auch seinen Zusammenhang ganz verlieren, also zerbrechen wird. Diese Fälle gehören zur Festigkeitslehre im engeren Sinne. Die zweite Gruppe wird durch jene Fälle gebildet, bei denen ein solcher Zweifel zwar nicht zu erheben ist, bei denen aber die Lehren der Mechanik starrer Körper nicht ausreichen, gewisse Fragen, die sich anscheinend ganz innerhalb ihres eigenen Gebiets bewegen, zu beantworten. Einfache Beispiele dafür sind folgende. Ein Balken, der auf zwei Stützen aufruht, überträgt auf diese, wenn er belastet ist, Auflagerkräfte, die sich nach den Lehren der Mechanik starrer Körper berechnen lassen. Das ist aber nicht mehr möglich, wenn der Balken an drei Stellen gestützt ist. Ebensowenig vermag man anzugeben, wie gross der Druck ist, den jedes Bein eines beliebig belasteten vierbeinigen Tisches

auf den Boden ausübt, wenn man von der in diesem Falle nicht zutreffenden Voraussetzung ausgeht, dass es genüge, den Tisch als starren Körper zu betrachten. Zu ähnlichen Schwierigkeiten gelangt man bei der Untersuchung des Stosses der Körper, wenn man diese als starr ansieht.

Früher, als man noch annahm, dass bei manchen Körpern, z. B. bei den Bausteinen, das Bild des starren Körpers zur Beschreibung ihres Verhaltens genügen müsse, hat man sich öfters bemüht, die scheinbar vorhandene Lücke der Mechanik starrer Körper durch Aufstellung besonderer Gesetze (z. B. des sogenannten Gesetzes des kleinsten Widerstandes in der Gewölbetheorie) zu schliessen, ohne von dem Bilde des starren Körpers abzuweichen. Heute weiss man, dass diese Bemühungen verfehlt waren. Es gibt keine Körper in der Natur, die wirklich starr wären. Alle vermögen ihre Form etwas zu ändern, ohne desshalb sofort zu zerbrechen, und alle jene Fragen, auf die man bei der frühern Anschauung keine Antwort zu geben vermochte, finden ihre Lösung, sobald man auf diese Eigenschaft der Naturkörper Rücksicht nimmt.

Aus jener Zeit, in der man sich über diesen Punkt noch nicht klar geworden war, stammt auch die Bezeichnung jener Aufgaben. Man nennt auch heute noch solche Aufgaben statisch unbestimmt, bei denen kein Zweifel darüber erhoben werden kann, dass die Körper nur geringe Gestaltänderungen erfahren, dass sie sich also auf den ersten Anschein wie starre verhalten werden, bei denen aber trotzdem die Mechanik der starren Körper zur Lösung nicht ausreicht.

Mit der zuerst genannten Gruppe von Fällen theilt diese zweite Gruppe die Eigenthümlichkeit, dass man auf die Gestaltänderungen, wenn sie auch noch so klein seien, Rücksicht nehmen muss, um zu einer Lösung zu gelangen. Beide Gruppen werden daher am besten gemeinsam untersucht. Man macht zwar öfters insofern einen Unterschied, als man nur die Fälle der ersten Gruppe der eigentlichen Festigkeitslehre, die der zweiten Gruppe der „Theorie der Elasticität“ zuweist. Ich werde aber von einer solchen Unterscheidung hier voll-

ständig absehen. Unter der Festigkeitslehre im weiteren Sinne verstehe ich vielmehr ganz allgemein jenen Theil der Mechanik fester Körper, bei dem auf die Betrachtung der gewöhnlich nur sehr kleinen Formänderungen dieser Körper eingegangen wird. „Fest“ steht daher hier ausdrücklich im Gegensatz zu „starr“, braucht aber damit noch nicht mit „elastisch“ zusammenzufallen. Die Untersuchung des Verhaltens eines plastischen Körpers, also etwa eines Klumpens aus knetbarem Thon, würde vielmehr auch als eine Aufgabe der Festigkeitslehre aufzufassen sein. Freilich hat man sich mit solchen Fällen bisher nur wenig beschäftigt, — offenbar nur deshalb, weil keine zwingende Veranlassung dazu vorlag.

Die Festigkeitslehre ist als eine Ergänzung der Mechanik starrer Körper aufzufassen und zwar als jene Ergänzung, die erforderlich ist, um das wirkliche Verhalten der festen Körper in der Natur zu beschreiben. Die Lehren der Mechanik starrer Körper umfassen nur einen Theil des ganzen Erfahrungsgebiets, gelten aber innerhalb ihres Bereiches genau für alle Körper, auch wenn sie an sich nicht starr sind. Für die Anwendung dieser Lehren genügt es vielmehr stets, wenn sich der Körper nur im gegebenen Falle so verhält, als wenn er starr wäre. Dies trifft namentlich zu, wenn der ganze Körper ruht, denn die Ruhe des ganzen Körpers, also auch aller Theile, aus denen er besteht, schliesst in sich, dass keine Gestaltänderung eintritt, dass sich also der Körper wenigstens während der Zeit, in der wir ihn betrachten, so wie ein starrer verhält.

Gerade der Fall der Ruhe, besonders der Fall des „elastischen Gleichgewichts“, kommt für uns in erster Linie in Betracht. Wir können bei ihm stets von der Statik starrer Körper ausgehen und haben deren Lehren nur so weit zu ergänzen, als es nöthig ist, um zu einer Lösung der aufgeworfenen Fragen zu gelangen.

Der wichtigste Grundsatz, von dem die Festigkeitslehre ausgeht, lässt sich in die Worte fassen: Jeder Theil eines Körpers, wie er auch in Gedanken aus diesem ab-

gegrenzt werden möge, ist selbst wieder als ein Körper anzusehen, auf den sich die allgemeinen Sätze der Mechanik anwenden lassen. Mancher wird vielleicht geneigt sein, diesen Grundsatz einfach als selbstverständlich hinzunehmen. Er ist es auch ohne Zweifel, wenn man die Trennung nicht nur in Gedanken, sondern in Wirklichkeit vornimmt. Er soll aber nicht nur auf wirkliche Bruchstücke angewendet werden, sondern auch auf Theile des Körpers, die dauernd mit dem Reste verbunden bleiben und die wir nur deshalb für sich genommen betrachten, weil wir dadurch Aufschlüsse über das Verhalten des ganzen Körpers zu gewinnen suchen. In dieser Form kann er nur als ein Erfahrungsgesetz hingestellt werden, zu dessen Rechtfertigung es vollständig genügt, dass es sich bisher unter allen Umständen unbedingt bewährt hat.

In der Mechanik der starren Körper wird in der Regel nur auf die äusseren Kräfte geachtet, also auf jene, die von anderen Körpern her auf den gegebenen einwirken. Bei allen Sätzen, die z. B. für das Gleichgewicht solcher Körper aufgestellt sind, kommen die inneren Kräfte, die den Zusammenhang des Körpers aufrecht erhalten, überhaupt nicht vor. Sobald wir nun einen beliebig abgegrenzten Theil des Körpers zum Gegenstand unserer Untersuchung machen, müssen wir beachten, dass Kräfte, die zwischen diesem Theile und dem Reste des Körpers auftreten, zwar für den ganzen Körper immer noch als innere, für jenen Theil — oder auch für den Rest — aber als äussere aufzufassen sind. Wir werden uns also, um die Sätze der gewöhnlichen Statik auf das Gleichgewicht eines Theiles des Körpers anwenden zu können, vor allen Dingen zu fragen haben, von welcher Art die Kräfte sein können, die zwischen dem Theile und dem Reste des Körpers wirken.

Zu diesem Zwecke erinnern wir uns daran, dass die irdischen Körper, die wir untersuchen, in der Regel nur dann Kräfte von messbarer Grösse aufeinander übertragen, wenn sie miteinander in Berührung kommen. Ausnahmsweise kommen allerdings auch Kräfte vor, die dem Anscheine nach ohne ver-

mittelndes Bindeglied in die Ferne wirken. Wenn wir also z. B. einen Theil eines Magneten betrachten, müssen wir auch auf die magnetischen (sogenannten) Fernkräfte achten, die von dem Reste auf das betrachtete Stück übertragen werden und an diesem Stücke als äussere Kräfte auftreten. Mit solchen Fällen hat man sich aber nur ganz ausnahmsweise zu beschäftigen und wir wollen daher, um die Betrachtung nicht verwickelter zu machen, als es in der Regel nöthig ist weiterhin ganz von ihnen absehen.

Wenn dies geschieht, bleiben zwischen einem gegebenen Theile eines Körpers und dem Reste nur solche Kräfte übrig, die mit den Druckkräften bei der Berührung verschiedener Körper zu vergleichen sind, die also ihren Sitz (d. h. ihre Angriffspunkte) an den Grenzflächen zwischen beiden Theilen haben. Freilich ist hier von vornherein darauf zu achten, dass diese Kräfte nicht nothwendig Druckkräfte zu sein brauchen, sondern auch Zugkräfte sein können oder überhaupt jede beliebige Richtung und Grösse haben können, da ein fester Körper nicht nur einer Annäherung, sondern auch einer Entfernung seiner einzelnen Theile und überhaupt jeder Formänderung einen Widerstand entgegensetzt.

Diese in den gedachten Grenzflächen übertragenen Kräfte bezeichnet man als Spannungen des Körpers. Da man sich auf jede beliebige Weise einen Theil des Körpers von dem Reste abgegrenzt denken kann, vermag man die Spannung an jeder Stelle und nach jeder Richtung hin als äussere Kraft an einem Theile des Körpers aufzufassen. Dadurch werden alle Spannungen der Untersuchung zugänglich und aus den Gleichgewichtsbedingungen, die für jedes beliebig abgegrenzte Körperelement erfüllt sein müssen, folgen sofort die Beziehungen zwischen den Spannungen nach verschiedenen Richtungen und an verschiedenen Stellen des Körpers, die zur Grundlage für alle weiteren Untersuchungen dienen müssen.

Wird ein Stück des Körpers so abgegrenzt, dass seine Oberfläche mit der Oberfläche des ganzen Körpers zum Theile zusammenfällt (also so, dass das Stück nicht ganz aus dem

Innern des Körpers herausgeschnitten ist), so treten an diesen Stellen keine Spannungen auf, dagegen können hier Druckkräfte von aussen, also von anderen Körpern her übertragen werden. Diese äusseren Kräfte müssen im Geichgewichte mit den an den übrigen Theilen der Oberfläche des Körperstücks (also an den Schnittflächen) übertragenen Spannungen und mit den etwa auf die Masse des Körperstücks selbst wirkenden Fernkräften stehen. Da die äusseren Kräfte gewöhnlich als gegeben angesehen werden können, erhält man durch diese Gleichgewichtsbedingung ein Mittel, um die Grösse der Spannungen unter gewissen Umständen zu berechnen.

Man nehme z. B. den in Abb. 1 dargestellten Fall einer Zugstange an, die durch die an den beiden Enden angreifenden Kräfte P in Spannung versetzt wird. Denkt man sich durch einen Schnitt mm den links davon liegenden Theil des Körpers von dem Reste abgetrennt, so erfordert die Gleichgewichtsbedingung für diesen Theil, dass im Schnitte mm Spannungen übertragen werden, deren Resultirende gleich P ist und in die Richtung der Stabmittellinie fällt.

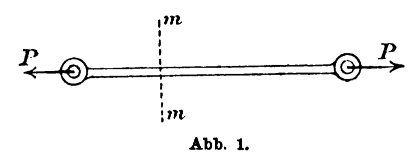


Abb. 1.

Freilich kennt man damit zunächst nur die gesammte durch die Schnittfläche mm übertragene Spannkraft, und man weiss noch nicht, wie sie sich auf die einzelnen Theile des Querschnitts vertheilt. So lange man den Körper, was bei allen bisherigen Betrachtungen noch zulässig war, immer noch als starr ansieht, fehlt in der That jedes Mittel, um die Vertheilung der Spannungen über den Querschnitt selbst in diesem einfachsten Falle der Zugbeanspruchung zu finden. Die Aufgabe ist statisch unbestimmt, genau in demselben Sinne wie jene über die Druckvertheilung auf die vier Beine eines Tisches, von der vorher die Rede war.

Wenn die Stange wirklich starr wäre, hätte es allerdings auch kaum ein Interesse, Näheres über die Vertheilung der Spannung im Querschnitte zu erfahren, da diese für das

physikalische Verhalten des Körpers ganz belanglos wäre. Der Widerstand, den ein Körper dem Zerreissen entgegenzusetzen vermag, ist aber immer nur begrenzt. Wenn ein Bruch eintritt, ist von vornherein nicht zu erwarten, dass dieser sich gleichzeitig über den ganzen Querschnitt erstreckt. Er kann auch an einer Stelle, an der die günstigsten Bedingungen dafür vorliegen, beginnen und sich dann erst über die übrigen Stellen ausbreiten. Um ein Urtheil darüber zu erhalten, ob bei einer bestimmten Belastung ein Bruch zu erwarten ist, müssen wir daher Näheres über die Vertheilung der gesammten Spannung über den Bruchquerschnitt zu erfahren suchen.

Dazu kann uns nur eine Untersuchung der Formänderungen verhelfen, die dem Bruche vorausgehen. Denn diese hängen in bestimmter Weise mit der Vertheilung der Spannungen zusammen. Die Art dieses Zusammenhanges wird durch die besonderen Eigenschaften des belasteten Körpers bedingt und kann nur auf Grund der Erfahrung festgestellt werden. Wenn der Körper elastisch ist und der Schnitt mm von den Enden der Stange weit genug entfernt ist, sprechen einfache geometrische Überlegungen dafür, dass die elastische Dehnung in der Richtung der Stabaxe für alle Punkte des Querschnitts mm ungefähr constant ist, und dass dasselbe daher auch für die Spannungen zutrifft. Man findet dann, wie viel Spannung in der Flächeneinheit des Querschnitts übertragen wird, wenn man die ganze Kraft P durch die Masszahl des Querschnitts F dividirt. Die in dieser Weise berechnete Spannung für die Flächeneinheit

$$\sigma = \frac{P}{F} \tag{1}$$

wird die specifische Spannung genannt. Es hängt von dem Stoffe ab, aus dem die Zugstange besteht, wie gross die specifische Spannung werden darf, ohne dass die Gefahr eines Bruches nahe gerückt ist. Die Berechnung der specifischen Spannung ist daher in allen solchen Fällen eine der wichtigsten Aufgaben der Festigkeitslehre.

Nicht immer darf man indessen darauf vertrauen, dass diese einfachste, gleichförmige Vertheilung der Spannungen eintritt. Ein wichtiges Beispiel dafür liefert die Prüfung von Cementkörpern auf Zugfestigkeit. Um einen Cement auf seine Zugfestigkeit zu prüfen, pflegt man einen Gewichtstheil mit drei Gewichtstheilen einer besonderen Sandsorte (sog. Normalsande) zu mischen, eine bestimmte Menge Wasser zuzusetzen, das Ganze gehörig durchzuarbeiten und den erhaltenen Mörtel in eine Metallform zu bringen, in der er durch Schläge eines gewissen vereinbarten Anforderungen entsprechenden Schlagwerks stark zusammengedrückt wird. Der so erhaltene Probekörper von der in Abb. 2 angegebenen Gestalt wird dann später, nachdem er erhärtet ist, in eine Maschine gebracht, in der der Körper von zwei Zangen erfasst und durch eine abgewogene Belastung P abgerissen wird. Der Bruch erfolgt zwischen den Linien aa und bb in Abb. 2. Auch in diesem Falle pflegt man allerdings gewöhnlich die Festigkeit des Cements nach Gleichung (1) zu berechnen. Man erhält aber dabei nur einen Durchschnittswerth der specifischen Spannung σ für den ganzen Bruchquerschnitt und bleibt im Unklaren darüber, wie gross die specifische Spannung an jener Stelle ist, an der der Bruch beginnt. Um sich davon zu überzeugen, dass diese viel höher ist, als der nach Gl. (1) berechnete Durchschnittswerth, genügt es, ein Stück von derselben Gestalt aus Kautschuk herzustellen und dieses in derselben Weise auf Zug zu beanspruchen, wie es mit dem Cementkörper bei der Prüfung geschieht. Zieht man auf einer der ebenen Seitenflächen zwei feine Linien aa und bb, so bemerkt man, dass die Dehnung in der Nähe der Kanten viel grösser wird als in der Mitte. Die vorher geraden Linien aa und bb werden etwas gekrümmt und zwar so, dass sie sich ihre convexen Seiten zukehren. Bei einem Versuche, den ich in dieser Weise ausführte, wobei ich die Dehnungen zwischen aa und bb in verschiedenen Abständen

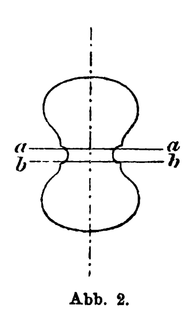


Abb. 2.

von der Mitte mit dem Mikroskope mass, fand ich, wenn die Dehnung in 11,5 *mm* Abstand von der Mitte, d. h. in $^1/_2$ *mm* Abstand von der Kante gleich 100 gesetzt wird,

im Abstande von der Mitte	= 0	4	8	11,5 *mm*
die Dehnungen	= 24	34	53	100

Die Dehnung an der Kante ist also mehr als viermal so gross als jene in der Mitte und daraus folgt, dass jedenfalls auch die Spannung in der Nähe der Kante viel grösser ist als in der Mitte.

Bei einem Cementkörper sind die elastischen Dehnungen, die dem Bruche vorausgehen, weit geringer als bei einem Kautschukkörper und daher einer unmittelbaren Messung, wenigstens bei so kleinen Körpern, wie sie zu den üblichen Festigkeitsprüfungen hergestellt werden, nicht zugänglich. Jedenfalls wissen wir aber aus anderen Versuchen, dass auch Cementkörper vor dem Bruche Dehnungen erfahren, die der Art nach in ganz ähnlicher Weise mit den Spannungen zusammenhängen, wie bei dem Kautschuk. Wir müssen daher schliessen, dass der Vorgang der elastischen Dehnung, wenn auch die absoluten Beträge viel kleiner sind, als beim Kautschuk, doch im Ganzen ein ähnliches Gesetz befolgt, wie bei dem vorher beschriebenen Versuche. Freilich kann man aus den Ergebnissen dieses Versuchs nicht unmittelbar erkennen, in welcher Weise sich die Spannung bei einem Cementkörper in Wirklichkeit genau über den Querschnitt vertheilt. Darüber kann man sich auf andere Art ein Urtheil verschaffen. Hier kommt es aber nur darauf an, zu zeigen, erstens mit welcher Vorsicht man bei der Berechnung der Spannungen verfahren muss und zweitens, dass ein zuverlässiges Urtheil über die Art der Spannungsvertheilung immer erst aus einer Untersuchung der damit verbundenen Formänderung des Körpers gewonnen werden kann.

Mit der eigentlichen Berechnung der Spannungen haben wir es an dieser Stelle noch nicht zu thun. Ich habe diese Betrachtungen nur angestellt, um den Begriff der specifischen Spannung in das rechte Licht zu setzen. Wenn eine gleich-

förmige Vertheilung der Spannungen über eine grössere Fläche nicht zu erwarten ist, müssen wir, um die specifische Spannung an einer bestimmten Stelle dieser Fläche zu definiren, einen kleinen Theil $\triangle F$ der Fläche an dieser Stelle abgrenzen und jenen Theil $\triangle P$ der ganzen Kraft P, der in $\triangle F$ übertragen wird, nach Gl. (1) durch $\triangle F$ dividiren. Wir erhalten dann den Durchschnittsbetrag von σ für die Fläche $\triangle F$ und dieser fällt um so genauer mit dem Werthe von σ an der ins Auge gefassten Stelle zusammen, je kleiner wir $\triangle F$ wählen. Als Definition der specifischen Spannung an einem bestimmten Punkte des Querschnitts haben wir daher bei ungleichförmiger Spannungsvertheilung den Grenzwerth

$$\sigma = \lim \frac{\triangle P}{\triangle F} = \frac{dP}{dF} \tag{2}$$

anzusehen, woraus auch umgekehrt

$$dP = \sigma dF \tag{3}$$

folgt.

Bisher setzte ich in Anlehnung an das einfache zur Erläuterung gewählte Beispiel stillschweigend voraus, dass die Spannungen σ senkrecht zum gewählten Querschnitte gerichtet seien. Im Allgemeinen ist dies aber natürlich keineswegs der Fall. Wenn die in einem Flächenelemente dF übertragene Kraft irgend einen Winkel mit der Normalen zu dF bildet, können wir uns die Kraft und daher auch die specifische Spannung in zwei Componenten zerlegt denken, von denen eine in die Richtung der Normalen, die andere in die Fläche dF selbst fällt. Die erste heisst Normalspannung und speciell Zug- oder Druckspannung, je nachdem sie einer Entfernung oder einer Annäherung der beiden Theile des Körpers, zwischen denen der Schnitt gelegt ist, widerstrebt, und die andere die Schubspannung. Für jene werde ich vorwiegend den Buchstaben σ, für diese den Buchstaben τ gebrauchen. Wenn das Flächenelement gegeben ist, wird die in ihm übertragene Normalspannung vollständig durch die Angabe der Grösse von σ und eines Vorzeichens beschrieben, durch das zwischen Zug- und Druckspannung unterschieden wird. Ich

werde den Zugspannungen stets das positive Vorzeichen geben. Zur Beschreibung der Schubspannung muss dagegen noch eine nähere Angabe über die Richtung von τ in der Fläche dF gemacht werden. Gewöhnlich ist es am bequemsten, zu diesem Zwecke, auf der Fläche dF zwei zu einander senkrechte Richtungen zu ziehen und τ in zwei Componenten nach diesen beiden Richtungen zu zerlegen. Im Ganzen ist dann die Angabe von drei Componenten erforderlich, um die durch die Fläche dF übertragene Spannung zu kennzeichnen.

Es wäre freilich ein Irrthum, wenn man annehmen wollte, dass der Spannungszustand des Körpers an der fraglichen Stelle durch die Angabe dieser drei Componenten vollständig festgesetzt wäre. Dies ist keineswegs der Fall: um vollständig darüber unterrichtet zu sein, müssen wir diese Componenten nicht nur für die Fläche dF, sondern auch für jedes andere Flächenelement anzugeben vermögen, das in beliebiger Stellung durch den gegebenen Punkt des Körpers gelegt werden kann.

Auf den ersten Blick erscheint es nun, als wenn dazu unendlich viele Angaben erforderlich wären. Man überzeugt sich aber leicht, dass es schon vollständig genügt, wenn man die Spannungscomponenten für drei verschiedene Stellungen von dF anzugeben vermag; für jedes vierte Flächenelement, das man durch den gegebenen Punkt legen mag, ist die Spannung dadurch schon mitbestimmt. Um dies zu erkennen, denke man sich ein unendlich kleines Tetraëder aus dem Körper abgegrenzt, so dass der gegebene Punkt etwa die eine Ecke dieses Tetraëders bildet. Dieses Tetraëder sei der Theil des Körpers, auf den wir nach unserem gewöhnlichen Verfahren die Gleichgewichtssätze der Statik in Anwendung bringen wollen. Ausserdem sollen die drei an den gegebenen Punkt angrenzenden Flächen in jenen Stellungen gezogen sein, für die wir die Spannungscomponenten bereits als gegeben betrachten, während die vierte Fläche ganz beliebige Stellung haben kann. Diese vierte Fläche geht nun zwar nicht durch den gegebenen Punkt und bei einigem Abstande von ihm wird auch die Spannung, die durch sie übertragen wird, etwas

verschieden sein von der Spannung einer parallel zu ihr durch den gegebenen Punkt gelegten Fläche, die wir eigentlich berechnen wollen. Wenn wir uns aber die Kanten des Tetraëders immer mehr verkleinert denken und die vierte Fläche dadurch dem Punkte immer näher rücken, wird der Unterschied immer mehr abnehmen und in der Grenze ganz verschwinden. Dies ist der Grund, weshalb wir uns das Tetraëder unendlich klein denken müssen, denn im anderen Falle könnten wir offenbar auch die Gleichgewichtsbedingungen für ein Tetraëder von endlicher Kantenlänge mit demselben Erfolge untersuchen. In der That muss hier schon allgemein gesagt werden, dass es in der Festigkeitslehre sehr oft zulässig ist, sich jene Körper, die als unendlich klein bezeichnet werden, auch in endlichen Abmessungen vorzustellen, ohne dass dadurch der Genauigkeit der Betrachtung ein erheblicher Abbruch geschehen würde. Im einzelnen Falle wird man sich immer leicht ein Urtheil darüber verschaffen können, wie klein man die Dimensionen mindestens wählen muss, ohne einen merklichen Fehler dadurch zu begehen, dass sich der betrachtete Spannungszustand etwas ändert, wenn man von der gegebenen Stelle um ein endliches Stück abrückt.

An dem vorgelegten Tetraëder wirken nun fünf äussere Kräfte, die im Gleichgewichte miteinander stehen müssen, nämlich die Spannungen, die auf den vier Seitenflächen übertragen werden, und die Fernkraft, die von aussen her auf die Masse des Tetraëders einwirkt. Bei den gewöhnlichen Anwendungen der Festigkeitslehre wird diese nur durch das Gewicht des Tetraëders gebildet. Will man Schwingungsbewegungen oder überhaupt Bewegungen untersuchen, die der Körper ausführt, so kommt noch eine Kraft hinzu, die man nach dem d'Alembert'schen Princip anbringen muss, also z. B. eine Centrifugalkraft — oder allgemein eine sogenannte Trägheitskraft — um den Fall der Bewegung auf den Gleichgewichtsfall zurückzuführen.

Wie dies aber auch sein möge, jedenfalls ist die an der Masse des Tetraëders unmittelbar angreifende Kraft dem

Volumen des Tetraëders proportional, während die Spannungen an den Seitenflächen den Flächeninhalten proportional sind. Nun haben wir vorher schon gesehen, dass wir uns, um genauere Resultate zu erhalten, die Abmessungen des Tetraëders immer mehr verkleinert denken müssen, so dass sie in der Grenze zu Null werden. Bei dieser Verkleinerung nimmt aber das Volumen viel schneller ab, als die Inhalte der Seitenflächen, da jenes der dritten, diese aber nur der zweiten Potenz der Längen proportional sind. Durch hinreichende Verkleinerung werden wir es also immer dahin bringen können, dass die dem Volumen proportionale Kraft gegenüber den Spannungen an den Seitenflächen ganz unmerklich wird.

Wir haben es hier mit einer Ueberlegung zu thun, die überall anwendbar ist, wo der Einfluss von Kräften, die den Massen proportional sind, mit dem verglichen werden soll, der von Oberflächenkräften herrührt. So wird z. B. ein kleiner Stein im fliessenden Wasser leicht fortgerissen, während ein ihm geometrisch ähnlicher von grossen Abmessungen unter den gleichen Bedingungen liegen bleibt, weil der Wasserdruck nur mit der zweiten Potenz, das Gewicht des Steins aber mit der dritten Potenz der Längen abnimmt. Derselbe Grund bedingt auch, dass ein Elephant im Allgemeinen schwerfälliger sein muss, als ein Thier von geringer Körpergrösse, denn das Eigengewicht, mit dem der Elephant bei seinen Bewegungen zu rechnen hat, steht bei ihm in einem ungünstigeren Verhältnisse zu den Querschnitten der Muskeln, durch die die bewegende Kraft übertragen wird.

Uebrigens ist in der That bei den gewöhnlichen Anwendungen der Festigkeitslehre das Eigengewicht des vorher betrachteten Tetraëders selbst dann schon gewöhnlich ganz unmerklich, wenn die Kantenlängen noch nach Centimetern zählen. Das Eigengewicht des Tetraëders berechnet sich dann auf Gramme, während die Spannungen an den Seitenflächen sich oft genug auf Tausende von Kilogrammen belaufen. Um die Spannungen an solchen kleinen Stücken unmittelbar miteinander zu vergleichen, braucht man daher in erster Linie

auf das Eigengewicht keine Rücksicht zu nehmen. Erst dann, wenn man etwa auf sehr kleine Unterschiede achten will, die dadurch bedingt werden, dass man um ein kleines Stück in einer gewissen Richtung weiter geht, wird es nöthig, auch auf die den Massen proportionalen Kräfte zu achten.

Mit Rücksicht auf diese Erwägungen bleibt daher nur noch das Gleichgewicht der Spannungen an den vier Seitenflächen des Tetraëders für sich genommen zu untersuchen. Das Gleichgewicht erfordert, dass die geometrische Summe dieser vier Spannungen gleich Null ist. Wenn drei Spannungen gegeben sind, folgt daher Grösse und Richtung der vierten durch Zeichnen eines windschiefen Kräftevierecks oder nach dem Satze vom Parallelepiped der Kräfte oder nach irgend einer anderen Methode der gewöhnlichen Statik.

Die genannte Bedingung genügt freilich noch nicht, um das Gleichgewicht eines Körpers unter der Wirkung dieser vier Kräfte sicher zu stellen. Dazu gehört noch, dass sich die vier Richtungen entweder in einem Punkte schneiden oder dass wenigstens auf andere Art auch ein Gleichgewicht gegen Drehung gesichert ist. Dies weist uns darauf hin, dass schon die Spannungen auf drei gegebenen Flächenelementen dF gewisse Bedingungen erfüllen müssen, wenn sie überhaupt miteinander verträglich sein sollen. Man kann diese Bedingungen ohne Schwierigkeit für das Tetraëder ableiten, indem man Momentengleichungen anschreibt. Wir wollen aber dazu einen bequemeren Weg wählen, indem wir an Stelle des Tetraëders ein unendlich kleines Parallelepiped betrachten.

§ 2. Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Spannungscomponenten.

Wir sahen vorher, dass der Spannungszustand, in dem sich der Körper an einer gewissen Stelle befindet, durch Angabe der Spannungscomponenten für drei beliebige Flächenelemente von verschiedener Stellung, die man durch den gegebenen Punkt legen kann, eindeutig beschrieben wird. Es steht uns frei, diese Flächenelemente so auszuwählen, wie es

für die weitere Untersuchung am bequemsten ist. Dieser Umstand weist uns von selbst auf die Benutzung eines rechtwinkligen Coordinatensystems hin. In der Festigkeitslehre wird nicht viel damit gewonnen, wenn man an Stelle von Coordinaten oder Componenten mit den gerichteten Grössen selbst rechnet, was in den meisten übrigen Theilen der Mechanik von Vortheil ist. Ich werde daher hier überall der ohnehin bekanntesten Cartesischen Methode der Untersuchung mit Coordinaten und Componenten den Vorzug geben und nur ganz gelegentlich einmal auf die andere Art der Darstellung hinweisen.

In Abb. 3 sei O der Punkt des Körpers, für den der Spannungszustand untersucht werden soll. Er möge die Ecke eines unendlich kleinen Parallelepipeds bilden, dessen aufeinander senkrecht stehende Kanten in die Richtungen der Coordinatenaxen OX, OY, OZ gelegt sind. Unendlich klein müssen wir uns das Parallelepiped wieder deshalb denken, weil sonst die Spannungen an verschiedenen Stellen der von O ausgehenden Seitenflächen merklich von einander abweichen könnten. So aber können wir ohne in Betracht kommenden Fehler annehmen, dass die Spannungen über jede Seitenfläche gleichmässig vertheilt sind. Die Resultirende der Spannungen für jede Seitenfläche geht dann auch durch deren Schwerpunkt, also durch die Mitte, und die Grösse ist nach Gleichung (3) gleich dem Produkte aus der specifischen Spannung für die betreffende Flächenstellung und dem Inhalte des Rechtecks.

Die Normalspannungen gehen auf allen Seitenflächen schon von selbst in den Richtungen der Coordinatenaxen, und auch die Schubspannungen wollen wir uns an jeder Fläche in zwei Componenten zerlegt denken, die in die Richtungen der Coordinatenaxen fallen. Wir haben dann an den sechs Seitenflächen des abgegrenzten Körperstücks zusammen 18 Spannungscomponenten, deren Gleichgewicht zu untersuchen ist, denn in erster Annäherung brauchen wir aus den in § 1 auseinandergesetzten Gründen auf die Massenkraft, die sonst noch dazu käme, nicht zu achten.

Wir müssen uns zunächst darüber klar werden, in welchen Beziehungen die Spannungen auf zwei gegenüberliegenden Seitenflächen des Parallelepipeds zu einander stehen. In jeder Trennungsfläche, die wir uns in einem Körper gezogen denken können, grenzen zwei Theile des Körpers aneinander, zwischen denen sich die Spannungen durch die Trennungsfläche übertragen. Nach dem Gesetze der Action und Reaction ist die

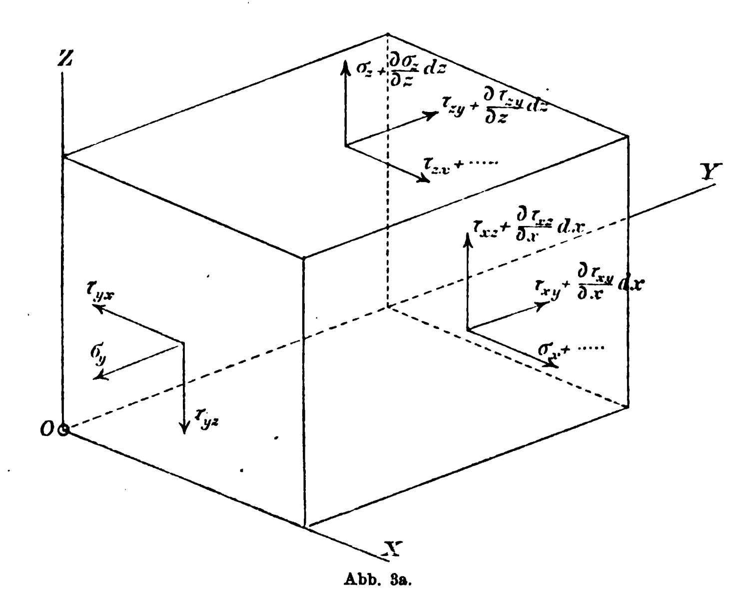


Abb. 3a.

Kraft, die etwa A auf B überträgt, ebenso gross, aber entgegengesetzt gerichtet wie die Kraft, die von B auf A wirkt. Wir wollen uns, um beide Theile deutlich von einander unterscheiden zu können, eine Normale zur Trennungsfläche nach einer der beiden möglichen Richtungen gezogen denken. Für den einen Theil geht diese Normale dann nach aussen hin und für den anderen nach innen. Eine Zugspannung ist für jeden der beiden Theile eine Kraft, deren Pfeil mit der Richtung der äusseren Normale dieses Theiles übereinstimmt. Betrachten wir nämlich den anderen Theil, so kehrt sich nach dem Gesetze der Action und Reaction der Pfeil der über-

tragenen Spannung um, gleichzeitig ist aber nun die entgegengesetzte Richtung der Normalen als die äussere zu bezeichnen, und wir können daher in der That die für beide Theile zutreffende, eindeutige Aussage machen, dass eine Normalspannung immer als Zugspannung, also positiv zu rechnen ist, wenn sie in die Richtung der äusseren Normale fällt.

Nun fasse man in Abb. 3 etwa die beiden sich gegen-

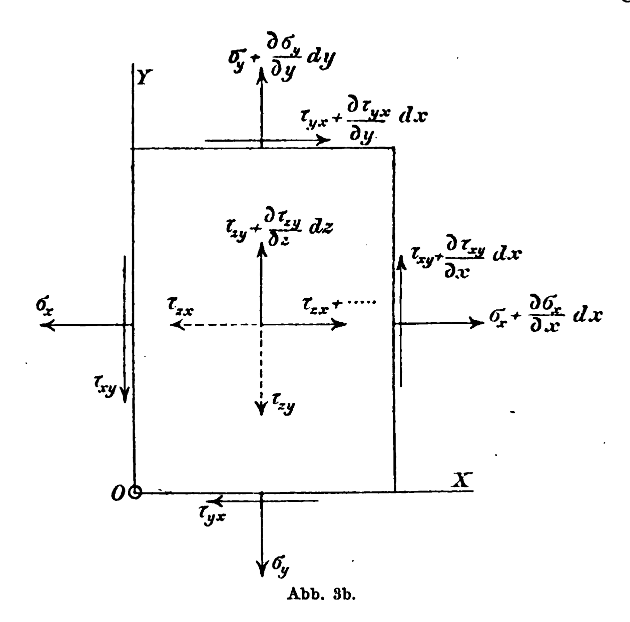


Abb. 3b.

überliegenden Seitenflächen in's Auge, die senkrecht zur X-Axe stehen. Die äussere Normale der einen geht in der Richtung der positiven X-Axe, die der anderen in der entgegengesetzten Richtung. Denkt man sich beide Flächen immer näher aneinander gerückt, so wird zuletzt die in der einen Fläche übertragene Spannung nur einfach die nach dem Gesetze der Action und Reaction auftretende Gegenwirkung der zur anderen gehörigen Spannung sein. In erster Annäherung können wir daher bei je zwei sich gegenüberliegenden Flächen des Parallelepipeds die Spannungen als gleich gross und entgegengesetzt gerichtet betrachten. Nur wenn man ab-

sichtlich auf die kleinen Unterschiede achten will, die dadurch zu Stande kommen, dass die eine Fläche etwas entfernt von der zu ihr parallelen ist, wird man die in Abb. 3 eingeschriebenen genaueren Ausdrücke zu benutzen haben.

In Bezug auf die Richtungen, die als positiv anzusehen sind, ist noch Folgendes zu beachten. Bei jenen Seitenflächen, deren äussere Normalen in den Richtungen der positiven Coordinatenaxen gehen, zählt die Normalspannung σ ebenfalls in dieser Richtung positiv, denn wir haben schon vorher festgesetzt, dass Zugspannungen immer positiv gerechnet werden sollen. Wir kommen daher zur einfachsten Uebereinkunft über die Wahl der Vorzeichen, wenn wir bestimmen, dass nicht nur σ, sondern auch die beiden Componenten der Schubspannung τ auf jenen Flächen in den Richtungen der positiven Coordinatenaxen positiv gezählt werden sollen, deren äussere Normalen in die positiven Axenrichtungen fallen. Bei den gegenüberliegenden Flächen sind dann natürlich alle Pfeile umzukehren, wenn die Spannungscomponenten positive Werthe haben. Nach diesen Grundsätzen sind die Pfeile in Abb. 3, mit der man sich recht vertraut machen möge, eingetragen. In der axonometrischen Zeichnung sind die Spannungen auf den drei verdeckt liegenden Seitenflächen weggelassen. Von den drei sichtbaren Seitenflächen hat die in der XZ-Ebene liegende eine äussere Normale, die der positiven Y-Axe entgegengesetzt gerichtet ist. Daher sind hier auch die Pfeile von σ und den beiden Componenten von τ den Coordinatenaxen entgegengesetzt gerichtet gezeichnet. Bei den beiden anderen sichtbaren Seitenflächen gehen dagegen die Pfeile in den positiven Axenrichtungen, weil dies auch von den äusseren Normalen zutrifft.

Die den Spannungscomponenten σ und τ angehängten Ordnungszeiger reden eine leicht verständliche Sprache. Jedes σ trägt nur einen Zeiger, denn hier genügt es, die Stellung des Flächenelementes anzugeben, zu dem σ gehört, und dies geschieht, indem die Axenrichtung angemerkt wird, zu der das Flächenelement senkrecht steht und zu der σ daher

parallel geht. Auch der erste der beiden Zeiger der Schubspannungscomponenten τ bezieht sich auf die Stellung des zugehörigen Flächenelementes und stimmt daher auf jeder Fläche mit dem Zeiger von σ überein. Der zweite Zeiger gibt dagegen an, welcher Axenrichtung die betreffende Componente parallel geht.

Zur Erläuterung von Abb. 3 muss ich endlich noch auf einen Umstand aufmerksam machen, an den der Leser freilich schon längst gedacht haben wird. Von den drei sichtbaren Seitenflächen geht nur eine durch den Punkt O, in dem der Spannungszustand untersucht werden soll. Hier konnte man sich damit begnügen, die Spannungscomponenten einfach mit σ_y, τ_{yx} und τ_{yz} zu bezeichnen. Freilich sieht man dabei schon von unendlich kleinen Unterschieden ab, die sich daraus ergeben, dass der Spannungszustand nicht über die ganze Rechteckfläche genau mit dem in O übereinstimmt. Auf der gegenüberliegenden Seitenfläche kommen dieselben Unterschiede ebenfalls vor und gerade weil von beiden Flächen in dieser Hinsicht dasselbe gilt, ist es nicht nöthig, auf diese unendlich kleinen Unterschiede weiter zu achten. Dagegen kann es nöthig werden, den Unterschied hervorzuheben, der dadurch entsteht, dass die gegenüberliegende Seitenfläche um das Stück dy in der Richtung der Y-Axe gegen die vordere verschoben ist. Wir müssen, um diese feinen Abstufungen zu berücksichtigen, der Normalspannung σ_y auf der gegenüberliegenden Seitenfläche noch ein Differential zufügen, so dass wir dort

$$\sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} dy$$

erhalten und ähnliches gilt für die anderen Componenten. Aus dem Grundrisse der Abb. 3 ist dies ersichtlich. Ebenso sind in der axonometrischen Figur die Spannungscomponenten auf den beiden sichtbaren Seitenflächen, die nicht durch den Punkt O gehen, schon mit den Zuwüchsen versehen, die den Abständen von den gegenüberliegenden Flächen entsprechen. Wo der Platz nicht ausreichte, sind diese Differentiale auch

nur durch Punkte angedeutet, wie in $\tau_{zx} + \cdots$ an Stelle von

$$\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot dz.$$

Nachdem man sich mit allen diesen Einzelheiten, die in Abb. 3 zu berücksichtigen waren, hinreichend vertraut gemacht hat, ist schon der erste und wichtigste Schritt zum Verständnisse der Grundgleichungen der Festigkeitslehre geschehen: Es erübrigt jetzt nur noch, die Bedingungen für das Gleichgewicht der Kräfte an dem unendlich kleinen Parallelepiped, dessen Kantenlängen mit dx, dy, dz bezeichnet werden, in Form von Gleichungen anzuschreiben. Zunächst wollen wir das Gleichgewicht gegen Drehung in's Auge fassen, da wir schon in § 1 erkannten, dass wir hierdurch zu den Bedingungen geführt werden, die zwischen den neun Spannungscomponenten $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z\ \tau_{xy}\ \tau_{xz}\ \tau_{yz}\ \tau_{yx}\ \tau_{zx}\ \tau_{zy}$ für die drei durch den Punkt O gelegten Flächenelemente bestehen müssen, damit sie miteinander verträglich sind. Um z. B. zu erkennen, welche Bedingung erfüllt sein muss, damit keine Drehung um eine zur Z-Axe parallele Grade eintreten kann, projiciren wir den Körper mit allen daran angreifenden Kräften auf die XY-Ebene, wie dies in Abb. 3^b bereits geschehen ist. Wir sehen dann, dass zwei Kräftepaare vorkommen, die eine solche Drehung in entgegengesetzter Richtung anstreben. Ein Kräftepaar wird durch die Spannungen τ_{yx} auf den beiden Rechteckseiten gebildet, deren Normalen zur Y-Axe parallel gehen. Die Grösse jeder Kraft dieses Paares wird gefunden, wenn wir die specifische Spannung τ_{yx} mit dem Inhalte des Flächenelementes, über das sie vertheilt ist, multipliciren; sie ist also gleich $\tau_{yx} \cdot dx\, dz$ zu setzen. Das statische Moment des Kräftepaars ist daher gleich

$$\tau_{yx} \cdot dx\, dy\, dz.$$

Ebenso finden wir für das Moment des Kräftepaars der Schubspannungen τ_{xy}, die über die beiden zur X-Axe senkrechten Seitenflächen vertheilt sind,

$$\tau_{xy} \cdot dx\, dy\, dz.$$

Die Gleichgewichtsbedingung gegen Drehen erfordert daher, dass

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}$$

ist.*) Natürlich lässt sich dieselbe Betrachtung auch für eine Drehung um jede der beiden anderen Coordinatenaxen wiederholen, und wir erhalten daher im Ganzen die drei Gleichgewichtsbedingungen

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \tag{4}$$

die einen der wichtigsten Sätze der Festigkeitslehre aussprechen. Man kann ihn auch noch in etwas allgemeinerer Form aufstellen, wenn man an Stelle des rechtwinkligen Parallelepipeds in Abb. 3 ein schiefwinkliges untersucht; ich sehe aber davon ab, dies weiter auszuführen, da nicht viel dabei herauskommt. Ferner erwähne ich noch, dass viele Schriftsteller für die einander gleichen Schubspannungscomponenten τ_{xy} und τ_{yx} eine einheitliche Bezeichnung, nämlich τ_z einführen, wobei jetzt der Zeiger z darauf hinweisen soll, dass jene Schubspannungen gemeint sind, die sich im Gleichgewichte gegen eine Drehung um die Z-Axe halten, und ähnlich für die übrigen. Man spart hierbei zwar das Anschreiben eines zweiten Zeigers; es will mir aber scheinen, dass dieser Vortheil nicht erheblich genug ist, um die anschaulichere Schreibweise mit zwei Zeigern aufzugeben. Ich werde daher diese beibehalten.

Wir haben jetzt erkannt, dass zur vollständigen Beschreibung des Spannungszustandes des Körpers in einem gegebenen Punkte O die Angabe von sechs Zahlen erforderlich ist. Diese Anzahl kann auch durch weitere Betrachtungen nicht herabgedrückt werden. Man pflegt diese Thatsache auch wohl mit den Worten auszusprechen, das ∞^6 verschiedene Spannungs-

---

*) Im Innern eines Magneten ist dieser Schluss nicht zulässig, da hier ausser den Schubspannungen noch ein auf Verdrehen des ganzen Volumenelementes hinwirkendes Moment der magnetischen Kräfte auftritt, das von derselben Grössenordnung sein kann. Von solchen ausnahmsweise vorkommenden Fällen soll aber hier stets abgesehen werden.

zustände möglich sind, oder dass die Reihe aller Spannungszustände eine Mannigfaltigkeit von sechs Dimensionen bildet.

Wir wollen jetzt noch das Gleichgewicht des Parallelepipeds gegen Verschieben in den drei Axenrichtungen betrachten. Dieses wird schon durch das Gesetz der Action und Reaction verbürgt, wenn wir auf die sehr kleinen Unterschiede der Spannungen an gegenüberliegenden Seitenflächen keine Rücksicht nehmen, wie es bei der vorigen Betrachtung geschehen konnte. Wir wollen aber dabei nicht stehen bleiben, weil wir bei dieser Gelegenheit noch erfahren können, in welchen Beziehungen die Zuwüchse der Spannungscomponenten bei verschiedenen Fortschreitungsrichtungen zu einander stehen müssen. Natürlich ist es jetzt, wo wir nur auf die kleinen Unterschiede der Spannungen auf gegenüberliegenden Flächen zu achten haben, nicht mehr zulässig, die dem Volumen des Parallelepipeds proportionale Fernkraft, also etwa das Gewicht des Körperchens, zu vernachlässigen. Dieses ist zwar unendlich klein gegen die Spannungen selbst, aber durchaus vergleichbar mit den kleinen Unterschieden zwischen den Spannungen auf gegenüberliegenden Seiten. Ich denke mir die auf die Raumeinheit bezogene Massenkraft in drei Componenten nach den Coordinatenaxen zerlegt, die ich mit X Y Z bezeichne und positiv rechne, wenn sie mit den positiven Axen gleichgerichtet sind.

In der Richtung der X-Axe kommen jetzt an dem Körperchen sieben Kräfte vor, deren Summe gleich Null sein muss, damit das Gleichgewicht gesichert ist. An jeder Seitenfläche des Parallelepipeds haben wir eine zur X-Axe parallele Spannungscomponente, und dazu kommt die Componente der Massenkraft im Betrage $X\,dx\,dy\,dz$. Die Spannungscomponenten kann man paarweise zusammenfassen. Auf dem durch den Punkt O gehenden, zur X-Axe senkrechten Rechteck haben wir die Componente σ_x der specifischen Spannung, also im Ganzen den Betrag $\sigma_x \cdot dy\,dz$ einer Kraft, die der positiven X-Axe entgegengesetzt gerichtet ist. Auf der gegenüberliegenden Seitenfläche kommt dazu die um ein Differential

verschiedene und nach der positiven X-Axe hin gerichtete Normalspannung. Fassen wir beide zusammen, so behalten wir einen Ueberschuss von der Grösse

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \cdot dx\, dy\, dz$$

in der Richtung der positiven X-Axe. Ebenso tragen die beiden zur Y-Axe senkrechten Seitenflächen zusammen genommen das Glied

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \cdot dx\, dy\, dz$$

zur Componentensumme in der Richtung der X-Axe bei und ähnlich die beiden letzten Seitenflächen. Schreiben wir nun die Bedingung an, dass die algebraische Summe aller parallel zur X-Axe gehenden Componenten verschwinden muss, so erhalten wir nach Wegheben des gemeinsamen Faktors $dx\, dy\, dz$ die erste der drei folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

Die beiden letzten sind ebenso gebildet, wie die erste, die wir eben ableiteten, und sprechen die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben in den Richtungen der Y- und der Z-Axe aus. Es ist zwar nützlich, sie zur Uebung ebenfalls aus Abb. 3 abzulesen, aber nicht nothwendig, da keine Coordinatenaxe vor den anderen etwas voraus hat und was für die eine bewiesen ist, daher auch für die anderen gelten muss. Es genügt daher vollständig, sich davon zu überzeugen, dass die beiden anderen Gleichungen aus der ersten hervorgehen, wenn man die Coordinaten $x\ y\ z$ cyclisch miteinander vertauscht.

§ 3. Das Gleichgewicht am Tetraëder.

Wir wollen jetzt die am Schlusse von § 1 in allgemeinen Umrissen angestellte Betrachtung auch noch in einen Satz von Gleichungen umprägen. Dazu beziehe ich mich auf Abb. 4, in der das Tetraëder in Aufriss und Grundriss gezeichnet ist. Als gegeben werden die Spannungscomponenten betrachtet, die zu den Stellungen der drei Coordinatenebenen gehören; verlangt wird die Berechnung der Spannungscomponenten auf der in beliebiger Stellung gezogenen vierten Tetraëderfläche, deren äussere Normale mit n bezeichnet ist. Es ist am bequemsten, die Spannung für diese Fläche, die mit p_n bezeichnet werden möge, zunächst in drei Componenten zu zerlegen, die den Coordinatenaxen parallel laufen. In der Abbildung sind diese Componenten mit $p_{nx}\, p_{ny}\, p_{nz}$ bezeichnet; die Zeiger haben also dieselbe Bedeutung wie bei den früheren Betrachtungen. Nachdem diese Componenten gefunden sind, kann man leicht auch die Normalspannung σ_n und die in gegebenen Richtungen verlaufenden Schubspannungscomponenten daraus ableiten, wenn sich dies als nöthig herausstellt.

Abb. 4.

Die Fläche der vierten Tetraëderseite sei gleich dF; die Flächen der drei anderen bilden die Projectionen von dF auf die Coordinatenebenen und werden daher aus dF durch Mul-

tiplication mit den Cosinus der Neigungswinkel gefunden. Der Winkel zwischen dF und der YZ-Ebene ist aber nach einem bekannten Satze der Stereometrie auch gleich dem Winkel zwischen den Normalen auf beiden Ebenen, der kurz als Winkel (nx) bezeichnet werden soll.

An der in die YZ-Ebene fallenden Seitenfläche des Tetraëders kommt eine in der Richtung der negativen X-Axe verlaufende Spannungscomponente σ_x vor, die nach Multiplication mit dem Flächeninhalte dieser Tetraëderseite den Beitrag

$$\sigma_x \, dF \cos(nx)$$

zur Componentengleichung liefert. Von der Seitenfläche in der XZ-Ebene stammt ebenso, wie man aus Abb. 4 unmittelbar ablesen kann, der Beitrag

$$\tau_{yx} \, dF \cos(ny)$$

und von der Seitenfläche in der XY-Ebene der Beitrag

$$\tau_{zx} \, dF \cos(nz),$$

wobei zu beachten ist, dass alle diese drei Componenten, sofern überhaupt die Spannungscomponenten σ und τ alle das positive Vorzeichen haben, nach der über die Richtungsbezeichnungen getroffenen Uebereinkunft in der Richtung der negativen X-Axe gehen. Die Spannungscomponente p_{nx} auf der vierten Tetraëderseite wollen wir, da hierüber bisher noch nichts festgesetzt ist, als positiv betrachten, wenn sie in die Richtung der positiven X-Axe fällt. Die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben in der Richtung der X-Axe erfordert nun, dass die Componente $p_{nx} dF$ der Summe der vorher aufgeführten Kräfte, die in entgegengesetzter Richtung gehen, gleich ist. Nach Wegheben des gemeinsamen Faktors dF erhalten wir daher die erste der drei folgenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \cos(nx) + \tau_{yx} \cos(ny) + \tau_{zx} \cos(nz) \\ p_{ny} &= \sigma_y \cos(ny) + \tau_{xy} \cos(nx) + \tau_{zy} \cos(nz) \\ p_{nz} &= \sigma_z \cos(nz) + \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Die beiden folgenden ergeben sich aus der ersten durch cyclische Vertauschung von $x\,y\,z$ und sprechen die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben in den Richtungen der Y- und Z-Axe aus.

Damit ist die Aufgabe gelöst. Man wendet die Gleichungen (6) namentlich dann an, wenn die vierte Tetraëderseite in die Oberfläche des ganzen Körpers fällt. Unter den p sind dann die Druckkräfte zu verstehen, die von aussen her auf den ganzen Körper übertragen werden. Diese sind gewöhnlich gegeben; sehr häufig sind sie gleich Null und die vorigen Gleichungen geben dann in der Form

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x \cos(nx) + \tau_{yx} \cos(ny) + \tau_{zx} \cos(nz) = 0\\ \sigma_y \cos(ny) + \tau_{xy} \cos(nx) + \tau_{zy} \cos(nz) = 0\\ \sigma_z \cos(nz) + \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) = 0\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

die Beziehungen an, die zwischen den Spannungscomponenten in der Nähe einer freien Oberfläche des ganzen Körpers bestehen müssen.

Der denkende Anfänger wird leicht auf die Frage verfallen, weshalb ich dabei stehen bleibe, die Gleichgewichtsbedingungen für Körperelemente von der Gestalt eines Parallelepipeds oder eines Tetraëders zu untersuchen. Für ihn bemerke ich hier noch, dass in der That nichts im Wege steht, das Gleichgewicht eines beliebig gestalteten Körperelements in derselben Weise zu behandeln. Man kommt aber dabei zu keinen neuen Resultaten. In manchen Büchern wird diese allgemeinere Betrachtung von vornherein vorgenommen. Solche Bücher sind aber gewöhnlich nur für den verständlich, der schon vorher so ziemlich alles weiss, was in ihnen vorgetragen wird. Alle wissenschaftlichen Lehren sind anfänglich an den einfachsten Beispielen und auf Grund der vorsichtigsten Ueberlegungen aller Einzelheiten entwickelt worden. Denselben Weg muss man auch selbst einschlagen, wenn man in die Wissenschaften eindringen will. Wer auf diesem Wege eine hinreichende Grundlage gewonnen hat, wird es später

unvergleichlich viel leichter finden, auch die allgemeinsten Fälle beherrschen zu lernen, als es ihm anfänglich wurde, den allereinfachsten Darlegungen zu folgen. Ich sehe mich hier zu dieser Bemerkung veranlasst, weil ich verhindern möchte, dass der Leser, dem die vorausgegangenen Untersuchungen Schwierigkeiten machten, den Muth zu schnell sinken lässt. Wer das Vorausgegangene hinreichend oft durchgelesen und durchgedacht hat, wird bald alle Schwierigkeiten der Vorstellung überwunden haben.

§ 4. Das ebene Problem.

Bisher haben wir den allgemeinsten Fall des Spannungszustandes untersucht, der überhaupt in einem Körper auftreten kann. Die Fälle, mit denen man praktisch zu thun bekommt, sind aber gewöhnlich viel einfacher. Aus diesem Grunde und aus einem anderen, der kurz vorher erwähnt wurde, wollen wir die weitere Untersuchung an dieser Stelle auf den Fall des sogenannten ebenen Problems beschränken. Man versteht darunter einen Spannungszustand, bei dem nach einer bestimmten Richtung hin überhaupt keine Spannungscomponenten auftreten. Um diesen Fall weiter zu untersuchen, wollen wir uns das Coordinatensystem so gewählt denken, dass die Z-Axe in die soeben bezeichnete Richtung fällt. Der Fall des ebenen Problems wird dann durch die Aussagen

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0 \tag{8}$$

gekennzeichnet. Von den sechs Spannungscomponenten, die im Allgemeinen zur Beschreibung des Spannungszustandes erforderlich sind, unterscheiden sich demnach hier nur noch drei von Null, nämlich σ_x, σ_y und $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, wofür wir jetzt, da keine Verwechslung mehr möglich ist, kurz τ schreiben können.

Wir wollen jetzt die Frage aufwerfen, wie man beim ebenen Problem die Schnittrichtung wählen muss, damit die Spannungen ihre grössten Werthe annehmen. Dabei genügt

es, nur solche Schnittrichtungen in Betracht zu ziehen, die parallel zur Z-Axe gehen. Wir denken uns ein dreiseitiges Prisma abgegrenzt, dessen Grundfläche in Abb. 5 angegeben ist, während die zur Z-Axe parallelen Kanten die Längen dz haben mögen. Auf die beiden Grundflächen wirken nach den Gleichungen (8) überhaupt keine Kräfte. Die Spannungs-Componenten an den drei Seitenflächen sind in die Abbildung nach jenen Richtungen eingetragen, die als positiv gerechnet werden. Die Spannung auf der unter dem Winkel φ gegen die X-Axe geneigten Seitenfläche ist in die Normalcomponente σ' und die Schubspannung τ' zerlegt. Die letzte kann ebenfalls keine Componente in der Richtung der Z-Axe haben, weil an den übrigen Seitenflächen keine Kraft in dieser Richtung, die mit ihr Gleichgewicht halten könnte, vorkommt; sie ist also ebenso wie σ' und alle übrigen Spannungen parallel zur XY-Ebene.

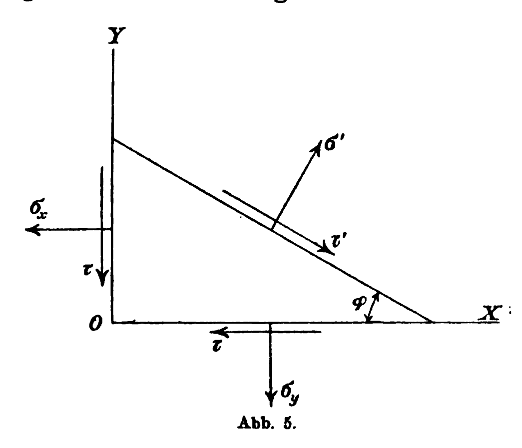


Abb. 5.

Das Gleichgewicht der Kräfte gegen Verschieben nach der X-Axe liefert, wenn wir den Inhalt der schief zu den Axen stehenden Seitenfläche mit dF bezeichnen, die Bedingungsgleichung

$$\sigma' dF \sin\varphi + \tau' dF \cos\varphi - \sigma_x dF \sin\varphi - \tau dF \cos\varphi = 0,$$

aus der man den gemeinsamen Faktor dF wegheben kann. Ebenso liefert die Componentengleichung für die Richtung der Y-Axe

$$\sigma' \cos\varphi - \tau' \sin\varphi - \sigma_y \cos\varphi - \tau \sin\varphi = 0.$$



Beide Gleichungen lösen wir nach den Unbekannten σ' und τ' auf. Durch Multiplication der ersten Gleichung mit $\sin\varphi$, der zweiten mit $\cos\varphi$ und Addition erhält man zunächst

$$\sigma' = \sigma_x \sin^2\varphi + \sigma_y \cos^2\varphi + 2\tau \sin\varphi \cos\varphi.$$

Bequemer ist es für das Folgende, diesen Ausdruck dadurch noch etwas umzugestalten, dass man den doppelten Winkel einführt, also z. B.

$$\sin^2\varphi = \frac{1 - \cos 2\varphi}{2}$$

setzt. Dadurch geht der vorige Werth über in

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}\cos 2\varphi + \tau \sin 2\varphi \\ \tau' &= \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau\cos 2\varphi \cdot \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

In der zweiten Gleichung ist der Werth von τ' angegeben, der auf dieselbe Weise erhalten wird. Die Spannungscomponenten σ' und τ' sind damit als Functionen des Winkels φ gefunden, den wir uns veränderlich denken können, wodurch wir zu allen Schnittrichtungen gelangen, die zur XY-Ebene senkrecht stehen. Um die Maximalwerthe zu finden, differentiiren wir zunächst σ' nach φ und setzen den Differentialquotienten gleich Null. Aus der so entstehenden Gleichung

$$0 = -\frac{\sigma_y - \sigma_x}{2} \cdot 2\sin 2\varphi + 2\tau \cos 2\varphi \qquad (10)$$

erhalten wir zunächst $\operatorname{tg} 2\varphi$ und daraus auch φ selbst, nämlich

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} + n\frac{\pi}{2} \qquad (11)$$

wenn n eine beliebige positive oder negative ganze Zahl bedeutet. Durch die Zufügung eines Vielfachen von π wird nämlich der Werth von $\operatorname{tg} 2\varphi$ nicht geändert; man kann also $n\pi$ beliebig zu 2φ und daher $n\frac{\pi}{2}$ beliebig zu φ addiren, ohne die Bedingung für ein Maximum oder Minimum von σ' zu ändern.

Die rechte Seite von Gl. (10) stimmt genau mit dem doppelten Werthe von τ' in Gl. (9) überein. Wir erkennen daraus, dass σ' in jenen Schnittflächen seinen grössten oder kleinsten Werth annimmt, für die τ' verschwindet. Zugleich folgt aus Gl. (11), dass dies immer mindestens in zwei Schnittflächen zutrifft, die aufeinander senkrecht stehen (für die sich φ um einen rechten Winkel unterscheidet). Daneben ist nur noch ein Ausnahmefall möglich, der dann eintritt, wenn $\tau = 0$ und $\sigma_x = \sigma_y$ war. Dann ist auch für alle anderen Schnittrichtungen $\tau' = 0$ und σ' ist unabhängig von φ, d. h. für alle Schnittrichtungen gleich gross.

Von diesem Ausnahmefalle abgesehen, kommen aber beim ebenen Probleme immer nur zwei, aufeinander senkrechte und zur Z-Axe parallele Schnittrichtungen vor, für die τ verschwindet, auf denen also die gesammte Spannung senkrecht steht und für die zugleich σ' seinen kleinsten und seinen grössten Werth annimmt. Man nennt jene Richtungen die Hauptrichtungen und die zugehörigen Spannungen die Hauptspannungen des Körpers an der betreffenden Stelle.

Es mag hierbei erwähnt werden, dass man dieselbe Betrachtung auch für den allgemeinsten Spannungszustand in gleicher Weise durchführen kann. Die Rechnung wird dann erheblich länger, spielt sich aber sonst genau so ab, wie wir es eben sahen. Man findet dabei, dass im Allgemeinen drei Schnittrichtungen vorkommen, für die die Schubspannungen wegfallen, und dass alle drei wechselseitig aufeinander senkrecht stehen. In der That kann beim ebenen Problem die XY-Ebene als dritte Schnittrichtung angesehen werden, bei der keine Schubspannung übertragen wird. Freilich ist für diesen Schnitt auch die Normalspannung gleich Null und man kann den Fall des ebenen Problems daher auch dahin definiren, dass es jener Spannungszustand ist, für den eine Hauptspannung zu Null wird.

Die Grösse der Hauptspannungen findet man aus Gl. (9) durch Eintragen des durch Gl. (10) oder (11) bestimmten

Werthes von φ. Am einfachsten ist es, zuerst Gl. (10) nach $\sin 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$ aufzulösen. Man erhält dann

$$\sin 2\varphi = \pm \frac{2\tau}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}; \quad \cos 2\varphi = \pm \frac{\sigma_y - \sigma_x}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}$$

Aus Gl. (9) findet man dann weiter

$$\sigma'_{\substack{\max.\\ \min.}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{\frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)^2 + 2\tau^2}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}.$$

und, wenn man beachtet, dass im letzten Bruche der Zähler die Hälfte vom Quadrate des Nenners bildet, kürzer

$$\sigma'_{\substack{\max.\\ \min.}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}. \tag{12}$$

Dass der eine Werth ein Maximum, der andere ein Minimum liefert, kann auf gewöhnlichem Wege durch Bilden des zweiten Differentialquotienten von σ' nach φ nachgewiesen werden; es folgt aber auch schon daraus, dass jede stetige Funktion des Winkels φ, die nicht constant ist, bei einmaligem Umlaufe des ganzen Kreises mindestens ein Maximum und ein Minimum haben muss.

Wenn $\tau = 0$ ist, fallen die Richtungen der Coordinatenaxen mit den Hauptrichtungen zusammen und $\sigma_x\, \sigma_y$ sind selbst die Hauptspannungen. Einander gleich können die Hauptspannungen nur dann werden, wenn zugleich $\tau = 0$ und $\sigma_x = \sigma_y$ ist. Dann kann jede Richtung in der XY-Ebene als Hauptrichtung angesehen werden.

Wir wenden uns jetzt zur Ermittelung der Maximalwerthe der Schubspannungscomponente τ'. Aus Gl. (9) erhalten wir

$$\frac{d\tau'}{d\varphi} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cdot 2\cos 2\varphi - 2\tau \sin 2\varphi \cdot$$

Die Bedingung für ein Maximum oder Minimum wird daher ausgesprochen durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau}. \tag{13}$$

Dieser Werth ist das Negative der Cotangente von 2φ, die aus der Bedingungsgleichung (10) gefunden wird. Daraus folgt, dass der nach Gl. (13) bestimmte Winkel sich von dem aus Gl. (10) abgeleiteten um einen Rechten oder um $\frac{\pi}{2}$ unterscheidet. Die Winkel φ selbst, für die einerseits σ' und andererseits τ' die Maximal- oder Minimalwerthe annehmen, unterscheiden sich demnach um $\frac{\pi}{4}$. Die grössten Schubspannungen erhält man also für solche Schnittrichtungen, die mit den Hauptrichtungen Winkel von 45° einschliessen. Beachtenswerth ist, dass die Normalspannungen auf diesen Ebenen im Allgemeinen nicht verschwinden, wie man auf Grund des Vorausgegangenen hätte vermuthen können. Setzt man 2φ aus Gl. (13) in die erste der Gl. (9), so findet man für die zugehörige Normalspannung $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$, und dieser Werth gilt für jede der beiden zu einander senkrechten Schnittebenen, auf denen τ' zum Maximum oder Minimum wird. Nur wenn $\sigma_x = -\sigma_y$ ist, wird diese Normalspannung zu Null.

Aus Gl. (13) folgt

$$\sin 2\varphi = \pm \frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}}; \quad \cos 2\varphi = \pm \frac{2\tau}{\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}},$$

und wenn man diese Werthe in die zweite der Gleichungen (9) einsetzt, erhält man

$$\tau'_{\substack{\max \\ \min}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}. \tag{14}$$

Die beiden Werthe $\tau'_{\max}$ und $\tau'_{\min}$ unterscheiden sich also nur durch das Vorzeichen von einander. Dieses Ergebniss ist, soweit es sich um die absoluten Grössen handelt, selbstverständlich nach dem in den Gleichungen (4) ausgesprochenen Satze über die Gleichheit der in senkrechten Schnittflächen einander zugeordneten Schubspannungen. Die Vorzeichen dagegen sind in Gleichung (14) gleichgültig, da sie nur durch die willkürliche Festsetzung darüber bedingt sind, in welcher Richtung τ' als positiv gerechnet werden sollte.

§ 5. Der lineare Spannungszustand.

So wie der im vorigen Paragraphen untersuchte ebene Spannungszustand einen besonderen Fall des allgemeinsten Spannungszustandes bildet, kann man einen noch einfacheren Spannungszustand aus dem vorigen dadurch ableiten, dass man nochmals eine der beiden Hauptspannungen gleich Null setzt. Man nehme etwa an, dass die Coordinatenaxen schon von vornherein in die Hauptrichtungen gelegt gewesen seien, setze also $\tau = 0$ und, um auf den linearen Spannungszustand zu kommen, ausserdem noch $\sigma_y = 0$. Die Gleichungen (9) gehen dann über in

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \sigma_x \cdot \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} = \sigma_x \sin^2\varphi \\ \tau' &= \frac{\sigma_x}{2} \sin 2\varphi \end{aligned}\right\} . \qquad (15)$$

Dieser Spannungszustand kommt z. B. vor in der Mitte einer Zugstange, falls sich die Spannkraft gleichmässig über den Querschnitt vertheilt oder in einem Steinwürfel, der einem Druckversuche ausgesetzt wird. Wir merken uns für diesen Fall, dass nach der zweiten der Gleichungen (15) bei ihm die grösste Schubspannung halb so gross ist als die Zug- oder Druckspannung in der Hauptrichtung.

§ 6. Die Spannungsellipse.

Man denke sich beim ebenen Spannungszustande alle möglichen zur Z-Axe parallelen Schnittrichtungen gelegt und die zugehörigen Spannungscomponenten σ' und τ' nach Gl. (9) berechnet. Beide Componenten seien ferner zu ihrer Resultierenden vereinigt, und diese Resultierende ϱ möge in einer besonderen Figur (Abb. 6) und in einem passenden Kräftemassstabe von einem beliebig gewählten Anfangspunkte aus abgetragen werden. Jeder Schnittrichtung wird dann ein Strahl in dieser Figur entsprechen und die Endpunkte aller dieser Strahlen liegen auf einer Curve, von der man beweisen kann, dass sie eine Ellipse ist. Diese Ellipse wird die Span-

nungs-Ellipse genannt; der Mittelpunkt der Ellipse fällt mit dem Ausgangspunkte der Strahlen zusammen.

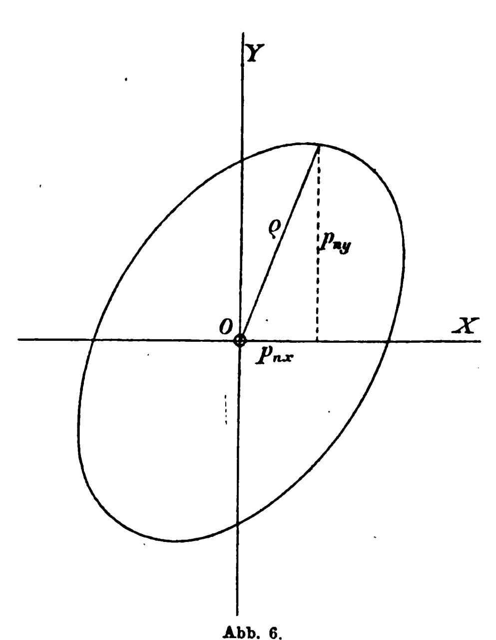


Abb. 6.

Um den Beweis zu führen, denke man sich die Spannung ϱ in zwei Componenten parallel zur X- und Y-Axe, die in Abb. 6 gleiche Richtungen haben wie in der zugehörigen Abb. 5, zerlegt; diese Componenten p_{nx} und p_{ny} bilden in dem Kräftediagramm der Abb. 6 die Coordinaten eines Punktes der gesuchten Curve. Man kann p_{nx} und p_{ny} aus den Gleichungen (9) ableiten, indem man σ' und τ' in Componenten nach den Coordinatenaxen zerlegt. Einfacher ist es aber, beide durch eine besondere Betrachtung aufzusuchen. Zu diesem Zwecke möge das Coordinatensystem von vornherein so gewählt werden, dass die Axen in die Hauptrichtungen des Spannungszustandes fallen. Abb. 5 geht dann über in Abb. 7, die sich von jener dadurch unterscheidet, dass $\tau = 0$ gesetzt, also fortgelassen ist. Eine solche Wahl des Coordinatensystems ist nach dem früher Bewiesenen immer möglich und sie steht uns auch frei, da wir durch nichts behindert sind, das Coordinatensystem so zu legen, dass sich die Rechnungen möglichst vereinfachen. Unter σ_x und σ_y sind daher jetzt die Hauptspannungen zu verstehen.

Die Spannung auf der unter dem Winkel φ gezogenen Seitenfläche des dreiseitigen Prismas ist in Abb. 7 sofort in

die Componenten p_{nx} und p_{ny} gespalten. Die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben liefern

$$p_{nx} = \sigma_x \sin\varphi; \qquad p_{ny} = \sigma_y \cos\varphi$$

und durch Elimination von φ aus beiden erhält man sofort die Gleichung der gesuchten Curve

$$\left(\frac{p_{nx}}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{p_{ny}}{\sigma_y}\right)^2 = 1. \tag{16}$$

Das ist aber in der That die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse mit den Halbaxen σ_x und σ_y. Man sieht auch, dass in Abb. 6 die Ellipse nachträglich ebenfalls so gedacht werden muss, dass ihre Axen in die Coordinatenrichtungen fallen, wenn das Kraftdiagramm zu Abb. 7 gehören soll.

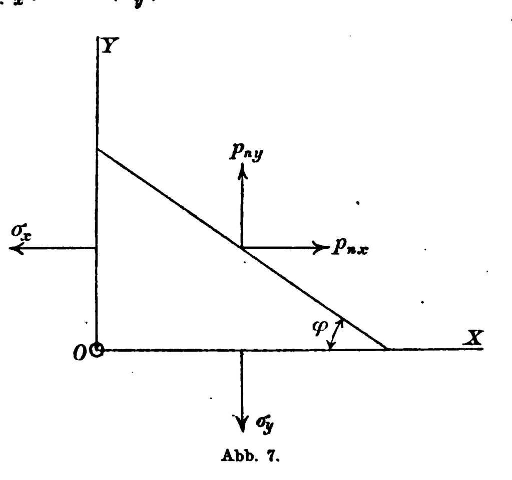


Abb. 7.

Wenn $\sigma_x = \sigma_y$ ist, geht die Spannungsellipse in einen Kreis über; diesem entspricht der schon mehrfach erwähnte Fall, dass jede Richtung als Hauptrichtung angesehen werden kann. Es ist dies ein Spannungszustand, wie er im Innern einer ruhenden Flüssigkeit oder überhaupt im Innern einer reibungsfreien Flüssigkeit, die auch in Bewegung begriffen sein kann, besteht.

Die Spannungsellipse liefert insofern ein anschauliches Bild von dem Spannungszustande, als jede Spannung nach Richtung und Grösse darin verzeichnet ist, die überhaupt bei irgend einer zur Z-Axe parallelen Schnittrichtung auftreten kann. Dagegen vermag man aus ihr nicht zu entnehmen, zu welcher besonderen Schnittrichtung jeder Strahl gehört; nur dass die Hauptaxen auf den zugehörigen Schnittrichtungen

senkrecht stehen, ist von vornherein bekannt. Man kann diesem Uebelstande zwar dadurch abhelfen, dass man noch einen zweiten Kegelschnitt, die „Stellungsellipse“ oder „Stellungshyperbel“ construirt, mit deren Hülfe die Strahlen des Spannungsdiagramms und die ihnen entsprechenden Schnittrichtungen einander zugeordnet werden können. Bei dieser Betrachtung kommt aber nicht viel heraus und ich sehe daher davon ab, sie hier vorzuführen.

Nur darauf will ich noch aufmerksam machen, dass die Spannungsellipse noch in einem andern als dem oben angeführten Falle in einen Kreis übergeht, nämlich dann, wenn die beiden Hauptspannungen von gleicher Grösse und entgegengesetztem Vorzeichen sind. Dieser Fall ist schon in den auf Gl. (13) folgenden Bemerkungen zur Sprache gekommen. Es zeigte sich, dass für die unter 45° zu den Hauptspannungen geneigten Schnittrichtungen die Normalspannungen in diesem Falle verschwinden und aus Gl. (14) folgt, dass die Schubspannungen in diesen Schnittebenen von gleicher Grösse mit den Hauptspannungen sind. Natürlich folgt dies auch aus der Darstellung durch den Spannungskreis selbst. Denkt man sich in diesem Falle den Fahrstrahl des Spannungsdiagramms im Sinne des Uhrzeigers herumgedreht, so dreht sich die zugeordnete Schnittebene im entgegengesetzten Sinne. Bei jeder Stellung, die die Schnittebene einnimmt, ist die gesammte durch sie übertragene Spannung von gleichbleibender Grösse; nur der Winkel, den sie mit der Ebene bildet, verändert sich stetig. Bei zwei zu einander senkrechten Stellungen des Schnitts ist der Winkel ein rechter und bei zwei anderen, ebenfalls zu einander senkrechten und zu jenen unter 45° geneigten Stellungen wird der Winkel zu Null, die Spannung also zu einer reinen Schubspannung.

Mit diesem Falle hat man bei den Anwendungen öfters zu thun. Es ist daher wünschenswerth, eine einfache Bezeichnung für ihn zu haben. Wir wollen ihn den Fall der reinen Schubbeanspruchung nennen, weil man ihn vollständig dadurch kennzeichnen kann, dass man einen kleinen

Würfel abgrenzt, an dem auf vier Seitenflächen ausschliesslich Schubspannungen senkrecht zur Z-Richtung vorkommen, während die beiden zur Z-Axe senkrechten Seitenflächen spannungsfrei sind (Abb. 8). Man muss dabei nur im Auge behalten, dass diese Beschreibung gleichbedeutend mit der anderen ist, dass in den parallel zur Z-Axe gelegten Diagonalebenen Hauptspannungen von gleicher Grösse, aber entgegengesetztem Vorzeichen auftreten. Von dieser Zurückführung der reinen Schubbeanspruchung auf das Zusammenwirken einer Zugspannung in der einen und einer Druckspannung in der anderen der angegebenen Richtungen wird bei den Anwendungen sehr oft Gebrauch gemacht, und es ist daher nützlich, wenn man sich mit dieser Betrachtung recht vertraut macht.

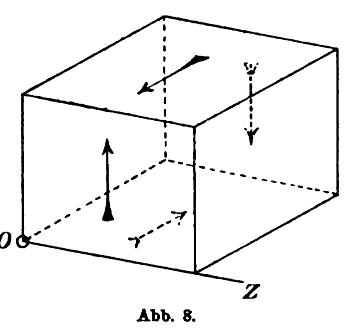


Abb. 8.

Natürlich kann man die Untersuchungen dieses Paragraphen auch auf den allgemeinsten Spannungszustand ausdehnen. Man findet dann auf demselben Wege, dass das Spannungsdiagramm für alle möglichen Schnittstellungen ein Ellipsoid bildet. Die Halbaxen dieses Spannungsellipsoids fallen in die Hauptrichtungen des Spannungszustandes und geben die Grössen der Hauptspannungen an.

Aufgaben.

1. Aufg. Leite die den Gl. (5) entsprechenden Gleichgewichtsbedingungen für das ebene Problem ab!

Lösung. Streicht man die nach den Gl. (8) beim ebenen Problem wegfallenden Spannungen aus den Gl. (5), so gibt die letzte $Z = 0$, d. h. dieser Spannungszustand ist nur möglich, wenn die äussere Kraft senkrecht zu der als Z-Axe bezeichneten Richtung steht (oder wenn die äussere Kraft überhaupt verschwindet) und die beiden ersten Gleichungen liefern

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} + X = 0; \qquad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial x} + Y = 0.$$

Grenzt man ein rechtwinkliges Parallelepiped ab, von dem eine Kantenrichtung mit der Z-Richtung zusammenfällt, und trägt die beim ebenen Problem daran angreifenden Spannungen ein, so kann man die vorstehenden Gleichungen auch unmittelbar aus der Figur ablesen; es wird empfohlen, dies auszuführen.

2. *Aufg. Aus den Gleichungen (6) ist der Werth der Normalcomponenten σ_n der specifischen Spannung p_n zu ermitteln!*

Lösung. Anstatt die Spannung p_n selbst auf die Normale n zu projiciren, kann man, um σ_n zu erhalten, auch ihre drei Componenten nach den Coordinatenaxen auf n projiciren und aus den Projektionen die algebraische Summe nehmen. Dies liefert

$$\sigma_n = p_{nx} \cos(nx) + p_{ny} \cos(ny) + p_{nz} \cos(nz)$$

oder nach Einsetzen der Werthe aus den Gleichungen (6)

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2(nx) + \sigma_y \cos^2(ny) + \sigma_z \cos^2(nz) + 2\tau_{xy} \cos(nx)\cos(ny) + 2\tau_{xz} \cos(nx)\cos(nz) + 2\tau_{yz} \cos(ny)\cos(nz) \cdot$$

3. *Aufg. Eine Welle, die gleichzeitig auf Biegung und auf Verdrehen beansprucht wird, erfahre an der gefährlichsten Stelle eine Biegungsspannung rechtwinklig zum Querschnitt von der Grösse 300 atm und eine Schubspannung infolge der Verdrehung von 400 atm. Wie gross ist $\sigma'_{\max}$ und $\tau'_{\max}$?*

Lösung. Der Spannungszustand ist ein ebener. Die Richtung der Stabaxe wähle man zur Richtung der X-Axe, die Y-Axe lege man in die Richtung der Schubspannung im Querschnitt. Dann ist $\sigma_x = 300$, $\tau = 400$ und $\sigma_y = 0$ in die Gleichungen (12) und (14) einzusetzen. Man erhält $\sigma'_{\max} = +577{,}2$ atm, $\sigma'_{\min} = -277{,}2$ atm, $\tau'_{\max} = 427{,}2$ atm.

Zweiter Abschnitt.

Elastische Formänderung. Beanspruchung des Materials.

§ 7. Das Elasticitätsgesetz.

Die im vorigen Abschnitt aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen zwischen den Spannungscomponenten und alle daraus gezogenen Folgerungen gelten für jeden Körper, gleichgültig wie er sich im Uebrigen verhalten mag, also z. B. auch für einen Sandhaufen, für einen Thonklumpen, für Metalle und Steine, selbst für Flüssigkeiten und Gase. Die dort gefundenen Beziehungen genügen aber nicht, um den Spannungszustand zu berechnen, der unter gegebenen Umständen eintreten muss. Wir fanden nämlich, dass zur vollständigen Beschreibung des Spannungszustandes sechs Spannungscomponenten σ_x σ_y σ_z τ_{xy} τ_{xz} τ_{yz} angegeben werden müssen, während zwischen diesen und den äusseren Kräften XYZ nur die drei Gleichungen (5) bestehen. Der Spannungszustand ist daher in allen Fällen statisch unbestimmt im Sinne von § 1. Man muss, um ihn zu bestimmen, auf den Zusammenhang zwischen den Spannungscomponenten und den Formänderungen eingehen.

Was man damit bezweckt, ist leicht einzusehen. Um die Formänderung eines Körpers zu beschreiben, genügt es nämlich, für jeden Punkt des Körpers drei Zahlenwerthe anzugeben. Die Gestaltänderung ist z. B. vollständig definirt, wenn man angibt, um wie viel sich jeder Punkt in den Richtungen von drei Coordinatenaxen verschoben hat. Kennt man also den Zusammenhang zwischen Gestaltänderung und Spannungs-

zustand, so lassen sich immer die sechs unbekannten Grössen, durch die der Spannungszustand gekennzeichnet wird, auf drei unbekannte Grössen, die die Gestaltänderung beschreiben, zurückführen.

Darauf kommt in der That die Anwendung des Elasticitätsgesetzes immer hinaus. Die Formänderung, die zu ihrer Beschreibung nur drei Variable braucht, kann immer leichter untersucht werden, als der Spannungszustand, in dem sechs von einander unabhängige Veränderliche vorkommen. Zugleich erkennt man aber auch, wie wichtig es ist, die Zahl der unbekannten Grössen grade auf drei vermindern zu können, wenn man sich erinnert, dass zwischen den Spannungscomponenten an jeder Stelle die drei Gleichungen (5) erfüllt sind. Sobald man die Spannungscomponenten in den drei Verschiebungscomponenten, die die Gestaltänderung beschreiben, ausgedrückt und diese Werthe in die Gleichungen (5) eingesetzt hat, stehen uns ebenso viele Gleichungen als Unbekannte zu Gebote. Mit der Lösung dieser Gleichungen wird auch der Spannungszustand bekannt. Freilich macht die wirkliche Auflösung oft unüberwindliche Schwierigkeiten; auf jeden Fall ist aber der Nachweis von Werth, dass die Ausbildung des Spannungszustandes durch die in den Gleichungen (5) und in dem Elasticitätsgesetz ausgesprochenen Bedingungen schon vollständig geregelt ist, dass jede Unbestimmtheit aufhört und dass wir daher nicht nöthig haben, nach neuen Naturgesetzen zu suchen, die uns bisher entgangen wären.

Der gesuchte Zusammenhang zwischen Formänderung und Spannungszustand kann natürlich nur durch die Erfahrung gegeben werden und er ist auch für verschiedene Körper oft wesentlich verschieden. Man gewinnt diese Erfahrung, indem man die Formänderungen an Versuchskörpern misst, die durch abgewogene Belastungen hervorgebracht werden, dabei den Einfluss feststellt, den die Abmessungen des Probestücks auf den Zusammenhang zwischen Formänderung und Belastung haben und so zu einem Schlusse darüber gelangt, welche Formänderungen bei einem unendlich kleinen Parallelepiped, auf

dessen Oberfläche gegebene Kräfte wirken, zu erwarten sind. Erst nachdem man die Messungsergebnisse bis zu diesem Schlusse hin verarbeitet hat, ist die Grundlage gewonnen, auf der sich alle weiteren Untersuchungen der Festigkeitslehre aufbauen müssen.

Einer der häufigst vorgenommenen Versuche dieser Art besteht darin, dass man einen Eisenstab von rundem Querschnitt mit etwa 20 bis 25 mm Durchmesser und gegen 300 mm Länge, der an beiden Enden mit Köpfen versehen ist, in eine Festigkeitsmaschine einspannt und ihn einer allmählich anwachsenden Zugbelastung unterwirft. Zugleich misst man die Dehnung, die eine in der Mitte des Stabes gelegene Messstrecke von 100 bis 150 mm Länge erfährt. Anfänglich sind diese Dehnungen zu klein, um sie mit dem Zirkel abmessen zu können. Man muss sich daher einer Feinmessvorrichtung bedienen. Bauschinger hat für diesen Zweck einen Spiegelapparat construirt, mit dessen Hülfe man die Längenänderungen der Messstrecke bis auf etwa $^1/_{10000}$ mm genau beobachten kann. Abb. 9 zeigt die Anordnung dieses Apparates in schematischer Darstellung. S ist der Stab, an dem von zwei Seiten her bei A zwei etwas federnde Stangen F festgeklemmt werden, während die freien Enden von F mit geringem Druck an zwei Hartgummiröllchen R anliegen. Diese Röllchen sind auf Spitzen in einem Rahmen gelagert, der an das andere Ende der Messstrecke bei B festgeklemmt ist. Wenn der Stab gezogen wird, verlängert sich die Messstrecke AB und die Federn F setzen dabei die Röllchen R in Drehung. Mit jedem Röllchen ist ein Spiegel fest verbunden, der in der Zeichnung weggelassen ist. Auf jeden Spiegel ist ein Fernrohr mit Fadenkreuz gerichtet, das in etwa 1500 bis 2000 mm Entfernung von dem Spiegel aufgestellt ist. Am Gestell der Fernrohre wird ein Massstab befestigt, dessen Bild man im Spiegel beobachtet. Sobald sich der Spiegel ein wenig dreht, verschiebt sich das Bild des Massstabes gegen das Fadenkreuz im Fernrohre, und man sieht

Abb. 9.

leicht ein, wie man aus der Grösse der abgelesenen Verschiebung auf die Drehung des Spiegels und daher auf die Verlängerung der Messstrecke schliessen kann. Wesentlich ist bei dieser Einrichtung, dass zwei Spiegel verwendet werden. Beide drehen sich nämlich, wie man aus der Abbildung erkennt, in entgegengesetzten Richtungen und im allgemeinen um gleiche Beträge. Es kann aber leicht vorkommen, dass bei der Ausführung des Versuchs sich auch der Stab im Ganzen etwas dreht, indem sich etwa die Anlage des Stabs an den Köpfen etwas ändert oder auch in Folge von Verschiebungen oder Formänderungen der Theile der Festigkeitsmaschine selbst. Wenn man nur einen Spiegel verwendete, würde diese Drehung des ganzen Stabes zu unrichtigen Schlüssen über die Längenänderung der Messstrecke verleiten. Bei zwei Spiegeln wird dagegen in Folge einer solchen Drehung die Ablesung des einen Spiegels um ebensoviel vergrössert als die andere verkleinert wird und das Mittel aus beiden Ablesungen gibt daher den wahren Betrag der Längenänderung der Messstrecke an.

Auf dieselbe Art kann man auch die Verkürzung eines Probestückes beobachten, das einer Druckbelastung unterworfen wird; auf andere Versuchsanordnungen, die ähnlichen Zwecken dienen, kann hier nicht eingegangen werden.

Bei einem Flusseisenstab, der einem solchen Versuch unterworfen wird, zeigt sich, dass die Längenänderungen in demselben Verhältnisse anwachsen wie die Belastungen, so lange diese nicht zu gross sind. Ausserdem findet man, dass die Messstrecke nach Entfernung der Belastung genau wieder die ursprüngliche Länge annimmt. Ebenso verhalten sich Probekörper aus Stahl und auch solche aus Holz. Andere Stoffe zeigen dagegen ein abweichendes Verhalten. Die Eigenschaft des Stoffes, die wir bei solchen Versuchen feststellen, wird als Elasticität bezeichnet. Da die Bezeichnung „elastisch“, namentlich wenn ein Gradunterschied (mehr oder wenig elastisch) ausgedrückt werden soll, nicht immer folgerichtig gebraucht wird, gebe ich zunächst die Abgrenzung dieses Begriffes in folgenden Sätzen:

1) Elasticität ist allgemein die Fähigkeit eines Körpers, Formänderungsarbeit in umkehrbarer Weise aufzuspeichern.
2) Vollkommen elastisch verhält sich ein Körper bei einem gewissen Vorgange, wenn man die ihm durch äussere Kräfte zugeführte Formänderungsarbeit vollständig wieder in Form von mechanischer Energie aus ihm zurückgewinnen kann.
3) Der Grad der Elasticität eines nicht vollkommen elastischen Körpers wird durch das Verhältniss der in umkehrbarer Weise aufgespeicherten zu der gesammten ihm bei dem betrachteten Vorgange durch die äusseren Kräfte zugeführten Energie bestimmt.
4) Kein Körper ist gegenüber allen Vorgängen, denen man ihn unterwerfen kann, vollkommen elastisch; ist er es bis zu einer gewissen Grenze hin und darüber hinaus nicht mehr, so wird diese Grenze als Elasticitätsgrenze bezeichnet (Abkürzung für die ausführlichere Bezeichnung „Grenze der vollkommenen Elasticität").
5) Die Elasticitätsgrenze ist nicht zu verwechseln mit der Proportionalitätsgrenze, die nur bei solchen Körpern in Betracht kommt, für die innerhalb eines gewissen Bereiches das Hookesche Gesetz der Verhältnissgleichheit zwischen Spannung nnd Formänderung gültig ist.

Diese Festsetzungen über den Wortgebrauch gründen sich auf den Begriff der Formänderungsarbeit. Darunter ist natürlich die Arbeit zu verstehen, die von den äusseren Kräften an dem Probestück geleistet werden muss, um es in den gespannten Zustand zu versetzen. Bei dem Zugversuche, von dem vorher die Rede war, ist die Formänderungsarbeit, die zu einem gegebenen Spannungszustand gehörte, gleich dem Mittelwerthe des von der Maschine während der Verlängerung ausgeübten Zuges, multiplicirt mit der erreichten Dehnung oder in Zeichen

$$A = \int_0^x P dx, \tag{17}$$

wenn die Zugkraft mit P, die Dehnung mit x und die Formänderungsarbeit mit A bezeichnet wird.

„Umkehrbar" wird im ersten Satze, wie in allen Theilen der Physik ein solcher Vorgang genannt, der auch in entgegengesetzter Richtung unter sonst gleichen Bedingungen durchlaufen werden kann. Die Umkehrung des Zugversuchs ist die Zusammenziehung des Probestabs beim Abnehmen der Belastung. Damit die Formänderungsarbeit umkehrbar aufgespeichert sei, muss der Stab bei allmählichem Abtragen der Belastung dieselbe Arbeit wieder nach aussen hin abgeben, die ihm zuerst zugeführt wurde. Damit dies auch bei jedem Zwischenzustande zutreffe, muss $dA = Pdx$, ebensowohl bei der Belastung als bei der Entlastung sein, wobei im letzteren Falle dx negativ zu rechnen ist. Mit andern Worten heisst dies auch, dass jedem gegebenen Zustande eine bestimmte Kraft P zugeordnet sein muss, gleichgültig ob dieser Zustand dadurch erreicht wird, dass man vom spannungslosen Zustande durch allmähliche Steigerung der Belastung zu ihm gelangt, oder ob er durch die Verminderung einer vorher aufgebrachten grösseren Belastung erreicht wird.

Solange die Belastung des vorher betrachteten Flusseisenstabs auf den qcm. des Querschnitts nicht über etwa 1800 kg. hinausgeht (die Grenze liegt bei einzelnen Eisensorten etwas verschieden), erweist er sich bei dem Zugversuche als so vollkommen elastisch, als dies die Genauigkeit der Messung überhaupt erkennen lässt. Bei gegossenen Metallen, namentlich bei Gusseisen, ferner bei Steinen, Cementkörpern und ähnlichen Stoffen trifft dies anfänglich nicht zu. Beim Abtragen der Belastung entspricht einer bestimmten Länge der Messstrecke eine kleinere Kraft als bei dem vorausgegangenen Aufbringen der Last. Die zugeführte Formänderungsarbeit wird also nur zum Theil wieder nach aussen hin abgegeben; der Rest dieser Energie hat zur Herstellung einer bleibenden Zustandsänderung gedient, wie man daraus erkennt, dass der Stab seine ursprüngliche Länge nicht wieder vollständig erreicht.

Sobald man aber die gleiche Belastung öfters aufgebracht und wieder entfernt hat, stellt sich auch bei diesen Stoffen nach und nach ein gleichbleibendes Verhalten ein, in dem sie sich

ebenfalls in dem vorher erörterten Sinne als nahezu vollkommen elastisch erweisen. Bei den Untersuchungen der Festigkeitslehre ist es in der Regel nicht nöthig, auf diese anfänglichen Erscheinungen Rücksicht zu nehmen, da der Spannungszustand, auf dessen Ermittelung es gewöhnlich ankommt, nur nach dem elastischen Theile der Formänderung, der bei Wegnahme der Belastung wieder verschwindet, zu beurtheilen ist.

Auch die Zeit, während der die Belastung getragen wird, ist nicht ohne Einfluss auf die Formänderung des Körpers. Bei den zuletzt besprochenen Körpern, Steinen u. s. f. vergrössert sich die Formänderung allmählich noch etwas, wenn man die Belastung längere Zeit einwirken lässt, namentlich dann, wenn diese Körper nicht vorher schon in den zuvor erwähnten constanten Zustand durch mehrmaligen Belastungswechsel gebracht sind. Besonders deutlich spricht sich der Einfluss der Zeit bei solchen Körpern wie Seile, Riemen, Fäden und Gewebe aus. Auch dann, wenn die Belastung wieder entfernt wird, nimmt der Körper nicht augenblicklich seine definitive Gestalt an, sondern die Formänderungen dauern manchmal noch längere Zeit fort. Zugleich ist das Verhalten des Körpers gegen eine neu vorgenommene Belastung abhängig von den Vorgängen, denen er vorher unterworfen war, und auch von der Zeit, die seitdem verstrichen ist. Man fasst alle diese Erscheinungen unter der Bezeichnung der elastischen Nachwirkung zusammen. Sorgfältig untersucht sind diese Nachwirkungen besonders für Seidenfäden, wie sie zum Aufhängen von Magneten u. s. w. in physikalischen Instrumenten gebraucht werden. Bei den Stoffen, aus denen die Constructionen der Bau- und Maschineningenieure hergestellt werden, sind sie noch wenig erforscht. Glücklicherweise treten sie aber (abgesehen von den zuvor erwähnten Treibriemen, Hanfseilen u. s. f.) hier auch nur wenig hervor. Jedenfalls sind sie bei allen Stoffen, die auf Grund der vorher beschriebenen Versuche als „vollkommen elastisch“ befunden werden, ganz belanglos und es ist daher nicht gebräuchlich und auch nicht nöthig, in der Festigkeitslehre näher darauf einzugehen. Gewalztes Eisen

und Stahl zeigen zwar ebenfalls sehr deutliche elastische Nachwirkungen, wenn sie über die Elasticitätsgrenze hinaus belastet wurden; in den Constructionen vermeidet man solche Beanspruchungen aber fast immer und man kommt daher praktisch nicht leicht in die Lage, sich um die Nachwirkungen kümmern zu müssen.

Ein Zugversuch und ebenso ein Druckversuch mit Flusseisen zeigt, wie schon vorher erwähnt, dass die Längenänderungen unterhalb der Elasticitätsgrenze den Belastungen proportional sind. Zugleich findet man, dass die Aenderung der Messstrecke der ursprünglichen Länge proportional und bei gleicher Belastung dem Querschnitt des Versuchsstabes umgekehrt proportional ist. Als specifische Dehnung (oder Verkürzung) wollen wir die Längenänderung Δl getheilt durch die ursprüngliche Länge l bezeichnen und dafür stets den Buchstaben ε gebrauchen. Diese specifische Dehnung ist nur noch von der specifischen Spannung σ und dem Materiale abhängig und das Ergebniss des Versuches kann in der Gleichung

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \alpha\sigma \tag{18}$$

ausgesprochen werden. Die Constante E heisst der Elasticitätsmodul des Materials, der reciproke Werth davon, α, der Dehnungs-Coefficient. Die specifische Dehnung ist als Verhältniss zweier Längen eine unbenannte Zahl, d. h. sie hat die Dimension Null. Daraus folgt, dass E eine Grösse von der gleichen Art wie σ sein muss, also eine specifische Spannung bedeutet und etwa in atm. (d. h. in Kilogrammen auf ein qcm.) ausgedrückt werden kann. Da ε innerhalb der Elasticitätsgrenze, d. h. so lange die Gleichung gilt, immer nur ein kleiner Bruch ist, muss E ein sehr grosser Werth sein. Für Schweisseisen ist E etwa gleich 2000000 atm, für Flusseisen etwa 2200000, für Stahl bis zu etwa 2400000 atm, und zwar gleichgültig ob es sich dabei um Zug oder Druck handelt.

Will man nicht mit den specifischen Dehnungen und Spannungen, sondern mit den ganzen Beträgen rechnen, so kann Gl. (18) auch in der Form

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{EF} \tag{19}$$

ausgesprochen werden, in der P die ganze auf den Querschnitt F kommende Kraft bedeutet.

Früher glaubte man und auch jetzt nimmt man zuweilen noch fälschlich an, dass Gl. (18) oder (19) für jedes Material genau zutreffe. Das durch diese Gleichungen ausgesprochene Gesetz wurde als das Elasticitätsgesetz bezeichnet. Da dieses Gesetz aber nicht allgemein gültig ist, gebraucht man besser eine weniger allgemeine Bezeichnung dafür. Es soll daher das Hooke'sche Gesetz genannt werden, da es zuerst von dem Physiker Hooke in der Form „ut tensio sic vis" aufgestellt wurde.

Oft versteht man freilich unter dem Elasticitätsgesetze noch eine etwas weitere Fassung, die die aus dem einfachen Zug- oder Druckversuche abgeleiteten Formeln (18) und (19) als besonderen Fall in sich schliesst. Offenbar sind diese Formeln nämlich zunächst nicht geeignet, den Zusammenhang zwischen Formänderung und Spannungszustand im allgemeinsten Falle oder selbst nur im Falle des ebenen Problems darzustellen, da sie nur aus einer Beobachtung des einfachsten, nämlich des linearen Spannungszustandes gewonnen sind. Die Aussage muss zu diesem Zwecke vielmehr dahin ergänzt werden, dass jede folgende Formänderung, so lange die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird, nur von der neu hinzugekommenen Belastung abhängig ist, dass also einer Uebereinanderlagerung verschiedener Spannungszustände auch eine einfache Zusammenfügung der zu jedem einzelnen Spannungszustande für sich genommen gehörigen Formänderungen entspricht. Eine Bestätigung dieses erweiterten Satzes, den wir als das Gesetz der Superposition bezeichnen wollen, durch unmittelbare Messung ist nicht so leicht durchführbar; eine mittelbare Bestätigung liegt aber für alle Körper, die dem Hooke'schen Gesetze gehorchen insofern vor, als die daraus gezogenen Schlüsse mit der Erfahrung übereinstimmen.

Auch nach einer anderen Richtung bedürfen die vorigen

Aussagen noch einer wichtigen Ergänzung. Beim linearen Spannungszustande erfährt nämlich, wie die unmittelbare Beobachtung lehrt, der Probestab nicht nur in der Richtung der von Null verschiedenen Hauptspannung eine Längenänderung, sondern auch eine von entgegengesetztem Vorzeichen in jeder Querrichtung. Der Querschnitt eines auf Zug beanspruchten Stabes zieht sich zusammen. Man bezeichnet diese Erscheinung als die Quercontraction. Das Umgekehrte erfolgt bei Druckbelastung. Auch die Querdehnung (positiv oder negativ) ist innerhalb der Elasticitätsgrenze der Belastung proportional, und sie bildet daher immer einen von dem Materiale abhängigen bestimmten Bruchtheil der Längsdehnung (negativ oder positiv). Das Verhältniss zwischen beiden specifischen Längenänderungen werde ich in der Folge stets mit $\frac{1}{m}$ bezeichnen oder, wenn zugleich das entgegengesetzte Vorzeichen zum Ausdruck gebracht werden soll, mit $-\frac{1}{m}$. Bei den meisten Materialien liegt das Verhältniss zwischen $\frac{1}{3}$ und $\frac{1}{4}$, gewöhnlich nimmt man bei Eisen $m = 3\frac{1}{3}$, also das Verhältniss gleich $\frac{3}{10}$ an. Auf Grund einer Hypothese, die den Spannungszustand aus Molekularkräften herzuleiten suchte, hatte Poisson das Verhältniss zu $\frac{1}{4}$ berechnet. Diese Ziffer wurde aber durch die Beobachtung nicht bestätigt; immerhin wird die Verhältnissziffer, so wie sie der Wirklichkeit entspricht, heute noch oft als die Poisson'sche Constante bezeichnet.

Bei der Superposition der Formänderungen, die verschiedenen sich übereinander lagernden Spannungszuständen entsprechen, muss natürlich auch auf die Querdehnung oder Quercontraction überall Rücksicht genommen werden.

Wir wollen jetzt noch die Körper etwas näher ins Auge fassen, bei denen das elastische Verhalten nicht mit dem Hooke'schen Gesetze übereinstimmt. Die Abbildungen (10) und (11) geben Versuchsergebnisse wieder, die ich bei der Prüfung von grossen Stäben aus Granit bezw. Sandstein auf

Zug und auf Druck erhielt. Die Querschnitte der Stäbe waren Rechtecke von 20 × 30 cm. Seitenlänge; vorausgehende Versuche hatten nämlich gezeigt, dass es nöthig ist, Abmessungen

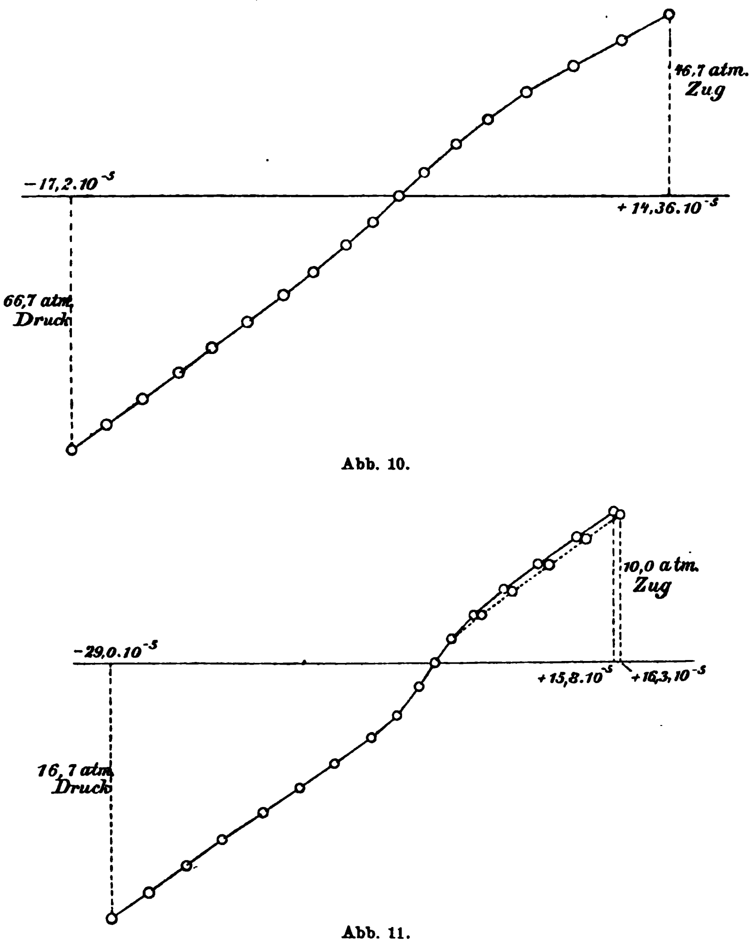


Abb. 10.

Abb. 11.

von solcher Grösse zu wählen, wahrscheinlich weil bei der Bearbeitung der Steine mit den gewöhnlichen Steinmetzwerkzeugen eine Lockerung der oberflächlichen Schichten eintritt, die die Resultate bei Probekörpern von kleinerem Querschnitte zu stark beeinflusst. Bei grossen Querschnitten machen diese

Oberflächenschichten im Verhältnisse zur ganzen Querschnittsfläche weniger aus. Die Abscissen stellen die beobachteten specifischen Dehnungen nach rechts hin vom Nullpunkte, die Verkürzungen bei den Druckversuchen nach links hin dar und die Ordinaten geben die zugehörigen specifischen Spannungen an, wobei Zugspannungen nach oben hin, Druckspannungen nach unten hin abgetragen wurden. Ehe eine Ablesung erfolgte, wurden die Steine durch wiederholte Belastung zuvor in einen constanten Zustand übergeführt, so dass sie sich bei dem Versuche vollkommen elastisch verhielten.

Auf der Zugseite der Abb. 11, die für den Sandstein gilt, ist neben der ausgezogenen Linie noch eine zweite punktirt eingetragen. Diese wurde zuerst erhalten und die ausgezogene dann, als der Stein nach den ersten Versuchen, durch die er stark auf Zug beansprucht worden war, eine 15stündige Ruhepause durchgemacht hatte. Der Unterschied zwischen beiden Linien gibt das Mass der elastischen Nachwirkung an. Dieser Unterschied ist hier ziemlich erheblich, offenbar wegen der Höhe der vorausgegangenen Zugbelastung, die nicht sehr weit von der Bruchbelastung entfernt war.

Für Körper, die dem Hooke'schen Gesetze folgen, gibt eine Darstellung dieser Art eine gerade Linie. Bei den Steinen ist aber, wie man sieht, die Curve S-förmig gekrümmt, anscheinend mit einem Wendepunkt im Ursprunge. Die elastischen Längenänderungen ε wachsen sowohl bei Zug- als bei Druckbelastung schneller als die zugehörigen Spannungen.

Eine freilich nicht auf genaue Versuche gestützte, aber auch heute noch ziemlich weit verbreitete Meinung geht dahin, dass Steine sowohl für Zug- als für Druckbelastung ungefähr dem Hooke'schen Gesetze gehorchten, dass aber der Elasticitätsmodul für Zug und für Druck verschieden gross anzunehmen sei. Wenn dies richtig wäre, müssten die Curven in den vorausgehenden Abbildungen durch zwei grade Linien ersetzt werden können, die im Ursprunge unter verschiedenen Neigungen gegen die Abscissenaxe zusammenstiessen. Ein Blick auf die Abbildungen lehrt aber, dass dies durchaus nicht zutrifft und

dass daher allen Rechnungen, die von einer solchen Annahme ausgehen, jeder praktische Werth abzusprechen ist.

Um das Elasticitätsgesetz für solche Körper, wie sie hier in Frage kommen, durch eine Formel auszusprechen, muss man an Stelle von Gl. (18) allgemeiner

$$\varepsilon = f(\sigma) \tag{20}$$

setzen, wo f irgend eine Function ist, deren Verlauf hinreichend genau mit jenen Abbildungen übereinstimmt. Der Begriff des Elasticitätsmoduls verliert hier seine ursprüngliche Bedeutung. Da man aber daran gewöhnt ist, das Verhalten der dem Hooke'schen Gesetze gehorchenden Körper als das normale zu betrachten, Gl. (20) oder die Abb. (10) und (11) daher stets mit Gl. (18) bezw. mit den gradlinigen Darstellungen zu vergleichen, spricht man indessen auch bei Steinen von einem Elasticitätsmodul, der nun freilich eine neue Definition erhalten muss. Unglücklicherweise gibt es zwei ganz von einander verschiedene Grössen, von denen bald die eine, bald die andere als Elasticitätsmodul bezeichnet wird, ohne dass man immer aus dem Zusammenhange sofort erkennen könnte, welche von beiden eigentlich gemeint ist.

Differentiirt man nämlich Gl. (20) nach σ, so erhält man, wenn der Differentialquotient der Funktion f durch einen angehängten Accent bezeichnet wird

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{f'(\sigma)} \tag{21}$$

und der Werth auf der rechten Seite geht für den Fall des Hooke'schen Gesetzes in den Elasticitätsmodul über. Man überträgt daher häufig diese Bezeichnung auch allgemein auf den reciproken Werth von $f'(\sigma)$. Diese Grösse kann auch geometrisch erläutert werden mit Hülfe der Richtung einer Tangente, die an die Curven der Abb. (10) oder (11) im Punkte ε, σ gelegt wird.

Andererseits findet man aus Gl. (20) auch

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{f(\sigma)}. \tag{22}$$

Auch dieser Werth geht in den Elasticitätsmodul über, wenn das Hooke'sche Gesetz gilt; mit demselben Rechte wie vorher kann daher die Bedeutung des Wortes „Elasticitätsmodul“ dahin verallgemeinert werden, dass es den Werth des Verhältnisses $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ angeben soll. Geometrisch wird dieser Werth durch die Richtung der Sehne erläutert, die man vom Anfangspunkte zum Punkte ε, σ ziehen kann. Natürlich stimmen beide Deutungen des Wortes keineswegs mit einander überein, da die Richtung der Sehne von der Richtung der Tangente abweicht. In jedem Falle ist übrigens der „Elasticitätsmodul“ keine Constante mehr, sondern eine Function von σ.

Bei meinen eigenen experimentellen Untersuchungen habe ich mich immer dafür entschieden, den Elasticitätsmodul im Sinne von Gl. (22) zu gebrauchen, also das Verhältniss $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ darunter zu verstehen. Dies geschah, weil man auf diese Weise unmittelbar von der Formänderung auf die Spannung umrechnen kann oder umgekehrt, und weil dies der Hauptgebrauch ist, den man von dem Elasticitätsmodul zu machen hat. Natürlich muss jeder Angabe des Elasticitätsmoduls hinzugefügt werden, auf welches Spannungsintervall sie sich bezieht.

Für sehr kleine Werthe von σ und ε decken sich übrigens beide Definitionen hinreichend genau, um die einen durch die anderen ersetzen zu können. Man könnte auch geradezu den Elasticitätsmodul als den Werth

$$E = \left(\frac{1}{f'(\sigma)}\right)_{\sigma=0} = \left(\frac{\sigma}{f(\sigma)}\right)_{\sigma=0} \qquad (23)$$

definiren und würde dann wieder eine Constante erhalten. Bei manchen Erscheinungen, die man in der Elasticitätslehre untersucht, z. B. bei den Schallschwingungen kommen nur kleine Formänderungen und Spannungen in Betracht und in solchen Fällen kann man mit Vortheil von der Definition in Gleichung (23) Gebrauch machen. Ausserdem kann man auch durch Versuche über die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des

Schalles in festen Körpern den durch Gl. (23) definirten Werth von E direct bestimmen.

Für die weitere Verwendung ist es nützlich, die Form der Function f in Gl. (20) so zu bestimmen, dass sie sich hinreichend genau den Versuchsergebnissen anschliesst. Herr Schüle, ein Schüler des Herrn v. Bach, hat auf des Letzteren Veranlassung einen Versuch nach der Richtung hin unternommen, mit dessen Ergebniss Herr v. Bach sich einverstanden erklärt hat.*) Herr Schüle fand, dass die Beziehung

$$\varepsilon = \alpha \sigma^m \tag{24}$$

„die gesuchte Gesetzmässigkeit innerhalb des für die ausführende Technik in Betracht kommenden Spannungsgebietes befriedigend zum Ausdruck bringt.“ Die Constanten α und m wurden aus zahlreichen Versuchen Bachs für eine Reihe von Materialien nach der Methode der kleinsten Quadrate ermittelt. Für Zug- und Druckelasticität sind beide Constanten gesondert bestimmt. Ich erwähne hier nur, dass für ein bestimmtes Gusseisen

$$\text{für Zug} \quad : \quad \alpha = \frac{1}{1\,381\,700}, \quad m = 1{,}0663,$$

$$\text{für Druck}: \quad \alpha = \frac{1}{1\,132\,700}, \quad m = 1{,}395$$

gefunden wurden. Die Spannungen σ in Gl. (24) sind in atm auszudrücken. Für den Elasticitätsmodul im Sinne von Gl. (21) erhält man aus Gl. (24)

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{\alpha m \sigma^{m-1}},$$

ferner im Sinne von Gl. (22)

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1}{\alpha \sigma^{m-1}}$$

und im Sinne von Gl. (23)

$$E = \infty.$$

*) Zeitschr. d. Vereins Deutscher Ingenieure, Jahrg. 1897, S. 249.

Eine andere Interpolationsformel ist von Herrn Lang*) vorgeschlagen worden. Diese gibt E als Function von σ an, berücksichtigt auch die kleinen Veränderungen, die durch Temperaturänderungen des Körpers im elastischen Verhalten hervorgebracht werden. Sieht man von diesen ab, so lautet die Lang'sche Formel

$$E = E_0 - c\sigma. \tag{25}$$

Der Elasticitätsmodul E ist dabei anscheinend im Sinne von Gl. (21) genommen.

Beide Formeln werden den Erfahrungsthatsachen insoferne gerecht, als sie ein rascheres Anwachsen der Dehnungen als der Spannungen anzeigen. Welche von ihnen als Interpolationsformel den Vorzug verdient, ist einstweilen nicht zu entscheiden. Dazu wäre es nöthig, auch die Constanten der Lang'schen Formel nach der Methode der kleinsten Quadratsummen aus den Zahlenwerthen der Bach'schen Versuche zu bestimmen und die Uebereinstimmung beider Formeln mit diesen Zahlen zu vergleichen.

Ein theoretisches Bedenken lässt sich gegen die Schüle'sche Formel indessen nicht unterdrücken. Es besteht darin, dass die Constante α in Gl. (24) eine Grösse ist, von der man von vornherein gar nicht wissen kann, welche physikalische Dimension ihr beizulegen ist. Von der Dimension $cm^2/kg.$, wie ein Dehnungscoefficient, kann sie natürlich nur dann sein, wenn $m = 1$ ist. Wollte man diese Bedeutung von α ein für alle Male festhalten, so wäre Gl. (24) überhaupt nicht mehr homogen in Bezug auf die Dimensionen, hätte also keinen physikalischen Sinn. Nachdem der Exponent m bestimmt ist, der selbstverständlich nur eine absolute Zahl sein kann, folgt zwar die Dimension von α, sie lässt sich aber nur in gebrochenen Potenzen der Längen- und Krafteinheit ausdrücken und α kann dann mit anderen physikalischen Grössen nicht verglichen werden. Das Bedenklichste dabei ist, dass die Dimension von α von einer Materialsorte zur anderen wech-

*) Deutsche Bauzeitung, Jahrgang 1897, S. 58.

seln würde. — Auch die andere Folgerung, dass für $\sigma = 0$ der Elasticitätsmodul unendlich gross würde, ist bedenklich genug. Ein Material, für das Gl. (24) streng zutreffen würde, müsste sich akustisch ganz anders verhalten, als die Erfahrung dies lehrt. Ausserdem genügt auch ein Blick auf die Abb. (10) und (11), um sich zu überzeugen, dass ein senkrechter Durchschnitt der Curven mit der Abscissenaxe kaum annehmbar ist.

Gl. (24) kann daher jedenfalls nur die Bedeutung einer Interpolationsformel in Anspruch nehmen; als allgemeine Grundlage für die mathematische Theorie der Elasticität solcher Körper eignet sie sich nicht. Eher könnte dies von der Lang'schen Formel zutreffen. In ihr ist der Coefficient c eine absolute Zahl. Lang gibt auf Grund eines Vergleiches seiner Formel mit zahlreichen ihm bekannten Versuchen an, dass dieser Coefficient bei Steinen bis auf 200 anwachsen kann; für Körper, die dem Hooke'schen Gesetze gehorchen, ist $c = 0$ zu setzen. Für σ ist übrigens in Gl. (25) der Absolutwerth einzusetzen, so dass also auch für Druckspannungen E mit wachsender Beanspruchung abnimmt. — Unter der Voraussetzung, dass Herr Lang unter E den im Anschluss an Gl. (21) definirten Elasticitätsmodul versteht, folgt übrigens aus Gl. (25) durch Integration

$$\varepsilon = \frac{1}{c} \lg \frac{E_0}{E_0 - c\sigma}, \tag{26}$$

während im anderen Falle, d. h. im Anschlusse an Gl. (22)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_0 - c\sigma} \tag{27}$$

folgen würde.

Weitergehende Schlüsse sind bisher in der Festigkeitslehre immer nur an das Hooke'sche Gesetz und nicht an das durch die Abb. (10) u. (11) oder durch die Schüle'sche oder die Lang'sche Formel dargestellte Elasticitätsgesetz geknüpft worden. Wenn man dies überhaupt ausführen wollte, würde man übrigens die genannten Formeln auch noch in der Weise ergänzen müssen, dass man noch eine Angabe über die Quer-

contraction oder Querdehnung machte (denn auch die Poisson'sche Verhältnissziffer $\frac{1}{m}$ ist bei solchen Materialien veränderlich) und dass man ferner festsetzte, was an die Stelle des Superpositionsgesetzes treten soll, wenn zwei lineare Spannungszustände mit verschiedener Hauptrichtung zusammen wirken.

Indessen erscheint es ziemlich aussichtslos, auf einem solchen Wege jemals zu genaueren Aufschlüssen über das Verhalten jener Körper zu gelangen. Schon bei den einfachsten Betrachtungen häufen sich die blossen Rechenschwierigkeiten in solchem Masse, dass die Arbeit nicht mehr lohnend erscheint. Es wird sich daher auch für die Folge am meisten empfehlen, die allgemeineren Untersuchungen nur unter der Voraussetzung der Gültigkeit des Hooke'schen Gesetzes durchzuführen. Man muss dabei eingedenk sein, dass die erlangten Resultate für Gusseisen, Steine u. s. f. nicht genau zutreffen werden und muss nachträglich — am besten durch einen unmittelbaren Versuch oder, wenn dieser nicht durchführbar ist, durch Benutzung der Schüle'schen oder der Lang'schen Formel u. s. f. — festzustellen suchen, wie weit die Wirklichkeit von den errechneten Resultaten abweicht.

Dass ein zweckmässig angelegter und sorgfältig durchgeführter Versuch mehr Beweiskraft hat, als eine theoretische Entwickelung, soll hier noch ausdrücklich ausgesprochen werden. Man hat dies in technischen Kreisen lange Zeit hindurch verkannt, die Anstellung von Versuchen unterlassen und nur auf die herkömmliche Berechnung vertraut. Heute hat sich das Blatt gewendet; es ist aber ebenso ungerechtfertigt, wenn man, wie es nun zuweilen geschieht, die theoretischen Betrachtungen geringschätzig beurtheilt. In der That kann vielmehr ein Versuch nur von Jenem zweckmässig angelegt und richtig gedeutet und verwerthet werden, der die Theorie beherrscht.

§ 8. Einfache Längsspannung und einfache Schubspannung.

Für ein Material, das dem Hooke'schen Gesetze gehorcht, haben wir nach dem Vorhergehenden einen Zusammenhang zwischen elastischer Formänderung und Spannungszustand, der für die beiden einfachsten Fälle hier noch einmal übersichtlich angegeben werden soll. — Für den Fall der einfachen Längsspannung (linearer Spannungszustand) geht ein in der Hauptrichtung herausgeschnittenes unendlich kleines Parallelepiped in die durch punktirte Linien in Abb. 12 angedeutete Gestalt über und mit Rücksicht auf die in diese Abbildung eingeschriebenen Bezeichnungen hat man

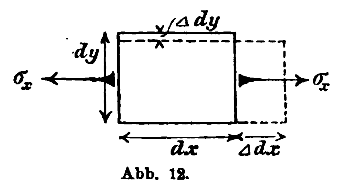


Abb. 12.

$$\triangle dx = \alpha\, dx\, \sigma_x = \frac{1}{E} dx\, \sigma_x \tag{28}$$

oder auch, unter Einführung der specifischen Dehnung ε_x

$$\varepsilon_x = \frac{\triangle dx}{dx} = \frac{\sigma_x}{E}. \tag{29}$$

Zugleich tritt eine Querverkürzung ε_y auf, die nach jeder Querschnittsrichtung gleich ist und

$$\varepsilon_y = \frac{\triangle dy}{dy} = -\frac{1}{m}\frac{\sigma_x}{E} \tag{30}$$

gesetzt werden kann.

Wenn sich das Material, wie seither schon stillschweigend überall vorausgesetzt wurde, nach allen Richtungen gleich verhält, oder wenn es, wie man in diesem Falle sagt, isotrop ist, hat E für jede Längsrichtung und m für jede Querrichtung den gleichen Werth. Das elastische Verhalten des Stoffes wird daher durch diese beiden Constanten vollständig beschrieben. Ein solches Verhalten zeigen nicht alle Naturkörper. Ein Krystall verhält sich nach verschiedenen Richtungen im Allgemeinen verschieden. Der Werth von E oder von m hängt hier auch wesentlich von der Lage der Hauptrichtung des Spannungszustandes gegen die krystallographi-

schen Axen ab. Wer also z. B. die elastischen Eigenschaften des Steinsalzes studiren will, darf sich mit dem vorausgehenden einfacheren Ansatze nicht begnügen, sondern muss ihn unter Berücksichtigung des genannten Umstandes entsprechend verallgemeinern. Im allgemeinsten Falle sind die beiden elastischen Constanten E und m für die anisotropen Körper, die im Uebrigen dem Hooke'schen Gesetze gehorchen, durch 21 von einander verschiedene Constanten zu ersetzen. Dadurch werden die Gleichungen der Elasticitätslehre für solche Körper sehr verwickelt. Wenn aber auch der Physiker, der sich mit solchen Fragen beschäftigt, die Erörterung dieser umständlicheren Gleichungen nicht umgehen kann, darf der Techniker davon absehen, da die wichtigsten Baustoffe gewöhnlich als nahezu isotrop angesehen werden können. Eine Ausnahme macht namentlich das Holz. Für Constructionstheile aus Holz sind aber in der Regel nur ganz einfache Aufgaben zu lösen, die ein tieferes Eingehen auf diese Unterschiede nicht nöthig machen. Ueberdies ist auch das elastische Verhalten des Holzes durch mancherlei zufällige Umstände — durch eingewachsene Aeste, den Einfluss des Standortes, die Lage des Stabes im Baume u. s. f. — so erheblichen Schwankungen unterworfen, dass jede feinere Berechnung, die auf den Unterschied der elastischen Eigenschaften nach verschiedenen Richtungen eingehen wollte, gegenstandslos würde.

Ausser den Aenderungen der Kantenlängen kann man auch die Aenderung untersuchen, die das Volumen des unendlich kleinen Parallelepipeds bei der einfachen Längsspannung erfährt. Die senkrecht zur Papierfläche der Abb. 12 stehende Kante sei mit dz bezeichnet. Dann entsteht aus dem Volumen $dx\,dy\,dz$ in Folge der Formänderung das Volumen

$$dx\,(1 + \varepsilon_x)\,dy\,(1 + \varepsilon_y)\,dz\,(1 + \varepsilon_z).$$

Beim Ausmultipliciren braucht man auf die Producte der ε nicht zu achten, da die ε alle sehr kleine Brüche sind, deren Producte neben ihnen selbst nicht in Betracht kommen; man erhält daher

$$dx\,dy\,dz\,(1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z).$$

Die Summe der drei ε gibt daher das Verhältniss der Volumenzunahme zum ursprünglichen Volumen an. Wir nennen diese Verhältnisszahl die kubische Ausdehnung und bezeichnen sie mit e, also

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \tag{31}$$

Diese Betrachtung gilt allgemein. Für den linearen Spannungszustand erhält man mit Rücksicht auf Gl. (30), und da $\varepsilon_z = \varepsilon_y$ ist,

$$e = \frac{m-2}{m}\varepsilon_x = \frac{m-2}{mE}\sigma_x. \tag{32}$$

Aus dieser Gleichung lässt sich auch ein Schluss auf die Grösse ziehen, die man für die Verhältnisszahl m mindestens anzunehmen hat. Es lässt sich nämlich nicht erwarten, dass das Volumen des Parallelepipeds durch einen Zug vermindert würde, also e negativ würde. Mindestens muss daher $m = 2$ angenommen werden. In diesem Falle nennen wir den elastischen Körper incompressibel, denn bei jedem beliebigen Spannungszustand bleibt sein Volumen constant. In der That ist aber, wie schon vorher erwähnt wurde, m in der Regel grösser; gewöhnlich liegt es zwischen 3 und 4.

Durch Uebereinanderlagerung von zwei oder im allgemeinsten Falle von drei linearen Spannungszuständen, deren Hauptrichtungen senkrecht aufeinander stehen, kann man jeden beliebigen anderen Spannungszustand ableiten und die vorausgehenden Gleichungen genügen daher stets zur Berechnung der elastischen Formänderungen isotroper Körper, die dem Hooke'schen Gesetze gehorchen. Für die Anwendung ist es aber bequem, den häufig vorkommenden Fall der reinen Schubbeanspruchung noch besonders zu betrachten.

Auf die Seitenfläche des in Abb. 13 gezeichneten Parallelepipeds mögen nur die Schubspannungen τ einwirken. Die Kanten erfahren dabei keine Längenänderungen, dagegen ändern sich die Winkel. Die Aenderung des ursprünglich rechten Winkels sei mit γ bezeichnet. Wir denken uns γ, wie überhaupt alle Winkel, mit denen wir hier zu thun haben, wenn nichts anderes gesagt wird, in Bogenmass ausgemessen, also

so, dass γ eine Verhältnisszahl ist, deren Multiplication mit dem Radius den zugehörigen Bogen liefert. Da die elastischen Formänderungen immer als sehr klein angesehen werden können, ist γ ein sehr kleiner echter Bruch. Der Cosinus eines sehr kleinen Winkels weicht nur um eine Grösse höherer Ordnung von der Einheit ab; wir können daher die Formänderung auch so beschreiben, dass sich die obere Seite des Rechtecks der Abb. 13 längs ihrer Richtungslinie verschiebt. So ist die Figur auch in der That gezeichnet, obschon in ihr der Winkel γ der Deutlichkeit wegen grösser angenommen werden musste. Wenn der Winkel γ diese Grösse wirklich erreichte, müsste man auch darauf achten, dass sich die obere Rechteckseite etwas senkte. So aber kommt diese Senkung nicht in Betracht, und wir können daher sagen, dass sich bis auf Grössen höherer Ordnung genau das Volumen des Parallelepipeds bei der reinen Schubbeanspruchung nicht ändert.

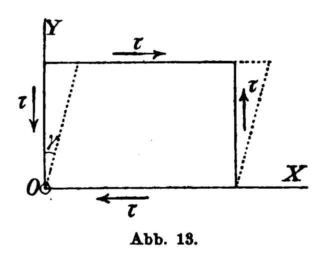


Abb. 13.

Wenn das Hooke'sche Gesetz gilt, ist die Formänderung der Spannung proportional, und wir können daher

$$\gamma = \beta\tau = \frac{\tau}{G} \tag{33}$$

setzen. Hier tritt eine neue elastische Constante des Materials G auf. Sie heisst der Schubelasticitäts-Modul, ihr reciproker Werth β der Schiebungscoefficient. Aus Gl. (33), in der γ eine absolute Zahl ist, erkennt man, dass G eine Grösse von derselben Art wie τ ist. Der Schubelasticitätsmodul hat daher ebenso wie der Zugelasticitätsmodul die Dimensionen einer specifischen Spannung und ist in atm oder in Kilogrammen auf 1 qcm anzugeben. Der numerische Werth von G muss ebenfalls, wie Gl. (33) lehrt, ein sehr beträchtlicher sein. Deshalb rechnet man besser mit ihm als mit seinem reciproken Werthe β, dem Schiebungscoefficienten, der immer

ein sehr kleiner Bruch ist und daher unbequem anzuschreiben ist, wenn man in den üblichen Einheiten rechnet.

Aus den vorhergehenden Betrachtungen folgt schon, dass G durch die Werthe von E und m, die für sich schon genügen, das elastische Verhalten eines Materials vollständig zu beschreiben, mitbestimmt sein muss. Wir wollen jetzt die Gleichung ableiten, die diesen Zusammenhang ausspricht. Dazu erinnern wir uns, dass nach den Untersuchungen in § 6 der Fall der „reinen Schubspannung“ einem ebenen Spannungszustande entspricht, dessen Hauptspannungen in Schnittrichtungen auftreten, die Winkel von 45^0 mit der Schnittrichtung der Schubspannung bilden. Beide Hauptspannungen sind der Schubspannung der Grösse nach gleich; die eine ist eine Zug-, die andere eine Druckspannung.

Wir denken uns nun einen Würfel in den Richtungen der Hauptspannungen herausgeschnitten. Die zur Z-Axe senkrechte Ansichtsfläche des Würfels geht unter dem Einflusse dieser Hauptspannungen in ein Rechteck über, das in Abb. 14 gezeichnet ist. Mit Δa ist die elastische Aenderung der Würfelkante a bezeichnet. Längs der Diagonalebenen des Würfels tritt die Schubspannung τ auf und die Aenderung des Winkels zwischen den Diagonalen kann entweder mit τ in Beziehung gebracht und nach Gl. (33) festgestellt oder aus den Aenderungen der Seitenlängen berechnet werden. Die Gleichsetzung der beiden auf diesen Wegen gefundenen Ausdrücke liefert die gesuchte Beziehung zwischen den elastischen Constanten.

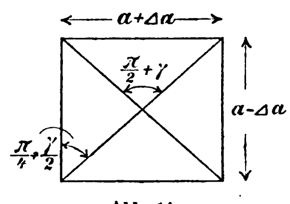


Abb. 14.

Wenn nur die eine Hauptspannung vorhanden wäre, könnte man das von ihr bewirkte Δa nach Gl. (28) sofort berechnen; man erhielte

$$\frac{1}{E} a \sigma_x \quad \text{oder} \quad \frac{1}{E} a \tau,$$

da $\sigma_x = \tau$ zu setzen ist. Dazu kommt aber noch die Quer-

dehnung, die von der anderen Hauptspannung herrrührt, und die $\frac{1}{m}$ des vorigen Betrages ausmacht. Im Ganzen ist also

$$\triangle a = \frac{m+1}{mE} a\tau .$$

Wenn die Winkel zwischen den Diagonalen um γ von einem Rechten abweichen, unterscheidet sich der Winkel zwischen einer Diagonale und einer Seite um $\frac{\gamma}{2}$ von einem halben Rechten. Diese Grössenbezeichnung ist auch in die Abbildung eingetragen. Man hat jetzt

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{a + \Delta a}{a - \Delta a}$$

oder, wenn man die Tangente der Winkelsumme nach einer bekannten goniometrischen Formel entwickelt und dabei für $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ selbst einsetzt, was zulässig ist, weil der Winkel nur sehr wenig von Null abweicht, auch

$$\frac{1 + \frac{\gamma}{2}}{1 - \frac{\gamma}{2}} = \frac{a + \Delta a}{a - \Delta a},$$

woraus sofort

$$\gamma = 2\frac{\Delta a}{a} = \frac{2(m+1)}{mE}\tau$$

folgt. Andererseits ist aber nach Gl. (33) auch

$$\gamma = \frac{\tau}{G},$$

und der Vergleich beider Werthe liefert

$$G = \frac{m}{2(m+1)} E. \tag{34}$$

Für $m = 4$ wird $G = 0{,}4\ E$ und für $m = 3$ wird $G = \frac{3}{8} E$, was hier noch besonders angemerkt werden mag.

Die Messung des Schubelasticitätsmoduls durch einen unmittelbaren Versuch ist nicht wohl ausführbar. Man kann ihn aber, wie wir später sehen werden, aus Torsionsversuchen berechnen. Der so gefundene Werth stimmt nicht immer gut

mit Gl. (34) überein. Andererseits ist aber Gl. (34) aus einer Betrachtung gefunden, die für ein Material, das dem Hooke'schen Gesetz bezw. dem Superpositionsgesetz allgemein gehorcht, unbedingt gültig sein muss. Abweichende Ergebnisse von Torsionsversuchen müssen daher nothwendig — soweit sie nicht von Messungsfehlern herrühren — entweder dadurch bedingt sein, dass das untersuchte Material jenem Elasticitätsgesetze nicht gehorcht oder dass die zur Berechnung aus dem Torsionsversuche angewendete Formel unrichtig ist. Wer Versuche über die Verdrehungselasticität anstellt, sollte dies stets im Auge behalten.

§ 9. Elastische Dehnungen in verschiedenen Richtungen.

Wir denken uns im ursprünglichen Zustande des Körpers eine unendlich kleine Kugel aus ihm abgegrenzt. Nehmen wir zunächst an, dass der Körper hierauf einem linearen Spannungszustande unterworfen wird, so muss diese Kugel in ein Rotationsellipsoid übergehen. Denn bezeichnen wir die Coordinaten eines Punktes der Kugel mit xyz und legen die X-Axe in die Hauptrichtung, so wird jedes x nach Gl. (28) in demselben Verhältnisse vergrössert und jedes y und z nimmt ab in einem Verhältnisse, das $\frac{1}{m}$ des vorigen beträgt, wenn wir uns σ_x positiv denken. Drücken wir hiernach die ursprünglichen Werthe von xyz in den geänderten aus und setzen sie in die Kugelgleichung ein, so geht diese in die Gleichung eines Ellipsoids über. Wenn zwei oder drei zu einander rechtwinklige lineare Spannungszustände übereinander gelagert werden, wodurch wir zu den allgemeineren Fällen aufsteigen, ändert sich immer noch jedes x in demselben Verhältnisse, jedes y in einem anderen constanten Verhältnisse und jedes z in einem dritten. Daraus schliessen wir wie vorher, dass die Kugel in ein Ellipsoid und zwar jetzt in ein dreiaxiges übergegangen ist. Ferner folgt daraus auch, dass die grössten oder kleinsten Werthe der Dehnungen oder überhaupt der specifischen Längenänderungen in den Hauptrichtungen des Spannungszustandes

auftreten. Man bezeichnet diese Dehnungen auch als die Hauptdehnungen.

Für den Fall des ebenen Spannungszustandes soll die Dehnung in einer beliebigen Richtung, die in der XY-Ebene enthalten ist, noch näher berechnet werden. Die Coordinatenaxen sollen mit den Hauptrichtungen zusammenfallen. Ein in der Ebene des Spannungszustandes enthaltenes Rechteck geht in ein anderes über, das in Abb. 15 durch gestrichelte Linien*) angegeben ist. Wir berechnen die kleine elastische Aenderung Δds der Diagonale ds, die den Winkel φ mit der X-Axe bildet. Zunächst ist

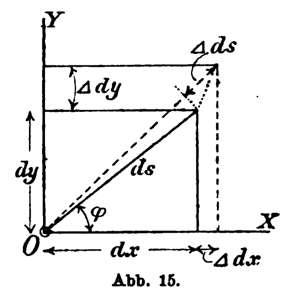


Abb. 15.

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

und wir finden daraus Δds am einfachsten, indem wir durch partielle Differentiation von ds nach dx und dy den Zuwachs berechnen, der den Aenderungen Δdx und Δdy entspricht. Wir erhalten

$$\Delta ds = \frac{dx\,\Delta dx + dy\,\Delta dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx}{ds}\Delta dx + \frac{dy}{ds}\Delta dy,$$

woraus die specifische Dehnung ε_φ in der Richtung φ durch Division mit ds gefunden wird, also

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\Delta ds}{ds} = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 \cdot \frac{\Delta dx}{dx} + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 \cdot \frac{\Delta dy}{dy} = \varepsilon_x \cos^2\varphi + \varepsilon_y \sin^2\varphi, \quad (35)$$

und dies wird in der That, wie schon vorher gezeigt war, zu einem Maximum oder Minimum für $\varphi = 0$ und für $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

An Stelle dieser Ableitung kann man übrigens Δds und hiermit ε_φ auch aus einer geometrischen Betrachtung an Hand der Abb. 15 leicht entnehmen.

---

*) Die obere Rechteckseite ist in der Abbildung aus Versehen nicht gestrichelt, sondern ausgezogen worden.

§ 10. **Die Anstrengung des Materials.**

Die Ausführung von Festigkeitsberechnungen verfolgt den Zweck, ein Urtheil über die Bruchgefahr zu gewinnen. Um die Rechenergebnisse in diesem Sinne deuten zu können, muss man aber wissen, in welchem Zusammenhange die Gefahr eines Bruches mit dem Spannungs- oder Formänderungszustande des Materials steht. Für den einfachsten Fall, nämlich für den linearen Spannungszustand, ist darüber kein Zweifel möglich. Man weiss aus der Erfahrung, wie gross die Spannung werden darf, ohne dass entweder die Elasticitätsgrenze überschritten oder ohne dass sofort ein Bruch herbeigeführt wird. Von dieser gefährlichen Spannung wird nun ein gewisser Bruchtheil als zulässig angesehen. Früher war es üblich, die zulässige Spannung nach der Bruchbelastung zu bemessen und das Verhältniss zwischen beiden Werthen wurde als der Sicherheitscoefficient bezeichnet. Für gewalztes Eisen wurde dieser etwa $= \frac{1}{5}$, für Holz $= \frac{1}{10}$ gewählt u. s. f. Heute ist man von dieser Art der Abschätzung zurückgekommen und zwar namentlich deshalb, weil sich herausstellte, dass man den Bruch schon durch viel kleinere Belastungen herbeiführen kann, wenn man diese öfters aufbringt und wieder entfernt. Die Glieder in den Constructionen des Ingenieurs sind aber meistens in dieser Weise beansprucht und dadurch hat der frühere Begriff der Bruchbelastung, also jener Belastung, die bei nur einmaligem Aufbringen den Bruch herbeiführt, sehr an Bedeutung verloren; man würde sich einer unter Umständen sehr gefährlichen Täuschung hingeben, wenn man diese Belastung zum Ausgangspunkte für die Bemessung der zulässigen Beanspruchung machen wollte. In der That wäre ja nicht wohl abzusehen, weshalb man sich damit begnügen sollte, nur den fünften Theil der Festigkeit des Eisens auszunutzen; ein kühner Constructeur könnte durch diese Art der Abschätzung leicht dazu verleitet werden, mit der Beanspruchung viel höher hinaufzugehen.

Versuche über den Einfluss der oft wiederholten Belastung sind zuerst von Wöhler angestellt worden, und an diese hat sich dann später eine ganze Fluth von Schriften und Abhandlungen geschlossen, in denen die wenigen Erfahrungsziffern Wöhlers zur Ableitung von Formeln und Gesetzen für die Wahl der zulässigen Beanspruchung verwerthet wurden. Es ist unnöthig, hier näher darauf einzugehen; dagegen werde ich, um einen Ueberblick über die thatsächlichen Verhältnisse zu geben, hier die später von Bauschinger an acht verschiedenen Eisensorten gewonnenen Ergebnisse mittheilen. Zugleich sollen dabei einige heute gebräuchliche Bezeichnungen (von Weyrauch eingeführt) angeführt werden. Unter „Tragfestigkeit" versteht man die vorher als Bruchbelastung schlechtweg bezeichnete specifische Spannung, die den Bruch unmittelbar zur Folge hat. Als „Ursprungsfestigkeit" wird dagegen jene Spannung bezeichnet, die im Wechsel mit dem spannungslosen Zustande gerade noch beliebig oft ertragen wird. Eine Spannung, die über der Ursprungsfestigkeit liegt, führt bei öfterem Wechsel schliesslich den Bruch herbei und zwar um so eher, je näher sie der Tragfestigkeit kommt. Die Zahl der Wechsel, die erforderlich sind, wenn die Spannung nicht sehr viel über der Ursprungsfestigkeit liegt, beläuft sich gewöhnlich auf Millionen. Unter der „Schwingungsfestigkeit" endlich ist jener grösste Werth der specifischen Spannung zu verstehen, der bei Wechsel zwischen Zug und Druck (beide von der gleichen Grösse) gerade noch beliebig oft ertragen wird. Die Schwingungsfestigkeit ist gewöhnlich etwas niedriger als die Ursprungsfestigkeit, nach den zuverlässigsten Versuchen, die von Bauschinger herrühren, ist der Unterschied aber viel geringer, als man früher auf Grund der wenigen Ergebnisse Wöhlers angenommen hatte. Ich gebe die Ziffern Bauschinger's in der nachstehenden Tabelle wieder.

No.	Eisensorte.	Tragfestigkeit (auf Zug.)	Ursprungsfestigkeit (für Zug.)	Schwingungsfestigkeit.
1.	Schweisseisen	3480	2000	1770
2.	Flusseisen	4360	2400	1980
3.	Nicht näher bezeichnet	4050	2200	1980
4.	desgl.	4020	2400	2260
5.	Thomasstahl	6120	3000	3000
6.	Schienenstahl	5940	2800	2800
7.	Kesselblech-Flusseisen	4050	2400	1900
8.	Nicht näher bezeichnet	3350	2200	1600

Alle Festigkeitsziffern sind in Atmosphären angegeben. Die niedrigsten, in der Spalte für die Schwingungsfestigkeit, stimmen ungefähr mit der Lage der Elasticitätsgrenze bei den betreffenden Materialien überein. Daraus ist der Schluss zu ziehen, dass die Elasticitätsgrenze für die Sicherheit der Constructionen weit massgebender ist, als die durch einen Zugversuch ermittelte Tragfestigkeit. Man erhält daher ein viel zutreffenderes Urtheil über den heute üblichen Sicherheitsgrad der eisernen Tragconstructionen, wenn man sagt, dass ungefähr die Hälfte der Belastung an der Elasticitätsgrenze oder auch etwas darüber als zulässig angesehen wird, als wenn man sich auf die Tragfestigkeit bezieht.

Mit diesen Bemerkungen ist die Frage für den linearen Spannungszustand, so weit als sie hier überhaupt erörtert werden kann, erledigt. Um die Bruchgefahr für einen anderen Spannungszustand bemessen zu können, reichen die angegebenen Erfahrungsziffern aber nicht aus, und in der That ist auch noch nicht endgültig festgestellt, wovon sie hier abhängt. Vielmehr sind drei verschiedene Ansichten hierüber aufgestellt worden, von denen zwar die eine (die ich auch selbst auf Grund meiner Erfahrungen als die zutreffendste halte) die meisten Anhänger zählt, ohne dass es aber bisher gelungen wäre, eine durchaus einwandfreie Entscheidung zu treffen.

Die erste Ansicht geht dahin, dass die Bruchgefahr durch die grösste Hauptspannung bedingt sei, während die beiden

anderen nicht die Spannungen, sondern die von ihnen verursachten Formänderungen als ausschlaggebend annehmen. Nach der schon von Coulomb aufgestellten und später namentlich von Tresca vertretenen Ansicht soll die Bruchgefahr von der grössten Winkeländerung γ abhängen, die bei der Formänderung zu Stande kommt, während die dritte von Poncelet und de Saint-Vénant vertheidigte und in Deutschland besonders durch Grashof eingeführte Anschauung die grösste specifische Dehnung ε als massgebend betrachtet. Die letzte Ansicht hat heute die meisten Vertreter und sie soll in diesem Buche überall, wo es darauf ankommt, zu Grunde gelegt werden.

Beim linearen Spannungszustande fallen die Unterschiede der drei Meinungen fort, denn hier wachsen Spannung, grösste Winkeländerung und Hauptdehnung, so lange die Proportionalitätsgrenze nicht überschritten ist, proportional mit einander. Bei anderen Spannungszuständen trifft dies aber keineswegs zu. Man erkennt dies am deutlichsten an einem extremen Falle. Ein Sandsteinwürfel, dessen Druckfestigkeit etwa 500 at betragen möge, sei an der Oberfläche mit einem Firniss überstrichen, der ein Eindringen des Wassers verhindert und dann an einer tiefen Stelle in das Meer versenkt. Nach der ersten Ansicht, die nur auf die Grösse der Hauptspannungen Rücksicht nimmt, müsste er durch den Wasserdruck zertrümmert werden, sobald er in etwa 5000 m Tiefe gelangt wäre. Nach der Coulomb'schen Ansicht dagegen könnte er überhaupt durch keinen noch so hohen Wasserdruck zerstört werden, da sich der Stein bei allseitigem Drucke geometrisch ähnlich bleibt, Winkeländerungen also überhaupt nicht vorkommen. Nach der dritten Ansicht endlich würde er zwar nicht bei 5000 m Tiefe, wohl aber bei einer grösseren Tiefe zerdrückt werden können. Die specifische Verkürzung wächst nämlich wegen des Einflusses der Querdehnung bei allseitigem Drucke langsamer als bei linearer Druckspannung. Es könnte sogar auch nach der dritten Ansicht eine Zertrümmerung des Steines ausgeschlossen sein, wenn nämlich für diesen Stein $m = 2$ wäre, oder doch

bei wachsendem Druck allmählich dieser Grenze sich näherte. Denn bei Steinen ist in der That, wie man weiss, m ebenfalls mit dem Spannungs- und Formänderungszustande veränderlich.

Ich vermag nicht sicher anzugeben, was in Wirklichkeit geschehen wird, wenn man den Versuch — nicht im Meere, sondern etwa in einer starken hydraulischen Presse — wirklich ausführt. Versuche ähnlicher Art hat der Physiker Herr Voigt in Göttingen angestellt, ohne aber bisher die streitigen Fragen nach dem richtigen Maasse für die Anstrengung des Materials damit endgültig entscheiden zu können.

§ 11. Die reducirten Spannungen.

Wenn man auch die specifische Dehnung ε als Mass der Anstrengung des Materials ansieht, ist man darum noch nicht genöthigt, überall unmittelbar mit dieser Grösse zu rechnen. Dies wäre oft sehr unbequem. Im Verlauf meiner Untersuchungen über die Festigkeit von Steinen habe ich es zwar z. B. ganz zweckmässig gefunden, zu sagen, dass ein gewisser Granit eine specifische Dehnung von etwa $60 \cdot 10^{-5}$, eben noch erträgt, ehe er bricht, und es gibt wohl auch ein anschauliches Bild, wenn man hinzufügt, dass diese Bruchdehnung bei einem ganz weichen Sandstein zu etwa $40 \cdot 10^{-5}$, also nicht viel geringer als bei dem harten Granit zu veranschlagen ist. Dagegen wäre es für die wirkliche Berechnung einer Steinconstruction unbequem, wenn man daraus die Forderung ableiten wollte, dass die specifische Dehnung etwa den zehnten Theil der angegebenen Werthe nicht überschreiten dürfe. Denn in der That liefert die Festigkeitsberechnung zunächst immer nur die Spannungen, und es bedürfte erst noch einer besonderen Umrechnung, um daraus die Dehnungen abzuleiten. Zu dieser Umrechnung müsste auch der Elasticitätsmodul bekannt sein, den man für viele Materialien in der Praxis nur ganz annähernd kennt oder über den man sich auch oft ganz im Unklaren befindet.

Um solchen Umständlichkeiten aus dem Wege zu gehen, hat man ein sehr einfaches Auskunftsmittel gefunden. Man vergleicht irgend einen beliebigen Spannungszustand, dessen Zulässigkeit untersucht werden soll, mit einem linearen Spannungszustande, dessen specifische Dehnung gleich der grössten Hauptdehnung bei jenem ist. Nach der Annahme, von der wir ausgehen, ist das Material in beiden Fällen in gleichem Masse angestrengt, und wir können daher diese Anstrengung in jedem Falle durch eine einzige Ziffer zum Ausdruck bringen, indem wir die specifische Spannung des gleichwerthigen linearen Spannungszustandes angeben. Diese Spannung wird als die reducirte Spannung bezeichnet und sie wird praktisch stets als Maass für die Anstrengung des Materials genommen.

Für den Fall des ebenen Problems seien σ_I und σ_{II} die beiden Hauptspannungen (Zug wie immer positiv, Druck negativ gerechnet). Für die Hauptdehnungen erhält man dann nach dem Hooke'schen Elasticitätsgesetze, das hier als gültig vorausgesetzt wird,

$$\varepsilon_I = \frac{1}{E}\left(\sigma_I - \frac{1}{m}\sigma_{II}\right); \qquad \varepsilon_{II} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{II} - \frac{1}{m}\sigma_I\right).$$

Die reducirte Spannung muss entweder so gewählt werden, dass die von ihr hervorgebrachte Dehnung mit ε_I oder mit ε_{II} übereinstimmt, jenachdem der eine oder der andere Werth grösser, oder (bei verschiedenen Vorzeichen) gefährlicher für den Bestand des Materials ist. Daraus folgt, dass

$$\sigma_{red} = \sigma_I - \frac{1}{m}\sigma_{II} \quad \text{oder} \quad \sigma_{red} = \sigma_{II} - \frac{1}{m}\sigma_I \tag{36}$$

zu setzen ist, mit dem Vorbehalte, dass von beiden Werthen der ungünstigere zu nehmen ist.

Beim allgemeinsten Spannungszustande mit den Hauptspannungen $\sigma_I\ \sigma_{II}\ \sigma_{III}$ erhält man ebenso

$$\varepsilon_I = \frac{1}{E}\left(\sigma_I - \frac{1}{m}\sigma_{II} - \frac{1}{m}\sigma_{III}\right)$$

und daraus

$$\sigma_{red} = \sigma_I - \frac{1}{m}(\sigma_{II} + \sigma_{III}). \tag{37}$$

Eigentlich wären wieder drei Werthe anzugeben, aus denen man wie vorher den ungünstigsten auszuwählen hätte. Anstatt dessen kann man aber auch die eine Formel (37) beibehalten, wenn man nur hinzufügt, dass die Bezeichnungen σ_I σ_{II} σ_{III} so auf die drei Hauptspannungen zu vertheilen sind, dass in Gl. (37) der gefährlichste Werth für die reducirte Spannung herauskommt. In praktisch vorkommenden Fällen sieht man gewöhnlich auf den ersten Blick, welche der drei Hauptspannungen man zu diesem Zwecke als σ_I in Gl. (37) einsetzen muss.

Eine ihrer bekanntesten Anwendungen findet diese Betrachtung auf die Berechnung des zulässigen Betrages von τ bei der einfachen Schubbeanspruchung. Wenn man mit σ_{zul} den zulässigen Betrag der einfachen Zug- oder Druckbeanspruchung (wenn beide von einander verschieden sind, den kleineren von beiden) bezeichnet, kann man die zulässige Schubbeanspruchung τ_{zul} daraus in folgender Weise berechnen. Die Hauptspannungen bei der reinen Schubbeanspruchung sind bekanntlich von gleicher Grösse mit τ selbst und im Vorzeichen einander entgegengesetzt. Nun soll τ so gewählt werden, dass die Anstrengung des Materials grade mit der zulässigen, d. h. dass σ_{red} in Gl. (36) mit σ_{zul} übereinstimmt. Dies gibt, wenn man $\sigma_I = + \tau_{zul}$ und $\sigma_{II} = - \tau_{zul}$ einsetzt, die Gleichung

$$\sigma_{zul} = \tau_{zul} + \frac{1}{m} \tau_{zul},$$

woraus

$$\tau_{zul} = \frac{m}{m+1} \sigma_{zul} \tag{38}$$

gefunden wird.

Gl. (36) kann ferner dadurch umgestaltet werden, dass man σ_I und σ_{II} in den auf ein beliebig gerichtetes Coordinatensystem der XY bezogenen Spannungscomponenten σ_x σ_y τ ausdrückt und diesen Werth in die Formel einführt. Dies soll hier nur noch für den besonderen Fall weiter ausgeführt werden, dass $\sigma_y = 0$ ist. Dieser Fall kommt nämlich bei den praktischen Anwendungen öfters vor, z. B. bei einer Welle, die gleichzeitig gebogen und verdreht wird. Die Biegung erzeugt Spannungen senkrecht zum Querschnitt, also etwa σ_x, und die Verdrehung

bringt Schubspannungen τ hervor, während Normalspannungen σ_y oder σ_z zwischen den einzelnen Fasern des Stabes nicht vorkommen. Man führt die Berechnung in solchen Fällen immer derart durch, dass man zuerst σ_x und τ berechnet — und zwar nach den später dafür erst noch aufzustellenden Lehren, worauf es aber an dieser Stelle nicht ankommt — und dann daraus die reducirte Spannung σ_{red} ermittelt. Es ist, da solche Fälle öfters vorliegen, nützlich, diese Umrechnung hier ein für alle Male vorzunehmen. Dazu sind also σ_x und τ als bereits bekannt vorauszusetzen.

Aus Gl. (12) S. 31 erhält man für $\sigma_y = 0$ die Hauptspannungen

$$\sigma_{\mathrm{I}} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x + \sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2}\right); \quad \sigma_{\mathrm{II}} = \frac{1}{2}\left(\sigma_x - \sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2}\right).$$

Durch Einsetzen in Gl. (36) folgt daraus

$$\sigma_{red} = \frac{m-1}{2m}\sigma_x \pm \frac{m+1}{2m}\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2}. \tag{39}$$

Man erhält das obere oder das untere Wurzelvorzeichen, jenachdem man den einen oder den anderen der beiden in Gl. (37) für σ_{red} angegebenen Werthe nimmt. Nach den vorhergehenden Bemerkungen muss man immer jenes Vorzeichen wählen, das den ungünstigsten Werth für σ_{red} liefert. Auf der Zugseite einer zugleich gebogenen und verdrehten Welle wird man daher das positive, auf der Druckseite das negative Vorzeichen zu nehmen haben u. s. f.

Mit $m = 4$ geht Gl. (39) über in

$$\sigma_{red} = \frac{3}{8}\sigma_x \pm \frac{5}{8}\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2}$$

und in dieser Form wird sie gewöhnlich angeschrieben. Dagegen wird für

$$m = 3 \;:\; \sigma_{red} = \frac{1}{3}\sigma_x \pm \frac{2}{3}\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2},$$

$$m = 3\tfrac{1}{3} :\; \sigma_{red} = 0{,}35\,\sigma_x \pm 0{,}65\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2}.$$

§ 12. **Die specifische Formänderungsarbeit.**

Man denke sich wieder ein unendlich kleines Parallelepiped in den Hauptrichtungen herausgeschnitten. Die Spannungen am Umfang sind für diesen Theil des Körpers als äussere Kräfte anzusehen, die bei der Formänderung eine Arbeit leisten, da sie längs eines gewissen Weges wirken. Dadurch wird dem Körperelemente eine Energiemenge zugeführt, die darin aufgespeichert wird und bei der Umkehrung des Vorgangs wieder daraus gewonnen werden kann. Man bezeichnet diese Energie auch als die potentielle Energie des gespannten Körpers oder auch als das Potential der elastischen Kräfte. Wir wollen anstatt dessen an der in der Technik üblicheren Bezeichnung „Formänderungsarbeit" festhalten. Wird die Formänderungsarbeit auf die Volumeneinheit des Körpers an der betreffenden Stelle bezogen, so soll dies durch die nähere Bezeichnung „specifische" Formänderungsarbeit ausgedrückt werden.

Für den linearen Spannungszustand ist die gesammte Formänderungsarbeit des Körpers schon in Gl. (17) angegeben. Wenn der Körper dem Hooke'schen Gesetze gehorcht, ist die Kraft P in jedem Augenblicke der zugehörigen Längenänderung proportional. In Gl. (17)

$$A = \int_0^{\Delta l} P dx$$

können wir daher, wenn der der gesammten Längenänderung Δl entsprechende Werth von P mit P' bezeichnet wird,

$$P = P' \frac{x}{\Delta l}$$

setzen und die vorige Gleichung geht damit über in

$$A = \frac{P'}{\Delta l} \int_0^{\Delta l} x dx = \frac{1}{2} P' \Delta l. \qquad (40)$$

Die specifische Formänderungsarbeit wird hieraus gefunden, wenn wir diese Gleichung auf einen Würfel anwenden, dessen

Seite gleich der Längeneinheit ist. Dann geht P' über in σ und $\varDelta l$ in ε, also, wenn die specifische Formänderungsarbeit mit A bezeichnet wird,

$$A = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{\sigma^2}{2E} \tag{41}$$

Für den Fall des ebenen Problems mit den Hauptspannungen σ_x und σ_y finden wir A auf demselben Wege. Die Dehnungen in den Hauptrichtungen werden

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \frac{1}{m}\sigma_y\right); \qquad \varepsilon_y = \frac{1}{\varepsilon}\left(\sigma_y - \frac{1}{m}\sigma_x\right).$$

Auf die Dehnung in der dritten Hauptrichtung kommt es nicht an, da die ihr entsprechende Hauptspannung Null ist. Auf die Rechtecke von den Kantenlängen $dy\,dz$ wirken die Kräfte $\sigma_x\,dy\,dz$ in entgegengesetzter Richtung. Wenn sich der Abstand dx zwischen beiden Rechtecken um $\varepsilon_x\,dx$ vergrössert, leisten die beiden Kräfte zusammengenommen eine Arbeit, die gleich diesem Wege multiplicirt mit dem Mittelwerthe der Kräfte während des allmählichen Anwachsens des Spannungszustandes ist. Dieser Mittelwerth ist, wie im vorausgehenden Falle, gleich der Hälfte der zuletzt erreichten Grösse, die Arbeit daher

$$\frac{1}{2}\sigma_x\,dy\,dz \cdot \varepsilon_x\,dx \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{2E}\left(\sigma_x^2 - \frac{1}{m}\sigma_x\sigma_y\right)dx\,dy\,dz\,.$$

Dazu kommt der ebenso zu bildende Ausdruck für die Arbeit der Hauptspannung in der Y-Richtung. Addirt man beide Beträge und streicht man den Factor $dx\,dy\,dz$, womit die Arbeit auf die Volumeneinheit bezogen wird, so erhält man

$$A = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}{2} - \frac{1}{m}\sigma_x\sigma_y\right). \tag{42}$$

Für den allgemeinsten Fall mit drei von Null verschiedenen Hauptspannungen würde man ebenso erhalten

$$A = \frac{1}{E}\left(\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2}{2} - \frac{1}{m}(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z)\right). \tag{43}$$

Auch bei diesen Betrachtungen ist es wieder nützlich, den Fall der reinen Schubbeanspruchung gesondert zu untersuchen. Am Umfange des in Abb. 13 S. 60 herausgezeichneten Körper-

elementes wirken nur die Schubspannungen τ. Wenn wir uns die Formänderung so vorgenommen denken, wie es durch punktirte Linien in Abb. 13 angedeutet ist — also ohne weitere Verschiebung oder Drehung des Volumenelementes, die auf die ganze geleistete Arbeit keinen Einfluss haben kann, da die Spannungen am Umfange ein Gleichgewichtssystem mit einander bilden — kommt nur die Arbeit der Schubspannungen an der oberen Seite in Betracht, da sich die untere Seite überhaupt nicht verschiebt, während die Verschiebungen der anderen Seiten senkrecht zur Kraftrichtung stehen. Der Mittelwerth der Kraft während der Formänderung ist aus denselben Gründen wie vorher gleich der Hälfte des zuletzt erreichten Werthes zu setzen, also gleich

$$\frac{1}{2}\tau\, dx\, dz$$

und der Weg, der in der Richtung der Kraft zurückgelegt wird, gleich γdy. Die Formänderungsarbeit ist daher

$$\frac{1}{2}\tau\gamma\, dx\, dy\, dz\,.$$

Die specifische Formänderungsarbeit wird daraus durch Streichen des Factors $dx\, dy\, dz$, der das Volumen des betrachteten Parallelepipeds angibt, gefunden, also mit Berücksichtigung von Gl. (33)

$$\mathsf{A} = \frac{1}{2}\tau\gamma = \frac{1}{2}G\gamma^2 = \frac{\tau^2}{2G}\,. \tag{44}$$

Der Ausdruck (44) muss mit dem in Gl. (42) angegebenen Werthe übereinstimmen, wenn man in diesem die Hauptspannungen σ_x und σ_y gleich $+\tau$ bezw. $-\tau$ setzt. Die so erhaltene Gleichung

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\tau^2+\tau^2}{2} + \frac{1}{m}\tau\cdot\tau\right) = \frac{\tau^2}{2G}$$

liefert nach ihrer Auflösung nach G wieder die in § 8 auf ganz anderem Wege abgeleitete Beziehung

$$G = \frac{m}{2\,(m+1)}\,E$$

zwischen den drei Elasticitäts-Coefficienten.

Ein feineres Empfinden wird in diesen Schlüssen noch eine gewisse Lücke herausfühlen. Es ist nämlich noch nicht darauf hingewiesen worden, dass die Formänderungsarbeit für ein beliebig gestaltetes Volumenelement dem Volumen proportional, von der besonderen Gestalt des Elementes aber unabhängig ist. Bis zu einem gewissen Grade lässt sich dies zwar schon daraus entnehmen, dass die potentielle Energie an den materiellen Inhalt des Elementes gebunden ist und dass man in der That nur auf Grund einer solchen Vorstellung von einer specifischen Formänderungsarbeit sprechen kann. Ein directer Nachweis bleibt aber immerhin wünschenswerth. Diesen kann man dadurch führen, dass man sich das Volumenelement in Elemente höherer Ordnung zerlegt denkt, deren Kanten nach den Hauptrichtungen orientirt sind. Summirt man die Arbeitsleistungen aller Spannungen auf den Seitenflächen dieser Elemente höherer Ordnung über das ganze ursprünglich gegebene Volumenelement, so heben sich alle Glieder gegeneinander auf, die auf Flächen kommen, in denen zwei Elemente höherer Ordnung aneinander grenzen, da die Kräfte nach dem Gesetze der Action und Reaction einander entgegengesetzt, die Wege aber die gleichen sind. Die Summe ist daher gleich den Arbeitsleistungen der Spannungen am Umfange des Elementes erster Ordnung, woraus der Satz folgt.

Aufgaben.

4. *Aufg. Ein Zugstab aus Flusseisen werde mit 1000 atm gespannt; wie gross ist die grösste in ihm auftretende Winkeländerung* γ *in Secunden ausgedrückt, wenn* $E = 2200000$ atm *und* $m = 3\frac{1}{3}$ *gesetzt wird?*

Lösung. In § 5 folgte aus den Gleichungen (15), dass die grösste Schubspannung beim linearen Spannungszustande gleich der Hälfte der Hauptspannung, hier also gleich 500 atm ist. Der Schubelasticitätsmodul berechnet sich nach Gl. (34) hier zu

$$G = \frac{3\frac{1}{3}}{2 \cdot 4\frac{1}{3}} \cdot 2\,200\,000 = 846\,000 \text{ atm}$$

und damit die Winkeländerung γ nach Gl. (33)

$$\gamma = \frac{500 \text{ atm}}{846\,000 \text{ atm}} = 591 \cdot 10^{-6}$$

und da $1'' = 4,85 \cdot 10^{-6}$ in Bogenmass ist,

$$\gamma = 122'' = 2'\,2''.$$

Hierzu bemerke ich noch, dass Gl. (33) zunächst für den Fall der reinen Schubspannung abgeleitet wurde, der hier allerdings nicht vorliegt. Die Formel bleibt aber auch hier gültig, weil Normalspannungen, die zu den Schubspannungen noch hinzukommen, für sich genommen keine Winkeländerungen bewirken, und weil man nach dem Superpositionsgesetze die ganze Formänderung immer aus den einzelnen Aenderungen zusammensetzen kann, die den verschiedenen Componenten irgend eines Spannungszustandes entsprechen.

Die berechnete Winkeländerung tritt zwischen zwei auf der Oberfläche des Stabes unter 45° zur Stabaxe gezogenen, auf einander senkrecht stehenden Linien ein. Ich habe früher einmal versucht, sie unmittelbar mit Hülfe eines besonders dazu construirten Spiegelapparates zu messen, konnte aber zu keinem zuverlässigen Ergebnisse gelangen, weil es zu schwierig ist, zwei Spiegel genügend dauerhaft mit einem Stabe so zu verbinden, dass jeder von ihnen stets einer von jenen beiden Linien parallel bleiben muss. Wenn es später noch gelingen sollte, einen Apparat zu bauen, der dieser Forderung hinreichend genau entspricht, könnte man durch einen einfachen Zugversuch gleichzeitig beide Elasticitätsmoduln E und G bestimmen, womit auch m bekannt wäre. Diese directe Bestimmung hätte manche Vorzüge gegenüber der Ableitung von G aus Verdrehungsversuchen; leider ist zur Zeit wenig Aussicht zu ihrer Verwirklichung.

5. *Aufg.* *Ein Granitwürfel von 6 cm. Seite wird in der Prüfungsmaschine mit 24 t belastet. Wie gross ist die Beanspruchung auf Schub und wie gross ist die Winkeländerung γ, wenn $E = 300\,000$ atm und $m = 4$ gesetzt wird?*

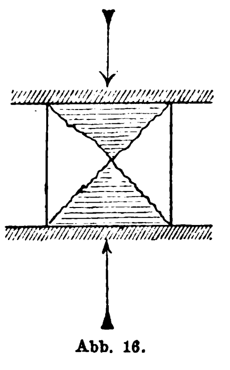


Abb. 16.

Lösung. Man findet wie in voriger Aufgabe $\tau = 333$ atm, $G = 120000$ atm und $\gamma = \frac{1}{360} = 0^0\,9'\,30''$.

Bemerkung. Die Frage steht in Verbindung mit einer Ansicht, die früher über die Art, wie der Bruch eines solchen Steinwürfels erfolge, sehr verbreitet war. Der Steinwürfel zerfällt nämlich so in Bruchstücke, dass zwei oft sehr schön ausgebildete

Pyramiden entstehen, die in Abb. 16 durch horizontale Schraffirung hervorgehoben sind. Die Seitenflächen der Pyramiden, also die Hauptbruchflächen, folgen ungefähr jenen Schnittrichtungen, für die τ den grössten Werth annimmt. Man schloss daraus, dass bei dem Druckversuch in Wirklichkeit die Schubfestigkeit überwunden würde. — Wahrscheinlicher ist indessen die folgende Erklärung dieser Erscheinung. Beim Zusammendrücken des Würfels tritt gleichzeitig eine Querdehnung ein. Nun ist Steinmaterial im Stande, nur eine gewisse specifische Dehnung zu ertragen, Granit, wie früher angeführt, etwa $60 \cdot 10^{-5}$, bevor eine dauernde Trennung eintritt. Dabei ist es wahrscheinlich gleichgültig, ob diese Dehnung durch einen Zug in der einen Richtung oder durch einen Druck in der Querrichtung zu Stande kommt. Der Bruch wäre also dann dadurch zu erklären, dass sich auf den vier freien Seitenflächen Stücke loslösen, so dass die Pyramiden übrig bleiben. Bei manchen Druckversuchen hat in der That Bauschinger keine Pyramiden, sondern Prismen als Bruchstücke erhalten, deren Kanten der Hauptrichtung parallel gingen, was unmittelbar auf die gegebene Erklärung hinweist. — Zur Erklärung der pyramidalen Gestalt muss aber noch auf einen anderen, wichtigen Umstand geachtet werden. Die Druckflächen des Steines sind nämlich durch die Reibung zwischen ihnen und den Druckplatten der Prüfungsmaschine gehindert, sich der Quere nach auszudehnen. Dadurch kommt in der Nähe der Druckflächen überhaupt kein linearer Spannungszustand heraus. Auch die benachbarten Stellen werden an der freien Querdehnung gehindert; man muss daher erwarten, dass der Bruch in der Mitte beginnt, bis wohin sich diese Hemmung der Querdehnung am wenigsten erstreckt. Beachtet man, dass die Druckflächen durch die Reibung an jeder Querdehnung gehindert sind, dass also ein auch über sie sich erstreckender Riss kaum zu erwarten ist, so wird die nahezu pyramidenförmige Gestalt der Hauptbruchreste leicht verständlich. Zugleich gibt diese Betrachtung auch Rechenschaft über eine andere Erscheinung, die man bei der Prüfung von Steinen auf Druckfestigkeit beobachtet. Man findet nämlich die Festigkeit abhängig von dem Verhältnisse der Höhe des Probekörpers zur Grundfläche; je höher es ist, desto geringer ist gewöhnlich die Festigkeit. Da sich der Einfluss der durch Reibung festgehaltenen Grundflächen bei höheren Prismen in der Mitte nicht mehr so fühlbar machen kann, als bei niederen, erklärt sich diese Erscheinung ganz ungezwungen. — Es ist üblich, die Druckfestigkeit von Steinen immer nur an Probekörpern in Würfelform zu ermitteln. Bei der Deutung der so erhaltenen Ziffern ist auf die vorausgehenden Darlegungen wohl zu achten.

6. Aufg. Ein Cylinder von nachgiebigerem Material (kleinem E) ist in den cylindrischen Hohlraum einer ihn auf dem Mantel dicht umschliessenden (nahezu) starren Masse eingepasst und wird der Längsrichtung nach mit 200 atm zusammengedrückt. Wie gross ist der Druck, den er am Mantel auf die ihn umschliessende Masse ausübt a) wenn $m = 4$, b) wenn $m = 2$ gesetzt wird?

Lösung. Man hat hier $\sigma_I = 200$ und $\sigma_{II} = \sigma_{III} = x$. Die Unbekannte x muss so gewählt werden, dass $\varepsilon_{II} = \varepsilon_{III} = 0$ wird, also

$$\varepsilon_{II} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{II} - \frac{1}{m}(\sigma_I + \sigma_{III})\right) = 0\,; \qquad x - \frac{1}{m}(x + 200) = 0.$$

Für $m = 4$ folgt daraus $x = 66\frac{2}{3}$ atm und für $m = 2$ wird $x = 200$ atm. Im letzten Falle ist der Seitendruck genau so gross, als wenn der cylindrische Hohlraum von einer Flüssigkeit ausgefüllt wäre.

7. Aufg. Wie gross ist die reducirte Spannung für den in Aufg. 3, S. 38 angegebenen Fall, wenn $m = 4$ gesetzt wird?

Lösung. Für $m = 4$ ist nach § 11

$$\sigma_{red} = \frac{3}{8}\sigma_x + \frac{5}{8}\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2},$$

und hier ist $\sigma_x = 300$, $\tau = 400$ atm zu setzen. Setzt man dies ein, so wird $\sigma_{red} = 646$ atm.

8. Aufg. Eine an beiden Enden durch starke Böden geschlossene cylindrische Röhre stehe unter einem inneren Ueberdrucke. Die Zugspannung der Rohrwand in tangentialer Richtung betrage 800 atm, die in der Längsrichtung 400 atm. Wie gross ist die reducirte Spannung für $m = 3\frac{1}{3}$?

Lösung. Nach Gl. (36) hat man

$$\sigma_{red} = 800 - \frac{1}{3\frac{1}{3}} \cdot 400 = 680 \text{ atm.}$$

9. Aufg. Eine sich von einem Ende zum anderen gleichmässig verjüngende Zugstange von den Endquerschnitten F_1 und F_2 und der Länge l wird mit der Kraft P centrisch gezogen. Wie gross ist die Formänderungsarbeit?

Lösung. Der Querschnitt F im Abstande x von jenem Ende, an dem der Querschnitt $= F_1$ ist, berechnet sich auf

$$F = F_1 + \frac{x^2}{l^2}(F_2 - F_1).$$

Für die Formänderungsarbeit dA in einem Abschnitte der Stange von der Länge dx, also von dem Volumen Fdx, erhält man nach Gl. (41)

$$dA = Fdx\frac{\sigma^2}{2E} = \frac{P^2}{2E}\cdot\frac{dx}{F},$$

und die Formänderungsarbeit A der ganzen Stange wird daraus durch Integration nach x gefunden, also

$$A = \frac{P^2}{2E}\int_0^l \frac{dx}{F_1 + \frac{x^2}{l^2}(F_2 - F_1)}.$$

Mit Benutzung der Integralformel

$$\int_0^x \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} x\sqrt{\frac{b}{a}}$$

geht dies über in

$$A = \frac{P^2}{2E}\frac{l}{\sqrt{F_1(F_2 - F_1)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{F_2 - F_1}{F_1}}.$$

Falls sich F_1 und F_2 nur wenig von einander unterscheiden, kann man den Bogen gleich der Tangente setzen, also das Zeichen arctg streichen; dann erhält man näherungsweise

$$A = \frac{P^2 l}{2EF_1},$$

und dies ist der Ausdruck für die Formänderungsarbeit einer Stange von dem konstanten Querschnitt F_1.

10. Aufg. Eine an beiden Enden festgehaltene Zugstange war ursprünglich mit 600 atm gespannt. Dann wird sie um 50^0 C *abgekühlt. Um wie viel erhöht sich die specifische Formänderungsarbeit, wenn* $E = 2\cdot 10^6$ atm *und der Ausdehnungscoefficient des Eisens* $= \frac{1}{80\,000}$ *für* 1^0 C *gesetzt wird?*

Lösung. Wenn die Enden der Stange frei wären, hätte die Abkühlung eine specifische Verkürzung ε zur Folge, die

$$\varepsilon = \frac{50}{80\,000} = \frac{1}{1600}$$

wäre. Um diese Verkürzung zu verhindern, muss eine Zugspannung in der Stange auftreten, die für sich genommen eine specifische elastische Dehnung von demselben Betrage zu Stande bringt. Diese Spannung σ ist nach Gl. (18)

$$\sigma = E\varepsilon = 2 \cdot 10^6 \cdot \frac{1}{1600} = 1250 \text{ atm}.$$

Durch die Abkühlung wird also die Zugspannung von ursprünglich 600 atm auf 1850 atm erhöht. Bei vielen Eisensorten liegt dies schon über der Proportionalitätsgrenze, wir wollen indessen annehmen, dass dies hier nicht zutrifft, da wir die Formänderungsarbeit nicht mehr genau berechnen können, sobald jene Grenze überschritten ist.

Nach Gl. (41) ist im ursprünglichen Zustande

$$A = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{600^2}{4 \cdot 10^6} \cdot \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} = 0{,}09 \frac{\text{cmkg}}{\text{cm}^3}.$$

Die im letzten Ausdrucke gegebene Bezeichnung der Dimensionen weist darauf hin, dass A eine Arbeitsleistung (cmkg) bezogen auf ein Einheitsvolumen (cm^3) darstellt. — Setzt man an Stelle von 600 atm jetzt 1850 atm in den vorstehenden Ausdruck ein, so wird

$$A = \frac{1850^2}{4 \cdot 10^6} = 0{,}856 \frac{\text{cmkg}}{\text{cm}^3}.$$

Die Formänderungsarbeit hat sich daher um 0,766 erhöht. Diese potentielle Energie ist nicht durch Aufwand von Arbeit äusserer Kräfte hervorgebracht worden, kann sich aber gleichwohl jederzeit in solche verwandeln. Sie hat ihren Ursprung in einem Theile der dem Stabe bei der Temperaturerhöhung zugeführten Wärme, der in mechanische Energie umgewandelt wird. Man erkennt daraus, dass die specifische Wärme des Stabes im gespannten und im ungespannten Zustande etwas verschieden sein muss, und dass überhaupt ein Zusammenhang zwischen dem elastischen Formänderungszustande und dem Wärmezustande bestehen muss. Die weitere Erörterung dieses Zusammenhanges ist eine Aufgabe der mechanischen Wärmetheorie; in der Festigkeitslehre sind diese Erscheinungen ohne Bedeutung, und man kann sie daher hier gewöhnlich vollständig vernachlässigen. Es möge nur noch bemerkt werden, dass ein Stab, der ohne Zufuhr oder Ableitung von Wärme gedehnt wird, sich dabei ein wenig abkühlt. In der Festigkeitsmaschine bemerkt man diese Abkühlung nicht, da sie sich nur auf Tausendstel Grade beläuft. Dies gilt indessen nur so lange als die Elasticitätsgrenze nicht überschritten wird. Von da ab wird die äussere Arbeit nicht mehr ausschliesslich in Form von potentieller Energie aufgespeichert, sondern zum Theil in Wärme umgewandelt, die beim Abreissen eines Stabes eine recht beträchtliche Temperaturerhöhung bewirkt.

Dritter Abschnitt.

Biegung des geraden Stabes.

---

§ 13. Begriff der Biegung. Willkürliche Annahmen von Bernouilli und Navier.

An einem stabförmigen Körper mögen sich beliebig gegebene äussere Kräfte das Gleichgewicht halten. Ich denke mir den Stab an irgend einer Stelle durchschnitten. An jedem der beiden Theile des Stabes müssen die Spannungen, die in dem Querschnitte übertragen werden, im Gleichgewichte mit den äusseren Kräften stehen, die an diesem Theile angreifen. Um hierauf die Gleichgewichtsbedingungen der gewöhnlichen Statik anwenden zu können, brauchen wir übrigens nicht genauer zu wissen, wie sich die äusseren Kräfte am einen Theil des Stabes vertheilen; es genügt dazu, wenn wir eine Resultirende oder überhaupt ein äquivalentes Kräftesystem dafür angeben können.

In der That besteht der erste Schritt zur Berechnung der Spannungen, die in einem Querschnitte übertragen werden, immer darin, dass man die äusseren Kräfte am einen Theile des Stabes nach den Regeln über die Zusammensetzung von Kräften zusammenfasst. Man denkt sich jede äussere Kraft nach einem bestimmten Punkte hin parallel verlegt, und zwar wählt man dazu am besten den Schwerpunkt des Querschnitts. Bei dieser Parallelverlegung tritt jedesmal noch ein Kräftepaar auf. Dann setzt man alle Kräfte am Querschnittsschwerpunkte zu einer Resultirenden und ebenso alle Kräftepaare zu

einem resultirenden Paare zusammen. Die äusseren Kräfte sind dann zu einer Einzelkraft, die durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht und zu einem Kräftepaare, das man in seiner Ebene oder parallel zu ihr beliebig verschieben kann, zusammengesetzt, und man weiss, dass die im Querschnitte übertragenen Spannungen, um Gleichgewichte herzustellen, eine Einzelkraft und ein Kräftepaar liefern müssen, die jenen genau entgegengesetzt sind.

Je nach dem Ergebniss der vorhergehenden Kräftezusammensetzung unterscheidet man verschiedene Beanspruchungsarten des Stabes. Wenn das resultirende Kräftepaar verschwindet und die durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehende Resultirende in der Richtung der Stabaxe geht, haben wir den schon wiederholt besprochenen Fall der einfachen Zug- oder Druckbelastung. Ist das Kräftepaar immer noch Null, die Resultirende aber senkrecht zur Stabaxe gerichtet, so ist der Stab auf Abscheeren belastet. Dieser Fall wird aber immer nur bei einzelnen Querschnitten eintreten. Sobald man den Querschnitt ein wenig verrückt, kommt zu der Scheerkraft noch ein Kräftepaar, das der Parallelverlegung der vorher gefundenen Resultirenden nach dem Schwerpunkte des neuen Querschnitts entspricht.

Wenn sich andererseits alle äusseren Kräfte am einen Theile des Stabes auf ein Kräftepaar zurückführen lassen, die vorher erwähnte Resultirende also zu Null wird, so liegt der Fall der reinen Biegungsbeanspruchung vor, falls die Ebene des Kräftepaars durch die Stabaxe geht (oder parallel zu ihr ist). Steht dagegen diese Ebene senkrecht zur Stabaxe, so haben wir den Fall der ausschliesslichen Beanspruchung auf Torsion (auf Verdrehung oder auf Verwindung). Wenn die Ebene des Kräftepaars einen beliebigen Winkel mit der Stabaxe einschliesst, ist das Kräftepaar in zwei Componenten zu zerlegen, von deren Ebenen die eine parallel, die andere senkrecht zur Stabaxe steht. Der Stab wird dann gleichzeitig von dem einen Kräftepaare auf Biegung und von dem anderen auf Verwindung beansprucht. Nach dem Gesetze der

Superposition, das für die meisten Materialien gültig ist (für Steine und Gusseisen aber nicht), genügt es, den Spannungszustand, der durch jedes dieser Kräftepaare hervorgerufen wird, für sich zu ermitteln, denn man erhält den wirklich eintretenden Spannungszustand durch Uebereinanderlagerung jener beiden Spannungszustände. Wie diese Zusammensetzung auszuführen ist, habe ich schon in den vorausgehenden Abschnitten gezeigt; es wird sich also jetzt nur noch darum handeln, den Spannungszustand für jeden einfachen Belastungsfall zu erforschen. Für Körper, bei denen das Superpositionsgesetz ungültig ist, vermag man Aufgaben dieser Art überhaupt nicht genau zu lösen. Man behilft sich damit, dass man sie so wie die anderen berechnet und dabei in Erinnerung behält, dass die Lösung nur ungefähr richtig sein kann.

Auch dann, wenn weder die Resultirende im Schwerpunkte des Querschnitts noch das resultirende Kräftepaar verschwindet, wird der Körper auf zusammengesetzte Festigkeit — wie man zu sagen pflegt — beansprucht. Dies gilt also auch für den Fall, dass die Resultirende im Schwerpunkte senkrecht zur Stabaxe steht und die Ebene des resultirenden Kräftepaars durch die Stabaxe geht; wir haben dann gleichzeitig Belastung auf Abscheeren und auf Biegung. Indessen kommt dieser Fall so häufig vor, dass er geradezu die Regel bei den praktischen Anwendungen der Theorie bildet, und man ist daher übereingekommen, ihn von vornherein als den allgemeinsten Fall der Biegungsbeanspruchung zu bezeichnen. Von zusammengesetzter Festigkeit pflegt man also, insofern ein biegendes Kräftepaar dabei betheiligt ist, nur dann zu reden, wenn ausserdem noch eine Zug- oder Druckbelastung oder eine Verwindung hinzutritt, d. h. wenn die Resultirende im Querschnittsschwerpunkte nicht senkrecht zur Stabaxe steht oder wenn die Ebene des resultirenden Kräftepaars nicht parallel zur Stabaxe ist.

Für die Gleichgewichtsbedingungen der äusseren Kräfte mit den im Querschnitte übertragenen Spannungen kommt von den Kräftepaaren ausser der Ebene, in der sie wirken, nur noch die Grösse und der Sinn ihres statischen Momentes

in Betracht. Insofern es sich um ein Kräftepaar handelt, das eine Biegung hervorbringt, dessen Ebene also durch die Stabaxe geht, bezeichnet man dieses statische Moment als das Biegungsmoment, während das Moment eines Kräftepaars, dessen Ebene senkrecht zur Stabaxe steht, als Torsionsmoment (Verdrehungs- oder Verwindungsmoment) bezeichnet wird.

Auch die beiden Componenten der im Schwerpunkte des Querschnittes angreifenden Resultirenden werden durch besondere Namen unterschieden. Die in die Richtung der Stabaxe fallende wird im Allgemeinen als axiale Belastung (oder mit Hervorhebung des Vorzeichens als Zug- oder Druckbelastung) und die senkrecht zu dieser Richtung stehende als Scheerkraft bezeichnet.

Für den allgemeinen Fall der Biegung, wie er vorher beschrieben wurde, genügt es hiernach, wenn man für jeden Querschnitt, den man in Betracht ziehen will, das Biegungsmoment und die Scheerkraft angeben kann. Man braucht sich dann nicht weiter darum zu kümmern, wie sich die äusseren Kräfte im Uebrigen über den Stab vertheilen. Natürlich ist es auch gleichgültig, ob man diese beiden Grössen für den einen oder den anderen der beiden Theile des Stabes, die durch den betreffenden Querschnitt getrennt sind, aufsucht. Nimmt man den anderen Theil, so kehren sich die Richtungen beider Grössen um, da alle äusseren Kräfte des ganzen Stabes nach Voraussetzung im Gleichgewichte mit einander stehen. Gleichzeitig kehren sich dann aber auch die Richtungen aller Spannungen im Querschnitte um, so dass es in der That einerlei ist, ob man das Gleichgewicht des einen oder des anderen Stabtheiles untersucht. Es geschieht nur aus Bequemlichkeit, dass man von dem in horizontaler Lage gezeichneten Stab immer das Gleichgewicht der Kräfte an dem links vom Querschnitte liegenden Theile betrachtet.

Fast immer liegen bei Biegungsaufgaben alle Kräfte, die am Stabe angreifen, in derselben Ebene (gewöhnlich in einer lothrechten); namentlich liegt aber, wenn dies auch einmal

nicht zutreffen sollte, wenigstens die Scheerkraft in derselben Ebene mit dem biegenden Kräftepaare. Wir wollen dies daher ein für alle Male voraussetzen. Wenn es ausnahmsweise nicht zutrifft, kann man übrigens die Rechnung auf Grund der hier gegebenen Betrachtungen ebenfalls ohne jede Schwierigkeit durchführen.

Das Biegungsmoment wird hier immer mit M bezeichnet; es soll positiv gerechnet werden, wenn in der Zeichnung des Stabes (die von irgend einer der beiden Ansichtsflächen aus aufgenommen sein kann) das Kräftepaar der äusseren Kräfte für sich genommen den linken Theil des Stabes im Sinne des Uhrzeigers zu drehen sucht. Die Scheerkraft wird stets mit V bezeichnet und sie gilt als positiv, wenn sie am linken Theile des Stabes in der Zeichnung nach oben hin gerichtet ist. Diese Festsetzungen sind in der technischen Mechanik ganz allgemein eingeführt und man muss sich daher, obschon sie an sich willkürlich sind, daran halten.

Die nächste Aufgabe, die uns gestellt ist, besteht darin, die Spannungen zu berechnen, die in den einzelnen Theilen des Querschnitts auftreten, wenn M und V gegeben sind. Wir wollen sie zuerst noch dadurch vereinfachen, dass wir den Fall der reinen Biegung voraussetzen, also $V = 0$ annehmen. Auf den allgemeineren Fall werden wir dann leicht dadurch gelangen, dass wir die durch V für sich bewirkten Spannungen hinzufügen. Der Fall der reinen Biegung (ohne Scheerbeanspruchung) liegt z. B. im mittleren Theile einer Eisenbahnwagenaxe vor oder auch bei der in Abb. 17 schematisch gezeichneten Belastung des Stabes.

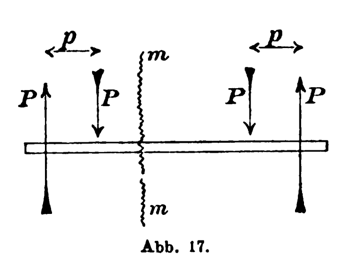


Abb. 17.

Für den Querschnitt mm, der irgendwo im mittleren Abschnitte des Stabes gezogen sein kann, reduciren sich alle äusseren Kräfte am linken Theile des Stabes auf ein Kräftepaar, dessen Moment $= Pp$ und das nach den vorausgehenden Vorzeichenbestimmungen positiv zu rechnen ist.

Die Aufgabe, die Spannungen zu berechnen, ist statisch unbestimmt. Wenn wir auf die elastischen Formänderungen keine Rücksicht zu nehmen hätten, könnten wir jede beliebige Vertheilung der Spannungen über den Stabquerschnitt als gleich gut möglich ansehen, wenn sie nur zu einem Kräftepaare vom Momente M führte.

Ueber die elastische Formänderung, die der Stab unter dem Einflusss der in Abb. 17 angegebenen Kräfte erfährt, lässt sich zunächst nur aussagen, dass sich die Angriffspunkte der Kräfte im Sinne dieser Kräfte relativ gegen einander etwas verschieben müssen. Denkt man sich diese Angriffspunkte alle auf der Stabaxe gelegen, so werden die Verbindungslinien der aufeinanderfolgenden Angriffspunkte nach der Formänderung einen Linienzug bilden, der nach oben hin hohl ist. Wegen der Stetigkeit des Zusammenhangs kann aber die Stabaxe selbst an keiner Stelle einen Knick erfahren; die ursprünglich gerade Stabaxe wird daher in eine flache Curve übergehen. Diese Curve heisst die elastische Linie des gebogenen Stabes.

Diese allgemeinen Bemerkungen sind noch zu unbestimmt, um ein Urtheil über die Vertheilung der Spannungen über den Querschnitt darauf gründen zu können. Um diese Unbestimmtheit zu heben, nimmt man an, dass jeder Querschnitt, der senkrecht zur Stabaxe gezogen wurde, nach der Formänderung eben bleibt. Diese Annahme wird zunächst rein willkürlich eingeführt; sie ist zuerst von Bernouilli aufgestellt worden und dient seit den Arbeiten von Navier allgemein als Ausgangspunkt der Biegungslehre in der technischen Mechanik.

Gegen die Einführung einer solchen Annahme ohne jede weitere Begründung ist natürlich ein ernstes Misstrauen am Platze. In der That wird man sich durchaus nicht befriedigt fühlen können, wenn diese Annahme, wie es oft genug geschieht, in der Form eines Axioms eingeführt wird. Besser ist es, sie als einen Satz hinzustellen, der seine Rechtfertigung dadurch findet, dass die aus ihm gezogenen Folgerungen im Einklange mit der Erfahrung sind.

In einem späteren Abschnitte werden wir sehen, dass man die Zulässigkeit der Bernouilli'schen Annahme auch noch einer strengeren Prüfung unterwerfen kann. Für Körper, die dem Hooke'schen Gesetze gehorchen, werden wir sie bei jener Gelegenheit wenigstens für den Fall der reinen Biegung bestätigt finden. Für andere Körper kann indessen nur durch eine unmittelbare Beobachtung festgestellt werden, ob und bis zu welchem Grade der Genauigkeit sie in Wirklichkeit erfüllt ist.

Eine solche Prüfung habe ich auf folgende Weise vorgenommen. Ein Steinbalken von 20×30 cm Querschnitt wurde auf 150 cm Spannweite frei aufgelagert und in der Mitte belastet. Die Lastebene war parallel der grösseren Querschnittsseite. Auf den Ansichtsflächen des Balkens liess ich mehrere Reihen von kleinen Stiften einkitten, auf die man Spiegel aufschraubte. Wenn der Balken belastet wurde, drehten sich diese Spiegel zusammen mit dem Theile des Balkens, an dem sie befestigt waren. Die kleine Drehung der Spiegel wurde mit Hülfe eines Fernrohrs beobachtet. Dabei zeigte sich, dass alle Spiegel, die zu demselben Querschnitte gehörten, ziemlich genau dieselbe Drehung ausführten. Das ist aber in der That nur möglich, wenn der Querschnitt — mit dem gleichen Grade der Annäherung — eben bleibt. Zum mindesten ist zu schliessen, dass die Umfangsseiten des Querschnittsumrisses gradlinig geblieben sind. Denn wenn sich eine dieser Seiten merklich krümmen sollte, müssten verschiedene Linienelemente der Seite verschiedene Winkel mit der Anfangslage bilden und die verschiedene Drehung hätte sich bei der Beobachtung der Spiegel verrathen müssen.

Es kann daher als nachgewiesen gelten, dass auch selbst bei solchen Materialien, die dem Hooke'schen Gesetze nicht gehorchen, die Bernouilli'sche Annahme als hinreichend genau zutreffend angesehen werden kann. Unter „hinreichend genau“ ist hier ein solcher Grad der Annäherung zu verstehen, der die weiteren Schlüsse aus der Bernouilli'schen Annahme vor den gröbsten Fehlern schützt; namentlich ist die Krümmung

der Querschnitte im Allgemeinen nicht erheblich gegenüber der Krümmung, die die Stabaxe erfährt.

Für den Fall der reinen Biegung (Scheerkraft $V = 0$) haben wir keine Veranlassung, ein Auftreten von Schubspannungen im Querschnitte zu vermuthen. Zum mindesten müssten alle Schubspannungen unter sich im Gleichgewichte mit einander stehen. Wenn der Querschnitt in der That genau eben bleiben soll, können aber überhaupt keine Schubspannungen übertragen werden, denn diese hätten Winkeländerungen γ zur Folge, die an verschiedenen Stellen nicht nur von verschiedener Grösse, sondern auch von entgegengesetztem Vorzeichen sein müssten. Es handelt sich dabei um die ursprünglich rechten Winkel zwischen der Querschnittsebene und den zur Stabaxe parallel gezogenen Linien. Wenn sich diese an verschiedenen Stellen um verschiedene Beträge änderten, könnte der Querschnitt offenbar nicht eben bleiben.

Wir werden also festhalten, dass für den Fall $V = 0$ auch die Schubspannungen τ überall im Querschnitte gleich Null zu setzen sind. Daraus folgt dann sofort weiter, dass der Querschnitt nach der Formänderung senkrecht zur elastischen Linie steht.

Man betrachte jetzt ein Längenelement des Stabes, das zwischen zwei aufeinanderfolgenden Querschnitten liegt. Nach der Formänderung schneiden sich die beiden Querschnittsebenen in einer Geraden, die durch den Krümmungsmittelpunkt der elastischen Linie geht. Jedem Flächenelemente dF des Querschnitts entspricht ein Theil des Stabes, den wir als eine Faser bezeichnen wollen. Die zwischen den aufeinanderfolgenden Querschnitten liegenden Fasern waren ursprünglich gleich lang; nach der Formänderung sind aber die auf der Hohlseite der elastischen Linie liegenden kürzer als die auf der convexen Seite — und zwar verhalten sich die Längen unmittelbar wie die Abstände der Fasern vom Krümmungsmittelpunkte der elastischen Linie. Den Längenänderungen, die diese Fasern erfuhren, entsprechen nach dem Elasticitätsgesetze die

Normalspannungen σ, die in den Querschnittselementen übertragen werden.

Wir wissen schon, dass sich die Normalspannungen σ zu einem Kräftepaare vom Momente M zusammensetzen müssen. Daraus folgt, dass im Querschnitte sowohl Zug- als Druckspannungen übertragen werden. Die Fasern auf der convexen Seite sind also jedenfalls länger geworden, als sie ursprünglich waren und die auf der Hohlseite haben sich verkürzt. Dazwischen liegt eine Faserschicht, die sich weder verkürzt noch verlängert hat. Die ihr im Querschnitte entsprechende Linie wird die neutrale Axe oder auch die Nulllinie des Querschnitts genannt.

Proportional mit dem Abstande von der neutralen Axe wachsen die elastischen Längenänderungen der Fasern. Wenn das Hooke'sche Gesetz gilt, müssen wir daher schliessen, dass auch die Normalspannungen σ, die im Querschnitte übertragen werden, ihrem Abstande von der neutralen Axe proportional zu setzen sind. Diesen wichtigen Schluss hat zuerst Navier aus der Bernouilli'schen Annahme gezogen.

Diese ganze Betrachtung lässt sich auch noch durch eine andere ersetzen. Ohne uns auf die an sich willkürliche Bernouilli'sche Annahme zu stützen, können wir davon ausgehen, dass im Querschnitte jedenfalls sowohl Zug- als Druckspannungen übertragen werden müssen. Die Normalspannung σ in irgend einem Punkte des Querschnitts kann dann als eine zunächst unbekannte Function der Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf zwei im Querschnitte rechtwinklig zu einander gezogene Coordinatenaxen der y und z betrachtet werden. Wir setzen also

$$\sigma = f(yz).$$

Immer wenn man keinen bestimmten Anhaltspunkt für die Form einer solchen unbekannten Function hat, versucht man zunächst, mit den einfachsten Annahmen dafür auszukommen. Dass σ nicht constant sein kann, hat uns schon die oberflächlichste Betrachtung der elastischen Formänderung gelehrt. Die hiernach noch mögliche einfachste Annahme

besteht darin, dass σ eine Function ersten Grades der Querschnittscoordinaten $y\,z$ ist. Das ist aber gerade die von Navier vorausgesetzte oder aus der Bernouilli'schen Voraussetzung gefolgerte Spannungsvertheilung.

Diese Art der Begründung unseres Ansatzes hat den Vorzug, dass sie nicht den Anschein erweckt, als ob es sich dabei um ein streng gültiges Naturgesetz handle; wir treten in die weitere Untersuchung sofort mit dem Bewusstsein ein, dass unsere Biegungstheorie nur angenäherte Gültigkeit hat und werden dadurch vor dem häufig vorkommenden Fehler bewahrt, alle Folgerungen, die daraus fliessen, als buchstäblich genau anzusehen. Der fortwährende Vergleich unserer Rechnungen mit den Beobachtungsthatsachen allein kann uns zeigen, wie weit wir diesen Rechnungen vertrauen dürfen. Mit dem blossen Nachgrübeln ist es hier nicht gethan. In anderen Gebieten der Mechanik, die ausschliesslich auf streng gültigen Naturgesetzen beruhen, ist man damit — wenn man dies so auffassen will — in günstigerer Lage. Man kann dort unter Umständen die wichtigsten Entdeckungen bloss am Schreibtische machen. In der Festigkeitslehre müssen aber die theoretisch abgeleiteten Folgerungen immer erst durch den Versuch geprüft werden, ehe man volles Vertrauen in sie setzen darf. Glücklicherweise liegt eine solche Bestätigung durch den Versuch indessen in fast allen wichtigeren Fällen schon vor und man braucht daher die Besorgniss gegen die theoretischen Lehren auch nicht zu übertreiben.

Eine Function ersten Grades wird auch als eine lineare Function bezeichnet, weil sie durch das Bild einer geraden Linie — oder bei zwei unabhängigen Veränderlichen durch eine Ebene — zur Darstellung gebracht werden kann. Denken wir uns also in jedem Punkte des Querschnitts die dort auftretende Normalspannung σ durch eine in deren Richtung gezogene Strecke in einem beliebigen Maassstabe dargestellt, so liegen die Endpunkte aller dieser Strecken nach Navier auf einer Ebene, die die Querschnittsebene in der Nulllinie schneidet. In Anlehnung an jenen Sprachgebrauch bezeichnet man das Navier'sche

Spannungsvertheilungsgesetz auch als das lineare oder als das Gradliniengesetz. Die Bezeichnungen „lineare Spannungsvertheilung“ und „linearer Spannungszustand“ dürfen nicht verwechselt werden. Bei der letzten denkt man nur an die Spannungen, die in demselben Punkte nach verschiedenen Richtungen hin auftreten; bei der ersten handelt es sich nur um Spannungen für dieselbe Schnittrichtung, die aber in verschiedenen Punkten des Querschnitts vorkommen. Im Falle der „reinen“ Biegungsbeanspruchung ist übrigens auch der Spannungszustand in jedem Punkte linear.

§ 14. Folgerungen aus dem Gradliniengesetz.

Wir denken uns die Coordinatenaxen der y und z im Querschnitte so gelegt, dass die Z-Achse mit der Nulllinie zusammenfällt. Dann ist σ überall unabhängig von z, und da es zu Null wird für $y = 0$, verschwindet auch das constante Glied, das in der linearen Function im Allgemeinen auftritt. Bezeichnen wir die Spannung in irgend einem bestimmten Punkte, der den Abstand y_0 von der Nulllinie hat, mit σ_0, so hat man für jeden anderen Punkt nach dem Gradliniengesetz

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{y}{y_0} \quad \text{oder} \quad \sigma = y \cdot \frac{\sigma_0}{y_0}. \tag{45}$$

Im Falle der reinen Biegung müssen die Normalspannungen ein Kräftepaar liefern; die Summe der Zugspannungen muss daher gleich der Summe der Druckspannungen sein. Dabei ist zu beachten, dass Gl. (45) die Spannung σ auch schon dem Vorzeichen nach richtig angibt, indem die nach verschiedenen Seiten der Nulllinie gerichteten Abstände y mit entgegengesetzten Vorzeichen zu rechnen sind. Wir können daher auch einfacher sagen, dass die algebraische Summe aller Normalspannungen für den ganzen Querschnitt gleich Null sein muss. In Form einer Gleichung heisst dies

$$\int \sigma dF = 0,$$

wenn die Summirung über den ganzen Querschnitt ausgeführt wird. Nach Einsetzen von σ aus Gl. (45) wird daraus

$$\int \frac{\sigma_0}{y_0} y dF = \frac{\sigma_0}{y_0} \int y dF = 0 \quad \text{oder} \int y dF = 0. \qquad (46)$$

Die Summe $\int y dF$ stellt aber das statische Moment der Querschnittsfläche in Bezug auf die Z-Axe dar, und die Bedingung, dass dieses Moment Null sein muss, lehrt uns, dass die mit der Z-Axe zusammenfallende Nulllinie durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht.

Ferner muss das statische Moment des aus den Spannungen gebildeten Kräftepaars gleich dem Biegungsmomente M sein. Dabei genügt es indessen nicht, dass beide nur der Grösse nach einander gleich sind; beide Kräftepaare müssen vielmehr auch in derselben Ebene liegen — und wir werden nachher sehen, dass diese letzte Bedingung ebenso wichtig ist, als die andere. Wenn der Querschnitt des Stabs, wie es sehr häufig bei den Anwendungen der Fall ist, symmetrisch gestaltet ist und alle äusseren Kräfte in der Symmetrieebene liegen, ist diese Bedingung freilich von selbst erfüllt, sobald man die Nulllinie, wie es wegen der Symmetrieeigenschaften nicht anders sein kann, senkrecht zur Symmetrieebene annimmt. Wir wollen hier zunächst den einfachsten Fall behandeln, nämlich den Fall, dass die Nulllinie in der That senkrecht zur Ebene des Kräftepaars M steht. Dagegen wollen wir nicht gerade von vornherein annehmen, dass der Querschnitt symmetrisch gestaltet sei; vielmehr wollen wir ganz allgemein untersuchen, unter welchen Bedingungen dieser einfachste Fall eintritt.

Die Momentengleichung für die Nulllinie (oder die Z-Axe) liefert

$$\int \sigma dF y = M$$

oder, wenn man σ aus Gl. (45) einsetzt,

$$\frac{\sigma_0}{y_0} \int y^2 dF = M. \qquad (47)$$

Die über den ganzen Querschnitt ausgedehnte Summengrösse $\int y^2 dF$ ist nur noch von der Gestalt des Querschnittes abhängig und kann, wenn diese gegeben ist, entweder durch Ausführung der Integration oder, wenn diese zu viel Schwierigkeit machen sollte, durch eine mechanische Quadratur immer leicht berechnet werden. Sie wird das Trägheitsmoment des Querschnitts für die Z-Axe genannt. Bezeichnet man dieses mit Θ, so folgt aus Gl. (47)

$$\sigma_0 = \frac{M}{\Theta} y_0. \tag{48}$$

Damit ist die Aufgabe gelöst, für irgend einen vorher in's Auge gefassten Punkt des Querschnitts mit dem Abstande y_0 von der Z-Axe die Spannung σ_0 zu berechnen. Mit Rücksicht auf Gl. (45) kann man auch die Zeiger 0 in Gl. (48) nachträglich noch streichen.

Gewöhnlich will man die grösste Spannung σ berechnen, die überhaupt im Querschnitte auftritt. Man hat dann unter y_0 in Gl. (48) den grössten Abstand von der Nulllinie zu verstehen, der im Querschnitte vorkommt. In diesem Falle kann man die beiden nur von der Querschnittsgestalt abhängigen Grössen in Gl. (48) zu einer einzigen zusammenfassen, indem man setzt

$$\frac{\Theta}{y_0} = W. \tag{49}$$

Die Grösse W wird das Widerstandsmoment des Querschnitts genannt. Hiermit geht Gl. (48) über in

$$\sigma = \frac{M}{W}, \tag{50}$$

wobei der Zeiger der Einfachheit wegen weggelassen ist, obschon man sich wohl zu erinnern hat, dass diese Spannung σ nur an der äussersten Kante auftritt. Aus der Bedeutung von Θ folgt, dass es eine Grösse von der Dimension cm^4 ist, d. h. dass es die vierte Potenz einer Länge darstellt. Die Dimension von W ist cm^3. In den von den Hüttenwerken herausgegebenen Verzeichnissen der von ihnen gewalzten Eisenträger ist zur Bequemlichkeit des Benutzers für jedes Profil sowohl

Θ als W angegeben. Gewöhnlich beziehen sich diese Angaben auf 1 mm als Längeneinheit; will man in cm rechnen, wie es hier immer geschieht, so muss man demnach bei Θ vier und bei W drei Stellen abschneiden.

Um uns zu überzeugen, dass Gl. (48) den Dimensionen nach richtig ist, setzen wir die Dimensionen der auf der rechten Seite vorkommenden Grössen ein, indem wir die zugehörigen Zahlenwerthe unbeachtet lassen. Wir erhalten dann, da M in cm kg anzugeben ist,

$$\frac{\text{cm kg}}{\text{cm}^4} \cdot \text{cm} = \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2},$$

und dies ist in der That die Dimension einer specifischen Spannung.

Die vorausgehenden Gleichungen gelten aber nur unter der Voraussetzung, von der aus sie abgeleitet sind, dass nämlich die Nulllinie senkrecht zur Ebene des Biegungsmoments M steht. Ob und unter welchen Umständen diese Voraussetzung zutrifft, lehrt uns eine zweite Momentengleichung, die ausspricht, dass die Ebene des aus den Spannungen σ zusammengesetzten Kräftepaars mit der Ebene des Biegungsmoments zusammenfällt. Dazu bilden wir die statischen Momente in Bezug auf die Y-Achse des Querschnitts. Diese Axe sei in der Ebene des Biegungsmoments angenommen, also durch den Querschnittsschwerpunkt senkrecht zur Nulllinie gezogen, und das statische Moment der äusseren Kräfte ist daher für sie gleich Null. Dasselbe muss also auch von dem statischen Momente der Spannungen zutreffen. Wir haben also

$$\int \sigma dFz = 0 \qquad \text{oder} \int zydF = 0, \tag{51}$$

wobei die letzte Form der Gleichung wieder durch Einsetzen von σ aus Gl. (45) aus der vorhergehenden gefunden wird.

Auch die Summengrösse $\int yzdF$ hängt nur von der Gestalt des Querschnitts und von der Richtung der Schwerpunktsaxe ab, die mit der Nulllinie zusammenfällt. Alle Summengrössen, die über den Querschnitt zu erstrecken sind

und die Producte aus den Flächenelementen und den Querschnittscoordinaten enthalten, bezeichnet man als Momente und bemisst deren Grad nach der Zahl der Querschnittscoordinaten, die als Factoren in jenen Producten auftreten. Wie das Trägheitsmoment ist daher auch $\int yz dF$ als ein Moment zweiten Grades des Querschnitts zu bezeichnen. Man hat ihm noch die besonderen Namen „Centrifugalmoment“ oder auch „Deviationsmoment“ gegeben. Es soll mit Φ bezeichnet werden, wobei die besonderen Axenrichtungen durch angehängte Zeiger kenntlich gemacht werden können. Gl. (51) kann hiernach auch in der Form

$$\Phi_{yz} = 0 \tag{52}$$

ausgesprochen werden. Damit ist die gesuchte Bedingung gefunden; nur dann, wenn das Centrifugalmoment des Querschnitts für ein durch den Schwerpunkt gelegtes rechtwinkliges Axenkreuz, von dem eine Axe in die Ebene des Moments der äusseren Kräfte fällt, gleich Null ist, können die Spannungen nach den einfachen Formeln (48) oder (50) berechnet werden.

Ein Trägheitsmoment kann nie zu Null werden, da es sich aus lauter positiven Gliedern zusammensetzt. Dagegen tragen alle Flächentheile des Querschnitts, die im ersten und dritten Quadranten des Axenkreuzes liegen, positive, alle im zweiten und vierten Quadranten negative Glieder zum Centrifugalmomente bei. Das Centrifugalmoment kann daher ebensowohl negativ als positiv oder gleich Null werden. Der letzte Fall wird, wie man ohne Weiteres einsieht, immer bei symmetrischen Querschnitten eintreten, wenn eine Axe des Axenkreuzes mit der Symmetrieaxe zusammenfällt, denn die Beiträge von je zwei spiegelbildlich zu einander liegenden Flächentheilen heben sich gegen einander gerade auf.

Ehe wir die Berechnung der Spannungen auf den Fall ausdehnen, dass Φ_{yz} nicht gleich Null ist, müssen wir einige geometrische Betrachtungen über die Momente zweiten Grades einschalten.

§ 15. Trägheits- und Centrifugalmomente von Querschnittsflächen.

Wir wollen uns zunächst die Aufgabe stellen, die Trägheitsmomente eines Querschnitts für alle Axen, die man in der Querschnittsebene ziehen kann, unter einander zu vergleichen. In Abb. 18 gebe die schraffirte Fläche eine Querschnittsfläche von beliebiger Gestalt an; AA sei die Axe, für die man das Trägheitsmoment berechnen soll und S sei der Schwerpunkt der Fläche. Man ziehe durch S eine zweite Axe, die zu AA parallel ist. Das Trägheitsmoment für diese Schwerpunktsaxe sei einfach mit Θ, das für die Axe AA, die den Abstand a von S hat, mit Θ_a bezeichnet. Der Abstand eines Flächenelementes dF von der Schwerpunktsaxe sei gleich y, das positiv oder negativ gerechnet werden soll, je nachdem es in entgegengesetzter oder in gleicher Richtung mit a liegt.

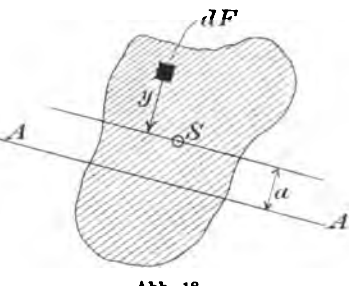


Abb. 18.

Dann hat man

$$\Theta_a = \int (y + a)^2 dF = \int y^2 dF + 2a \int y dF + a^2 \int dF.$$

Das erste Glied gibt das Trägheitsmoment Θ für die Schwerpunktsaxe an. Das zweite Glied ist gleich Null, denn $\int y dF$ ist das statische Moment der Querschnittsfläche für eine durch den Schwerpunkt gehende Axe und dieses verschwindet für alle Schwerlinien. Im dritten Gliede kann man $\int dF$ zur ganzen Querschnittsfläche F zusammenfassen. Die vorige Gleichung vereinfacht sich daher zu

$$\Theta_a = \Theta + a^2 \cdot F. \tag{53}$$

Man kann hiernach auf sehr einfache Weise für alle übrigen Axen die Trägheitsmomente angeben, sobald man sie für alle Schwerpunktsaxen kennt. Dieser Satz wird häufig gebraucht, um das Trägheitsmoment eines Querschnitts zu be-

rechnen, der sich aus verschiedenen Flächen von einfacher Gestalt, z. B. aus lauter Rechtecken, wie der I-förmige Querschnitt zusammensetzt, wovon bei den Aufgaben noch weiter die Rede sein wird.

Es handelt sich jetzt nur noch darum, die Trägheitsmomente für die in verschiedenen Richtungen durch den Schwerpunkt gezogenen Axen mit einander zu vergleichen. Wir legen in Abb. 19 durch den Schwerpunkt in beliebiger Richtung ein rechtwinkliges Axenkreuz der YZ und ziehen noch eine dritte Schwerlinie AA, die mit der Y-Richtung den beliebigen Winkel α bildet. Die Coordinaten eines Flächenelementes dF seien mit yz, der Abstand zwischen dF und AA mit v und der Abschnitt, den v auf AA von S an gerechnet bildet, mit u bezeichnet. Dann ist

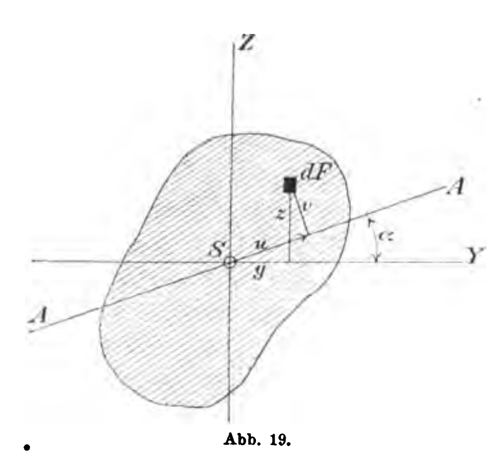


Abb. 19.

$$u = y \cos\alpha + z \sin\alpha$$
$$v = - y \sin\alpha + z \cos\alpha .$$

Für das Trägheitsmoment Θ_α in Bezug auf die Axe AA erhalten wir

$$\Theta_\alpha = \int v^2\, dF = \int (z \cos\alpha - y \sin\alpha)^2 dF .$$

Beim Ausquadriren geht dies über in

$$\Theta_\alpha = \cos^2\alpha \int z^2 dF + \sin^2\alpha \int y^2 dF - 2 \sin\alpha \cos\alpha \int yz\, dF .$$

Die hier noch vorkommenden Summengrössen bilden aber die Momente zweiten Grades für die Coordinatenaxen der y und z. Versteht man unter Θ_y das Trägheitsmoment in Bezug auf die Y-Axe, also

$$\Theta_y = \int z^2 dF$$

und entsprechend bei den anderen Momenten, so hat man auch

$$\Theta_\alpha = \cos^2\alpha\, \Theta_y + \sin^2\alpha\, \Theta_z - \sin 2\alpha\, \Phi_{yz}. \tag{54}$$

Wir bilden sofort auch das Centrifugalmoment Φ_α für die Axe AA und eine zu ihr senkrecht gezogene. Nach der Definition des Centrifugalmoments ist

$$\Phi_\alpha = \int uv\, dF = \int (y \cos\alpha + z \sin\alpha)(-y \sin\alpha + z \cos\alpha) dF.$$

Nach Ausmultipliciren und Einsetzen der Werthe für die dabei auftretenden Summengrössen, geht dies über in

$$\Phi_\alpha = \frac{\Theta_y - \Theta_z}{2} \sin 2\alpha + \Phi_{yz} \cos 2\alpha. \tag{55}$$

Mit Hülfe der Gleichungen (54) und (55) vermögen wir die Momente zweiten Grades für alle anderen Schwerpunktsaxen anzugeben, wenn sie für irgend zwei zu einander senkrechte Axen bereits bekannt sind. Wir wollen jetzt untersuchen, für welche Richtungen der Schwerpunktsaxe das Trägheitsmoment zu einem Maximum oder Minimum wird. Dazu differentiiren wir Θ_α nach α und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{d\Theta_\alpha}{d\alpha} &= -2\cos\alpha \sin\alpha\, \Theta_y + 2 \sin\alpha \cos\alpha\, \Theta_z - 2\cos 2\alpha\, \Phi_{yz} \\ &= (\Theta_z - \Theta_y) \sin 2\alpha - 2 \cos 2\alpha\, \Phi_{yz} \\ &= -2\Phi_\alpha.\end{aligned}$$

Für ein Maximum oder Minimum von Θ_α muss der Differentialquotient verschwinden und wir sehen, dass dies bei jenen Axen zutrifft, für die das Centrifugalmoment verschwindet. Durch Auflösen der Gleichung $\Phi_\alpha = 0$ erhalten wir für diese ausgezeichneten Richtungen

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\Phi_{yz}}{\Theta_z - \Theta_y}. \tag{56}$$

Welchen Werth auch der Bruch auf der rechten Seite haben möge, man kann immer zwei zwischen 0 und 2π liegende Winkel, die sich um zwei Rechte von einander unterscheiden, angeben, deren Tangente gleich diesem Werthe ist.

Es gibt also auch immer zwei zwischen 0 und π liegende Winkel α, von denen der eine um einen Rechten grösser ist, als der andere, für die das Centrifugalmoment zu Null wird und Θ einen grössten oder kleinsten Werth annimmt. Ob der eine oder der andere Fall vorliegt, vermag man leicht mit Hülfe des zweiten Differentialquotienten zu entscheiden. Es genügt aber auch, darauf aufmerksam zu machen, dass sich Θ stetig ändert, wenn man die Axe AA eine Umdrehung ausführen lässt, und dass daher von den beiden ausgezeichneten Werthen nothwendig der eine ein Maximum, der andere ein Minimum sein muss. Die beiden zu einander senkrechten Richtungen, die durch Gl. (56) bestimmt sind, werden die Hauptaxen des Querschnitts genannt.

Jeder beliebig gestaltete Querschnitt hat also immer mindestens zwei durch den Schwerpunkt gehende Hauptaxen. War zufällig $\Phi_{yz} = 0$, so sind die Coordinatenaxen nach Gl. (56) selbst die Hauptaxen. Es kann aber auch vorkommen, dass jede Schwerpunktsaxe des Querschnitts zugleich eine Hauptaxe ist, nämlich dann, wenn $\Phi_{yz} = 0$ und zugleich $\Theta_z = \Theta_y$ ist. Der Bruch auf der rechten Seite von Gl. (56) nimmt dann die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an; wir erkennen aber aus Gl. (55), dass in diesem Falle Φ_α für jede Axe AA zu Null wird und aus Gl. (54) folgt, dass dann alle Trägheitsmomente Θ_α unter einander gleich sind. Dieser Fall liegt z. B. bei einem Quadrate oder überhaupt bei jedem regelmässigen Vielecke vor.

Um die Centrifugalmomente brauchen wir uns in der Folge nicht weiter zu kümmern. Dagegen wollen wir noch eine geometrische Darstellung ableiten, mit deren Hülfe man die in den vorausgehenden Formeln ausgesprochenen Gesetzmässigkeiten leicht zu überblicken vermag. Zu diesem Zwecke können wir uns die Coordinatenaxen der y und z von vornherein in die Richtungen der Hauptaxen gelegt denken. Gl. (54) vereinfacht sich unter dieser Voraussetzung zu

$$\Theta_\alpha = \cos^2\alpha\,\Theta_y + \sin^2\alpha\,\Theta_z. \qquad (57)$$

An Stelle der Trägheitsmomente selbst wollen wir in diese Gleichung die Trägheitsradien einführen. Dividirt man nämlich jedes Trägheitsmoment durch die Fläche des Querschnitts, so erhält man eine Grösse, die das Quadrat einer Länge darstellt. Setzt man also

$$t_\alpha^2 = \frac{\Theta_\alpha}{F}, \tag{58}$$

so bedeutet t_α den quadratischen Mittelwerth der Abstände aller Flächenelemente des Querschnitts von der Axe. Dieser Mittelwerth wird als Trägheitshalbmesser bezeichnet; man rechnet, da er eine Strecke bildet, mit ihm oft viel bequemer als mit dem Trägheitsmomente selbst. Durch Division mit F geht Gl. (57) über in

$$t_\alpha^2 = \cos^2\alpha\, t_y^2 + \sin^2\alpha\, t_z^2. \tag{59}$$

Um t_α als Funktion des Richtungswinkels α geometrisch darzustellen, würde es am nächsten liegen, die Grösse von t_α auf jeder Schwerpunktsaxe abzutragen und alle Endpunkte durch eine Curve zu verbinden. Wenn auch gegen diese Darstellung nichts einzuwenden ist, so wäre sie doch nicht bequem, da die erhaltene Curve vom vierten Grade wäre und über deren Eigenschaften nichts als bekannt vorausgesetzt werden könnte. Man muss bei solchen Darstellungen immer suchen, mit wohlbekannten Curven, also namentlich mit Curven zweiten Grades auszukommen. Dies ist hier auch leicht möglich, wenn man auf jeder Schwerpunktsaxe nicht t_α selbst, sondern eine Strecke abträgt, die ihr umgekehrt proportional ist. Zu diesem Zwecke wähle man eine beliebige Strecke m und bilde zu jedem Trägheitshalbmesser t den Werth

$$\tau = \frac{m^2}{t}. \tag{60}$$

Setzt man den Werth von t aus dieser Gleichung in Gl. (59) ein, so geht sie nach einer einfachen Umformung über in

$$1 = \left(\frac{\tau_\alpha \cos\alpha}{\tau_y}\right)^2 + \left(\frac{\tau_\alpha \sin\alpha}{\tau_z}\right)^2 \tag{61}$$

und dies ist, wenn τ_α als Radiusvektor auf jedem Strahl α abgetragen wird, die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse, auf der die Endpunkte der Radienvektoren enthalten sind. Der Massstab, in dem die Ellipse gezeichnet ist, hängt von der Wahl des beliebigen Faktors m in Gl. (60) ab.

Noch etwas übersichtlicher wird die Darstellung, wenn man sich einer bekannten Eigenschaft der Ellipse erinnert.

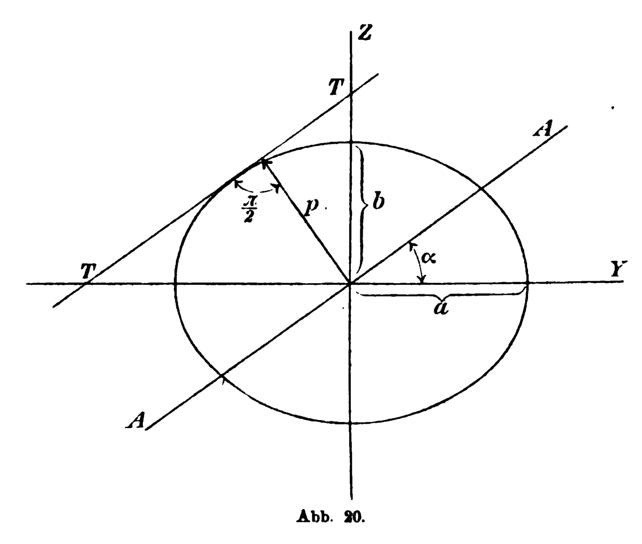


Abb. 20.

Zieht man nämlich in Abb. 20 zu dem Durchmesser AA einer Ellipse eine parallele Tangente TT, so ist das Perpendikel p vom Mittelpunkt auf die Tangente durch die Gleichung

$$p^2 = a^2 \sin^2\alpha + b^2 \cos^2\alpha \tag{62}$$

gegeben und aus dem Vergleiche mit Gl. (59) folgt, dass p den zu AA gehörigen Trägheitshalbmesser angibt, wenn man die Halbaxe $a = t_z$ und $b = t_y$ macht. Die auf diese Art erhaltene Ellipse ist übrigens unter jenen enthalten, die bei der vorigen Darstellung gefunden wurden. Es ist nämlich jene, für die

$$m^2 = t_y t_z$$

gewählt wird, denn beide stimmen sowohl in den Richtungen als in den Grössen der Hauptaxen mit einander überein. Es

ist zweckmässig, auch wenn man an der ersten Darstellung festhalten will, m stets in dieser Grösse zu wählen. Die so bestimmte Ellipse heisst allgemein die Trägheitsellipse. Man kann nämlich die ganze vorausgehende Betrachtung mit geringer Aenderung auch für alle Strahlen durchführen, die nicht durch den Schwerpunkt, sondern durch einen anderen beliebig gewählten Punkt des Querschnitts gezogen sind; ich habe hier davon abgesehen, da ich nicht unnöthiger Weise umständlicher in der Darstellung werden wollte, als es durch den Zweck geboten ist. Für die durch den Schwerpunkt gehenden Axen führt die Trägheitsellipse den besonderen Namen Centralellipse.

Man kann übrigens, auch ohne von dem in Gl. (62) ausgesprochenen Satze Gebrauch zu machen, die zweite Darstellung aus der ersten ableiten. Zu diesem Zwecke betrachte man die Centralellipse, die zunächst dadurch definirt sei, dass auf jedem Strahle die Strecke τ nach Gl. (60) (mit $m^2 = t_y t_z$) abgetragen ist, als Projection eines Kreises. Um diesen Kreis denke man sich eine Anzahl von Quadraten umschrieben, die man mit projicirt. Alle diese Quadrate und daher auch alle ihre Projectionen haben gleichen Flächeninhalt. Daraus folgt sofort, wenn p wieder das vorher damit bezeichnete Perpendikel bedeutet, dass $p\tau$ constant und zwar gleich $\tau_y \tau_z$ sein muss, also

$$p\tau = p\frac{m^2}{t} = \frac{m^4}{t_y t_z} = m^2$$

und hiermit $p = t$.

Wenn die Centralellipse gegeben ist, findet man den zu irgend einer Axe gehörigen Trägheitshalbmesser immer am einfachsten, indem man eine parallele Tangente an die Ellipse zieht und deren Abstand vom Mittelpunkt mit dem Zirkel abmisst. Man hat dann keine Umrechnung nöthig, wie sie nach Gl. (60) erforderlich wird, wenn man von dem Radiusvektor τ ausgeht, der von der Centralellipse auf dem Strahle abgeschnitten wird.

Die Aufgabe, das Trägheitsmoment für irgend eine in der

Querschnittsebene enthaltene Axe möglichst schnell anzugeben, ist durch die vorausgehenden Betrachtungen als gelöst anzusehen, sobald die Centralellipse bekannt ist. Es bleibt noch übrig zu zeigen, wie man diese selbst erhält. Hat der Querschnitt eine Symmetrieaxe, so kennt man sofort die Richtungen der Hauptaxen und man braucht nur die Trägheitsmomente durch unmittelbare Ausführung der Summirung aufzusuchen, um die Hauptträgheitsradien und damit die Hauptaxen der Centralellipse zu erhalten. Im anderen Falle zieht man drei Schwerpunktsaxen in beliebigen Richtungen, berechnet für diese unmittelbar die Trägheitsmomente, findet daraus die Trägheitsradien und zieht dann zu beiden Seiten jeder Axe eine Parallele, deren Abstand gleich dem Trägheitsradius gemacht wird. Man hat damit sechs Tangenten der Centralellipse gefunden. Nach dem Satze von Brianchon kann man dann noch beliebig viele andere Tangenten in einfachster Weise construiren. Die Ellipse selbst wird damit ebenfalls als die von diesen Tangenten umhüllte Curve bekannt. Darin besteht eben der Vortheil, den die Darstellung mit Hülfe einer Curve zweiten Grades gewährt, dass man bei allen weiteren Constructionen unmittelbar an bekannte Eigenschaften und bekannte Sätze anknüpfen kann. — Natürlich kann man anstatt dieses Verfahrens auch das Centrifugalmoment neben den beiden Trägheitsmomenten für zwei zu einander rechtwinklige Axen berechnen und die Lage der Hauptaxen nach Gl. (56) bestimmen.

Für die in der Technik viel gebrauchten Walzeisenprofile sind die Richtungen der Hauptaxen und die zugehörigen Trägheitshalbmesser oder Trägheitsmomente ein für alle Male vorausberechnet, und in den in allen Zeichenstuben zu findenden Verzeichnissen angegeben, so dass man in der Mehrzahl aller Fälle die Centralellipse auf Grund dieser Angaben ohne weiteres auftragen kann.

Ich habe bisher immer nur von den Trägheitsmomenten für solche Axen gesprochen, die in der Querschnittsebene selbst enthalten sind. Man kann diese Untersuchung leicht auch

auf solche Fälle ausdehnen, bei denen die Axe einen beliebigen Winkel mit der Querschnittsebene bildet (oder ihr parallel ist). In der Festigkeitslehre kommt indessen nur noch einer von diesen Fällen in Frage, nämlich das Trägheitsmoment für eine zur Querschnittsebene senkrechte Axe. Dieses wird als das polare Trägheitsmoment bezeichnet. Gebraucht man dafür den Buchstaben Θ_p, so ist es definirt durch den Ansatz

$$\Theta_p = \int r^2 dF,$$

wenn r der senkrechte Abstand zwischen dF und der Axe ist. Zieht man durch den Schnittpunkt der Axe mit der Querschnittsebene wieder zwei Coordinatenaxen, so hat man

$$r^2 = y^2 + z^2$$

und daher

$$\Theta_p = \Theta_y + \Theta_z. \tag{63}$$

Θ_p ist also mit gegeben, wenn man die Centralellipse kennt. Bezeichnet man speciell die Hauptträgheitsmomente mit Θ_1 und Θ_2 und beachtet, dass die Coordinatenaxen jetzt in beliebiger Richtung gezogen sein durften, so erhält man aus Gl. (63) noch die einfache Beziehung

$$\Theta_y + \Theta_z = \Theta_1 + \Theta_2,$$

d. h. die Summe der Trägheitsmomente für irgend zwei auf einander rechtwinklige Axen, die in der Querschnittsfläche durch einen gegebenen Punkt gezogen sind, ist constant.

§ 16. Berechnung der Spannungsvertheilung bei schiefer Belastung.

Schief nennt man die Belastung eines auf Biegung beanspruchten Stabes, wenn die Ebene der äusseren Kräfte oder die Ebene des Biegungsmomentes nicht durch eine Hauptaxe des Querschnitts geht. Wenn die Kräfte alle in einer einzigen Ebene, der Kraftebene, enthalten sind, zerlegt man jede Kraft in zwei Componenten parallel zu den beiden Querschnittshauptaxen und setzt die Componenten von jeder Richtung zu

einem Biegungsmomente zusammen, dessen Ebene dann ebenfalls durch eine Hauptaxe geht. Im anderen Falle kann man wenigstens nachträglich das Biegungsmoment in zwei Kräftepaare zerlegen, deren Ebenen durch die Hauptaxen gehen. Wird der Winkel, den die Ebene des Biegungsmoments M mit einer der Hauptaxen bildet, mit α bezeichnet, so sind die Momente der beiden Componenten gleich $M \cos \alpha$ und gleich $M \sin \alpha$. Dann berechnet man die Spannungen, die durch jede Componente für sich genommen im Querschnitte hervorgerufen werden, nach Gl. (48) oder Gl. (50), die hier anwendbar sind. Die durch das Zusammenwirken beider Componenten entstehenden Spannungen findet man daraus durch algebraische Summirung der beiden Werthe. Im Ganzen hat man daher

$$\sigma = \frac{M \cos \alpha}{\Theta_z} \cdot y + \frac{M \sin \alpha}{\Theta_y} z. \tag{64}$$

Eine einfache Betrachtung lässt nachträglich erkennen, an welcher Stelle des Querschnitts σ seinen grössten Werth annimmt.

Zur Begründung dieses Verfahrens kann man sich entweder auf das Gesetz der Superposition verschiedener Spannungszustände berufen oder man kann auch darauf hinweisen, dass die durch Gl. (64) angegebene Spannungsvertheilung linear ist und dabei das Gleichgewicht zwischen den äusseren und inneren Kräften herstellt. Bei linearer Spannungsvertheilung ist ein solches Gleichgewicht nur auf eine einzige Art möglich, denn die Richtung der Nulllinie bestimmt eindeutig die Ebene des aus den Spannungen resultirenden Kräftepaars und die Grösse der Spannung in einem gegebenen Abstande von der Nulllinie bestimmt ebenfalls eindeutig die Grösse des statischen Moments dieses Kräftepaars. — Wenn das Gesetz der Superposition für den betreffenden Stoff nicht gültig ist, verliert die zuerst gegebene Begründung ihre Bedeutung. In diesem Falle ist aber auch kaum anzunehmen, dass die Spannungsvertheilung linear ist und die andere Begründung versagt daher ebenfalls. In der That darf man in

diesem Falle nicht darauf rechnen, dass Gl. (64) ziemlich genau richtig ist; ihre Anwendung kann vielmehr zu erheblichen Abweichungen von der Wirklichkeit führen. Indessen gilt dies, wie schon öfters bemerkt, bei allen Festigkeitsberechnungen, die sich auf solche Stoffe beziehen.

Ein einfaches Beispiel möge noch die Anwendung von Gl. (64) zeigen. Ein Holzbalken sei als Dachpfette verwendet, so dass eine Querschnittsseite in die Neigung der Dachfläche fällt. Der Querschnitt des Balkens ist in Abb. 21 gezeichnet. Nimmt man an, dass die Belastung Q des ganzen Balkens (sammt Eigengewicht) gleichmässig über die ganze Spannweite l vertheilt ist, so hat man zunächst für das Biegungsmoment in der Mitte, wie man leicht findet,

$$M = \frac{Ql}{8}.$$

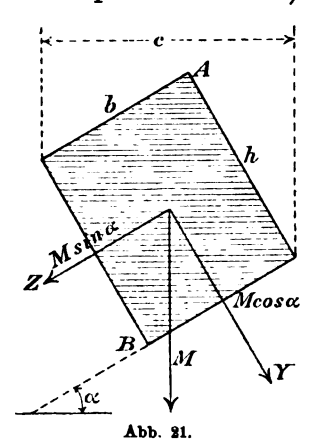


Abb. 21.

Die Ebene von M steht lothrecht und bildet daher Winkel von α und $\frac{\pi}{2} - \alpha$ mit den Hauptaxen. Die Componenten von M in den durch die Hauptaxen gelegten Ebenen sind in die Abbildung eingeschrieben.

Das Trägheitsmoment Θ_z eines Rechtecks folgt aus

$$\Theta_z = \int y^2 dF = b \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}$$

und das Widerstandsmoment W_z daher

$$W_z = \frac{bh^2}{6}.$$

Die Momente für die andere Hauptaxe findet man daraus durch Vertauschung von b mit h. — Durch das Axenkreuz der Y und Z wird das Rechteck in vier Quadranten zerlegt, von denen zwei durch die Belastungscomponenten $M \sin \alpha$ und

$M \cos\alpha$ Spannungen entgegengesetzten Vorzeichens erfahren, während sich bei den beiden anderen die Spannungen addiren. Man erkennt daraus, dass an der Ecke A die grösste Druck- und bei B die grösste Zugspannung auftritt und dass beide von einerlei Grösse sind. Diese grösste Spannung folgt daher aus

$$\sigma = \frac{M \cos\alpha}{W_z} + \frac{M \sin\alpha}{W_y} = \frac{6 M \cos\alpha}{b h^2} + \frac{6 M \sin\alpha}{b^2 h}.$$

Die in Abb. 21 mit c bezeichnete Breite der Horizontalprojection des Balkens ist

$$c = b \cos\alpha + h \sin\alpha$$

und man kann daher für den vorausgehenden Ausdruck auch einfacher

$$\sigma = \frac{6 M c}{b^2 h^2} \tag{65}$$

schreiben, was für die practische Ausführung der Berechnung am bequemsten ist. Für M hat man entweder den vorher angegebenen Werth einzusetzen, oder wenn die Belastung nicht gleichförmig vertheilt sein sollte, das anderweitig in der Kraftebene berechnete Biegungsmoment. Mit $c = b$ geht der Fall in den einfacheren über, dass die zu h parallele Symmetrieaxe in die lothrechte Kraftebene fällt.

§ 17. **Excentrische Zug- oder Druckbelastung eines Stabes.**

Wir nehmen jetzt an, dass die äusseren Kräfte am einen Theile des Stabes sich auf eine einzige Kraft zurückführen lassen, die senkrecht zum Querschnitte steht, dabei aber nicht durch den Schwerpunkt geht. Dieser Belastungsfall führt die in der Ueberschrift angegebene Bezeichnung. Offenbar handelt es sich hierbei um einen Fall der zusammengesetzten Festigkeit, nämlich um das Zusammenwirken einer axialen Belastung mit einer reinen Biegungsbelastung. Denn nach den früher gegebenen Vorschriften ist die äussere Kraft zu ersetzen durch eine ihr gleiche und parallele, die im Schwerpunkte angreift und das bei dieser Parallelverlegung auf-

tretende Kräftepaar, dessen Ebene durch die Stabmittellinie geht. Dieses Kräftepaar zerlegen wir noch, wie im vorigen Paragraphen, in zwei Componenten nach den Richtungen der Hauptaxen.

In Abb. 22 ist von dem Querschnitt nur die Centralellipse gezeichnet; man kann sich den Querschnittsumriss beliebig hinzudenken. A sei der Angriffspunkt der äusseren Kraft P mit den Coordinaten u und v in Bezug auf die Hauptaxen. Dann ist noch irgend ein Flächenelement dF des Querschnitts mit den Coordinaten y und z angegeben. Die Spannung σ am Orte yz setzt sich aus drei Gliedern zusammen, nämlich

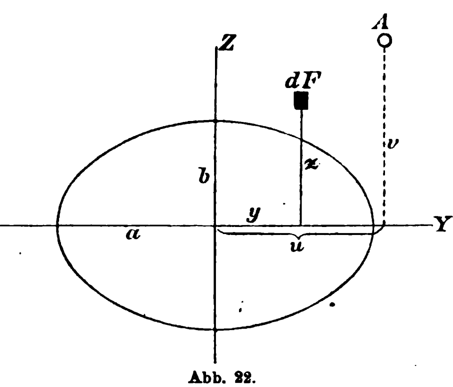


Abb. 22.

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Pv}{\Theta_y} z + \frac{Pu}{\Theta_z} \cdot y\,.$$

Das erste Glied rührt von der axialen Belastung her; im zweiten Gliede ist Pv das Moment des Kräftepaars, dessen Ebene parallel zur Hauptaxe Z ist und ähnlich im dritten Gliede. Durch Einführung der Trägheitshalbmesser, die gleich den Halbaxen a und b der Centralellipse sind, an Stelle der Trägheitsmomente geht die vorige Gleichung über in

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{vz}{b^2} + \frac{uy}{a^2}\right). \tag{66}$$

In der neutralen Axe des Querschnitts muss dieser Ausdruck verschwinden, wir erhalten daher als Gleichung der Nulllinie

$$\frac{uy}{a^2} + \frac{vz}{b^2} = -1\,. \tag{67}$$

Darin sind y und z die Coordinaten von Punkten der Nulllinie, die selbstverständlich — nämlich weil dies schon bei

der Aufstellung der Ausdrücke für die Spannungen vorausgesetzt wurde — eine gerade Linie ist. Die Coefficienten von y und z in Gl. (67) hängen von den Coordinaten u und v, also von der Lage des Angriffspunktes der excentrischen Belastung ab. Jedem Punkte A ist durch Gl. (67) eine bestimmte Nulllinie zugeordnet. Wir wollen uns jetzt die Aufgabe stellen, diesen Zusammenhang näher zu untersuchen.

Zu diesem Zwecke sei zunächst angenommen, der Angriffspunkt A liege auf der Centralellipse. Die Coordinaten irgend eines Punktes dieser Ellipse seien mit $\eta\zeta$ bezeichnet. Dann hat man die Ellipsengleichung

$$\frac{\eta^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{b^2} = 1. \tag{68}$$

Setzt man nun $u = \eta$ und $v = \zeta$, so wird Gl. (67) befriedigt, wenn wir $y = -\eta$ und $z = -\zeta$ annehmen, denn diese Gleichung geht dann in Gl. (68) über. Wir erkennen daraus zunächst, dass die Nulllinie durch den dem Angriffspunkte diametral gegenüberliegenden Punkt der Centralellipse geht, falls der Angriffspunkt selbst auf der Centralellipse liegt. Weiter folgt aber noch, dass die Nulllinie in diesem Falle die Centralellipse berührt. Um dies zu beweisen, differentiiren wir die Gleichungen beider Linien. Wir finden

$$\frac{u}{a^2} + \frac{v}{b^2}\frac{dz}{dy} = 0,$$

$$\frac{\eta}{a^2} + \frac{\zeta}{b^2}\frac{d\zeta}{d\eta} = 0,$$

und wenn wir in die erste Gleichung die vorher angenommenen Werthe von u und v einsetzen und die zweite Gleichung auf den auf der Centralellipse liegenden Punkt der Nulllinie anwenden, finden wir in der That, dass an dieser Stelle

$$\frac{dz}{dy} = \frac{d\zeta}{d\eta}$$

ist, dass also die Nulllinie und die Centralellipse an dieser Stelle gleich gerichtet sind. Damit ist die Lage der Nulllinie vollständig bestimmt, für den Fall, dass der Angriffspunkt der Belastung auf der Centralellipse enthalten ist.

Wir denken uns jetzt den Angriffspunkt aus seiner ersten Lage längs des durch den Schwerpunkt gezogenen Strahles verschoben. Dann ändern sich u und v beide in demselben Verhältnisse. Auf den Werth des Differentialquotienten $\frac{dz}{dy}$, also auf die Richtung der Nulllinie, ist dies ohne Einfluss. Die Nulllinie verschiebt sich also dabei parallel zu sich selbst. Wenn etwa u und v doppelt so gross geworden sind, als vorher, müssen wir y und z überall halb so gross als vorher annehmen, um Gl. (67) wieder zu befriedigen. Daraus folgt, dass die Nulllinie um so näher an den Schwerpunkt heranrückt, je weiter sich der zugehörige Angriffspunkt entfernt und zwar so, dass das Produkt der Abstände beider vom Schwerpunkt constant bleibt. Die Nulllinie schneidet die Centralellipse, wenn der Angriffspunkt ausserhalb der Ellipse liegt und sie geht aussen vorbei im umgekehrten Falle. Wenn der Angriffspunkt in's Unendliche rückt, geht die Nulllinie zuletzt durch den Schwerpunkt selbst. — Dieses Resultat war schon nach dem Früheren zu erwarten, denn in diesem Falle kommt die axiale Belastung gegenüber dem biegenden Kräftepaare nicht mehr in Betracht und wir können geradezu den Fall der reinen Biegung als jenen Sonderfall der excentrischen Belastung betrachten, bei dem diese Belastung durch eine unendlich ferne und dabei unendlich kleine Kraft von endlichem Momente hervorgebracht wird. Dies führt uns nur wieder auf eine aus der allgemeinen Statik bekannte Deutung eines Kräftepaars. — Wenn umgekehrt der Angriffspunkt mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, rückt die Nulllinie in's Unendliche, d. h. wir haben eine gleichförmige Spannungsvertheilung über den ganzen Querschnitt.

Wir sind jetzt im Stande, mit Hülfe der Centralellipse für jede beliebige Lage des Angriffspunktes die zugehörige Nulllinie sofort anzugeben. Wir brauchen dazu nur einen Strahl vom Schwerpunkt nach dem Angriffspunkte zu ziehen, uns zuerst den Angriffspunkt auf dem Schnittpunkte dieses Strahles mit der Centralellipse zu denken, die dazu gehörige

diametral gegenüberliegende Tangente zu ziehen und diese schliesslich parallel zu verschieben, bis sich ihr Abstand vom Mittelpunkte im umgekehrten Verhältnisse geändert hat, als der Abstand des Angriffspunktes.

Wir wollen aber die Untersuchung noch um einen Schritt weiter führen. Der Angriffspunkt soll nämlich jetzt eine beliebige gerade Linie beschreiben. Zu jeder Lage gehört eine bestimmte Nulllinie und es fragt sich, wie sich die Lage der Nulllinie ändert, während der Angriffspunkt längs seiner Bahn fortrückt. Die Gleichung dieser Bahn sei

$$v = \alpha u + \beta,$$

wobei α und β beliebig gegebene constante Grössen sind. Wir fassen zunächst irgend zwei Lagen $u_1 v_1$ und $u_2 v_2$ auf dieser Bahn in's Auge, suchen die zugehörigen Nulllinien auf und ermitteln, in welchem Punkte beide sich schneiden. Die Gleichungen beider Nulllinien sind nach Gl. (67), wenn man $v_1 = \alpha u_1 + \beta$ setzt und ebenso für v_2

$$\frac{u_1 y}{a^2} + \frac{z}{b^2}(\alpha u_1 + \beta) = -1,$$

$$\frac{u_2 y}{a^2} + \frac{z}{b^2}(\alpha u_2 + \beta) = -1.$$

Um die Coordinaten des Schnittpunktes beider Nulllinien zu erhalten, müssen wir diese Gleichungen nach y und z auflösen. Wir finden

$$y = a^2 \frac{\alpha}{\beta}; \quad z = -\frac{b^2}{\beta}, \tag{69}$$

wie man sich auch nachträglich leicht durch Einsetzen dieser Werthe in die Gleichungen überzeugt. Die Abscissen u_1 und u_2 der auf der Bahn des Angriffspunktes beliebig herausgegriffenen beiden Punkte sind aus den gefundenen Werthen vollständig herausgefallen. Daraus folgt, dass es gleichgültig ist, welche besonderen Punkte man auf der Bahn ausgewählt hat; alle Nulllinien, die zu den Angriffspunkten auf dieser Bahn gehören, schneiden sich gegenseitig in demselben Punkte, dessen Coordinaten durch die Gl. (69) angegeben sind. Mit

anderen Worten heisst dies: wenn sich der Angriffspunkt längs einer beliebigen Graden verschiebt, dreht sich die Nulllinie um einen dieser Graden zugeordneten Punkt.

Die Art dieser Zuordnung stimmt mit jener überein, die wir schon vorher kennen lernten. Denn denkt man sich jetzt umgekehrt den durch die Gl. (69) angegebenen Punkt als Angriffspunkt, setzt also

$$u = a^2 \frac{\alpha}{\beta}, \quad v = -\frac{b^2}{\beta}$$

und führt diese Werthe in die Gleichung der Nulllinie Gl. (67) ein, so geht diese über in

$$z = \alpha y + \beta.$$

Wenn man also den Punkt, um den sich vorher die Nulllinie drehte, nachher als Angriffspunkt wählt, so fällt die ihm zugehörige Nulllinie mit jener Linie zusammen, die vorher als Bahn des Angriffspunktes gedient hatte.

Wir sehen, dass hierdurch jedem Punkte der Ebene eine Grade und umgekehrt eindeutig zugeordnet ist. Dies erinnert an die Lehre von den Polaren in der Geometrie der Kegelschnitte. Nur insofern besteht hier ein Unterschied, als nicht wie bei den Polaren, einer den Kegelschnitt (die „Ordnungscurve") berührenden Graden der Berührungspunkt, sondern der diametral gegenüberliegende Punkt zugeordnet ist und ähnlich in jedem anderen Falle. In Anlehnung an den Sprachgebrauch in der Geometrie der Kegelschnitte bezeichnet man daher die einander entsprechenden Punkte und Graden als die Antipole und die Antipolaren.

Mit diesen Bezeichnungen können wir die vorausgehenden Ergebnisse in den Sätzen zusammenfassen:

1) Jedem Punkte der Querschnittsebene, der als Angriffspunkt der Belastung gedacht wird, ist die Antipolare dieses Punktes in Bezug auf die Centralellipse als Nulllinie zugeordnet, und umgekehrt entspricht jeder als Nulllinie beliebig gewählten Graden der Querschnittsebene der Antipol dieser Graden als Angriffspunkt der Belastung.

2) Wenn sich der Angriffspunkt auf einer beliebigen Graden verschiebt, dreht sich die zugehörige Nulllinie um den Antipol dieser Graden.

3) Wenn sich die Nulllinie um einen beliebigen Punkt dreht, schreitet der zugehörige Angriffspunkt auf der Antipolaren dieses Punktes weiter.

Man kann noch hinzufügen:

4) Wenn der Angriffspunkt auf einer Curve zweiter Ordnung fortschreitet, hüllt die Nulllinie einen anderen Kegelschnitt ein und umgekehrt.

Bei der Anwendung dieser Sätze ist es gleichgültig, ob die Nulllinie die Querschnittsfläche durchschneidet oder ausserhalb verläuft. Im letzten Falle kommen überhaupt nur Spannungen σ von gleichem Vorzeichen im Querschnitte vor. Man kann sich nun noch die Aufgabe stellen, alle Lagen des Angriffspunktes anzugeben, bei denen nur Spannungen von einerlei Vorzeichen im Querschnitte auftreten. Alle diese Angriffspunkte liegen innerhalb einer Fläche, die als der Kern des Querschnitts bezeichnet wird. Um den Kern des Querschnitts zu erhalten, denke man sich alle möglichen Linien gezogen, die den Querschnittsumfang entweder berühren oder überhaupt mindestens einen Punkt mit ihm gemeinsam haben, ohne in's Innere der Fläche einzutreten. Wir wollen den Inbegriff aller dieser Linien den den Querschnitt umhüllenden Tangentenbüschel nennen. Jedem Strahle dieses Büschels entspricht ein Punkt des Kernumrisses, nämlich der Antipol des Strahles. Während der Strahl alle möglichen Lagen des Tangentenbüschels durchläuft, beschreibt der Antipol den Umfang des Kerns. Denkt man sich, nachdem der Kernumfang construirt ist, den Angriffspunkt in die Fläche des Kerns gerückt, so rückt die zugehörige Nulllinie weiter nach aussen und man erkennt daraus, dass in der That nur Spannungen von dem gleichen Vorzeichen bei dieser Lage des Angriffspunktes auftreten können. Dies gilt auch noch, wenn der Angriffspunkt auf dem Umfange des Kernes liegt; dabei sinkt nur an einer oder auch an einigen Stellen des Querschnitts-

umfanges die Spannung bis auf Null herab. Sobald aber der Angriffspunkt über den Kern hinaus gerückt wird, kommen Spannungen von entgegengesetztem Vorzeichen im Querschnitte vor.

Diese Betrachtungen werden namentlich bei der Berechnung von Mauerpfeilern angewendet. Da Mauerwerk in gewöhnlicher Ausführung wenig widerstandsfähig gegen Zugbeanspruchung ist, muss man diese zu vermeiden suchen, und man stellt daher als Regel auf, dass der Angriffspunkt der Belastung, die in einem Querschnitte des Mauerpfeilers übertragen wird, nicht ausserhalb des Querschnittkernes liegen soll. Diese Forderung beruht auf der allen diesen Untersuchungen zu Grunde liegenden Voraussetzung, dass die Spannungsvertheilung linear ist. Man kann freilich Bedenken tragen, ob diese Voraussetzung gerade bei Mauerwerk, das dem Hookeschen Gesetze sicher nicht gehorcht, hinreichend genau zutrifft. Indessen hat sich die Regel, so viel seither bekannt ist, ganz wohl bewährt und man braucht daher kein Bedenken gegen ihre Anwendung zu tragen. Freilich sollte man die hypothetische Grundlage, auf der sie beruht, wohl im Gedächtnisse behalten, um nicht in den Fehler einer Ueberschätzung der theoretischen Resultate zu verfallen.

Schliesslich soll die Aufsuchung des Kerns noch an einigen einfachen Beispielen, zunächst für den rechteckigen Querschnitt erläutert werden. Die Querschnittsseiten seien, wie in Abb. 23 (S. 116) angegeben, mit a und b bezeichnet. Wie schon vorher gefunden (S. 107), ist das Trägheitsmoment des Rechtecks für die zur Seite a parallele Hauptaxe gleich $\frac{ab^3}{12}$, der Trägheitsradius also gleich $\frac{b}{\sqrt{12}} = 0{,}2887\, b$. Für die andere Hauptaxe hat man nur a an die Stelle von b zu setzen. Wir haben damit die Halbaxen der Centralellipse gefunden, tragen diese auf den Symmetrieaxen des Querschnitts auf und construiren die Ellipse. Von dem Tangentenbüschel, der den Querschnitt einhüllt, kommen vier ausgezeichnete Lagen in Betracht, nämlich jene, die mit je einer Querschnitts-

seite zusammenfallen. Bei den übrigen Lagen geht der Strahl durch eine der Ecken des Rechtecks. Aus einer Hauptlage geht der Strahl daher in die nächste über, indem er sich um die dazwischen liegende Ecke dreht. Dabei beschreibt der Antipol, wie wir früher fanden, eine gerade Linie. Wir erkennen daraus, dass der Kernumriss ein Viereck und zwar, der Symmetrie wegen, ein Rhombus ist. Es genügt daher, die auf den Hauptaxen liegenden Eckpunkte aufzusuchen. Dem Strahle $\alpha\alpha$ des Tangentenbüschels entspricht der Antipol A. Der mit z bezeichnete Abstand dieses Punktes vom Schwerpunkte multiplicirt mit dem Abstande der Linie $\alpha\alpha$, also mit $\frac{b}{2}$ ist gleich dem Quadrate des Trägheitsradius, also

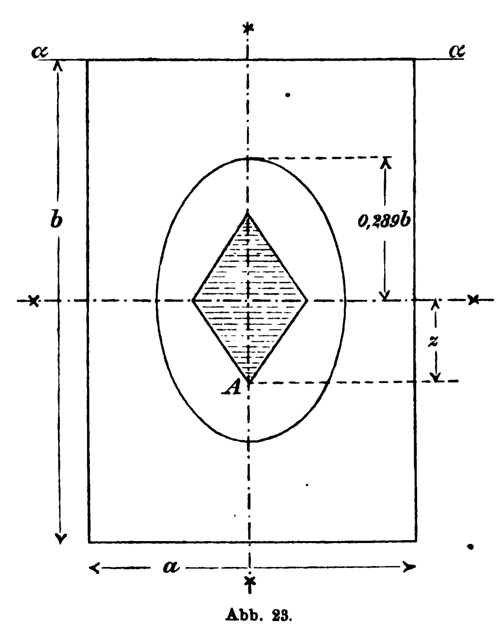


Abb. 23.

$$z \cdot \frac{b}{2} = \frac{b^2}{12} \text{ oder } z = \frac{b}{6}.$$

Jede Diagonale des Kerns ist daher gleich dem dritten Theile der zu ihr parallelen Rechteckseite. Dies entspricht der Regel, dass bei Mauerpfeilern der Angriffspunkt der Belastung, falls er in einer Symmetrieebene enthalten ist, im mittleren Drittel der Fuge bleiben soll. — Der Kern ist in Abb. 23 durch Schraffirung hervorgehoben.

Für eine kreisförmige Querschnittsfläche ist der Kern natürlich selbst wieder ein Kreis. Um das Trägheits-

moment einer Kreisfläche zu berechnen, geht man am einfachsten von dem polaren Trägheitsmomente aus. Ein Ring vom Radius r und der Breite dr trägt, da alle seine Flächenelemente gleichen Abstand vom Mittelpunkte haben, $2\pi r^3 dr$ zu Θ_p bei. Wird der Radius des Kreises mit a bezeichnet, so hat man daher

$$\Theta_p = 2\pi \int_0^a r^3\, dr = \frac{\pi a^4}{2}.$$

Für alle in der Querschnittsebene enthaltenen Axen ist Θ gleich gross und nach dem in Gl. (63) ausgesprochenen Satze daher halb so gross als Θ_p. Wir haben daher für Θ und den Trägheitsradius t

$$\Theta = \frac{\pi a^4}{4} \quad \text{und} \quad t = \frac{a}{2}.$$

Das Product aus dem Kernradius z und dem Abstande einer den Querschnittsumfang berührenden Tangente ist gleich dem Quadrate des Trägheitsradius, daher $z = \frac{a}{4}$, womit die Aufgabe gelöst ist.

Ein elliptisch begrenzter Querschnitt wird am einfachsten als Projection eines Kreises aufgefasst. Ist a die grosse, b die kleine Halbaxe und setzt man $b = a \cos\alpha$, versteht also unter α den Neigungswinkel jener Kreisfläche gegen die Projectionsebene, so hat man für das Trägheitsmoment Θ_a in Bezug auf die grosse Hauptaxe

$$\Theta_a = \int z^2 dF = \cos^3\alpha \int z_1^2 dF_1 = \cos^3\alpha \cdot \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi a b^3}{4}.$$

Dabei sind unter z_1 und dF_1 jene Grössen zu verstehen, deren Projectionen z und dF bilden. Ebenso hat man

$$\Theta_b = \int y^2 dF = \cos\alpha \int y_1^2 dF_1 = \cos\alpha \frac{\pi a^4}{4} = \frac{\pi a^3 b}{4},$$

denn hier sind die Abstände y_1 und y einander gleich, da y_1 parallel zur Projectionsebene geht. Für die Trägheitsradien findet man hieraus durch Division mit dem Flächeninhalte der Ellipse

$$t_a = \frac{b}{2} \quad \text{und} \quad t_b = \frac{a}{2}.$$

Die Centralellipse ist daher dem Querschnittsumriss ähnlich. Auch der Kern ist eine hierzu ähnliche und ähnlich liegende Ellipse, deren Halbaxen, die sich ganz wie beim Kreise berechnen lassen, den vierten Theil jener vom Querschnittsumrisse ausmachen.

§ 18. **Berechnung der Biegungsspannungen mit Hülfe des Kerns.**

Schon früher wurde darauf hingewiesen, dass der Fall der reinen Biegungsbeanspruchung als ein Sonderfall der excentrischen Belastung aufgefasst werden kann. Wir können daher die Entwicklungen des letzten Paragraphen benutzen, um noch eine andere Lösung der schon in § 16 behandelten Aufgabe daraus abzuleiten.

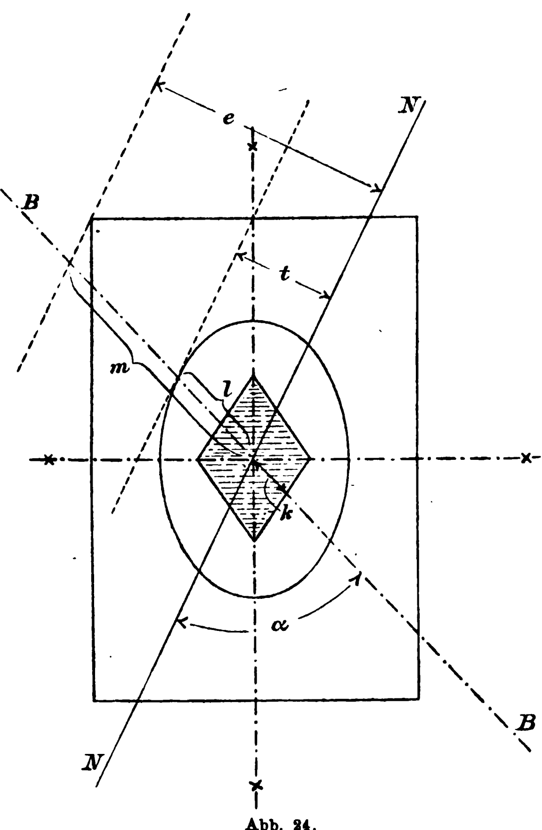


Abb. 24.

In Abb. 24 ist der Querschnitt als Rechteck gewählt; er könnte aber ebenso gut auch irgend eine andere Gestalt haben. Centralellipse und Querschnittskern sind ebenso wie in Abb. 23 eingetragen. Mit BB ist die Spur der Ebene bezeichnet, in der das Kräftepaar vom Biegungsmomente M liegen möge. Wir fassen dieses Kräfte-

paar als eine unendlich kleine und unendlich ferne Kraft auf, deren Angriffspunkt daher der unendlich ferne Punkt der Graden BB ist. Die zugehörige Nulllinie NN ist die Antipolare dieses Punktes und sie geht daher in der Richtung des zu BB conjugirten Durchmessers der Centralellipse. Wir finden diese Richtung, indem wir im Durchschnittspunkte von BB mit der Centralellipse eine Tangente construiren. Zu dieser geht NN parallel. Die grösste Spannung tritt an den Kanten auf, die den grössten Abstand, nämlich den Abstand e von der Nulllinie haben. Um diese Spannung, die mit σ_0 bezeichnet werden soll, zu berechnen, schreiben wir noch die Bedingung an, dass das Moment aller Spannungen gleich dem Momente des biegenden Kräftepaares für die Momentenaxe NN sein muss. Dass die Spannungen ein Kräftepaar liefern, das in der Ebene der äusseren Kräfte liegt, ist schon durch die Festsetzung der richtigen Lage der Nulllinie verbürgt; wir brauchen uns also nur noch um die Grösse der Momente zu kümmern.

Hierbei ist zu beachten, dass die Nulllinie NN nicht senkrecht zur Ebene des Biegungsmoments M steht, sondern einen Winkel α mit ihr bildet. Das Moment des biegenden Kräftepaars in Bezug auf die Axe NN ist daher nicht gleich M, sondern gleich $M \sin\alpha$ zu setzen. Für die Spannung in irgend einem Flächenelemente dF, das den Abstand y von NN haben möge, können wir nach dem Navier'schen Spannungsvertheilungsgesetze $\frac{\sigma_0}{e} y$ setzen und die Momentengleichung lautet daher

$$M \sin\alpha = \frac{\sigma_0}{e} \int y^2 dF = \frac{\sigma_0}{e} \Theta_N,$$

wenn mit Θ_N das Trägheitsmoment für die Axe NN bezeichnet wird.

Andererseits ist aber nach der Definition des Kerns

$$km = l^2,$$

oder, wenn wir an Stelle der drei auf BB liegenden Strecken ihre Projectionen auf eine zu NN senkrechte Linie einführen,

$$k \sin\alpha \cdot e = t^2 = \frac{\Theta_N}{F},$$

denn t ist nach der Definition der Centralellipse der zu NN gehörige Trägheitshalbmesser. Setzt man den hieraus folgenden Werth von Θ_N in die erste Gleichung ein und löst sie nach σ_0 auf, so erhält man das einfache Resultat

$$\sigma_0 = \frac{M}{F \cdot k}. \tag{70}$$

Man kann diesem noch eine etwas andere Fassung geben, wenn man dem durch Gl. (49) zuerst eingeführten Begriffe des Widerstandsmoments W eine erweiterte Bedeutung verleiht, nämlich darunter das Product aus der Querschnittsfläche F und der „Kernweite“ k versteht. Diese neue Definition steht nämlich nicht im Widerspruche mit der durch Gl. (49) gegebenen, die nur für den Fall gültig war, dass die Biegungsebene durch eine Querschnittshauptaxe geht. In der That ist in diesem Falle $ky_0 = t^2$ und daher $\frac{\Theta}{y_0} = F \,.\, k$. Im Sinne dieser erweiterten Definition lässt sich Gl. (70) auch in der Form

$$\sigma_0 = \frac{M}{W} \tag{71}$$

schreiben und sie stimmt dann genau mit der für die gerade Belastung abgeleiteten Gl. (50) überein.

Die Berechnung nach diesen Formeln ist an sich viel einfacher als die in § 16 gegebene. Indessen wird dabei vorausgesetzt, dass der Querschnittskern bereits bekannt sei. Wenn in den Profiltabellen der Hüttenwerke der Kern in jedes Walzeisenprofil eingezeichnet wäre, was schon öfters vorgeschlagen wurde und nächstens vielleicht auch einmal ausgeführt wird, würde sich die Anwendung der Gl. (70) oder (71) schnell einbürgern. So lange der Kern aber nicht von vornherein gegeben ist, wird man mit der Rechnung schneller auf dem früher angegebenen Wege fertig.

Mit Hülfe dieser Betrachtung kann man auch leicht beurtheilen, welche Richtung der Biegungsebene BB die grösste

Gefahr für die Festigkeit des Stabes bedingt, d. h. bei welcher Richtung die Kantenspannung σ_0 den grössten Werth annimmt, wenn das Biegungsmoment M ein für alle Mal gegeben ist (also etwa bei gegebenen Lasten). Es ist jene Richtung, zu der die kleinste Kernweite k gehört, beim rechteckigen Querschnitt also die zu einer Diagonale senkrechte Richtung. Das letzte Resultat geht übrigens auch schon aus der in § 16 gegebenen Rechnung hervor, denn die in Abb. 21 mit c bezeichnete Grösse, die in Gl. (65) allein als von der Richtung der Biegungsebene abhängiger Factor auftrat, nimmt in dem bezeichneten Falle ihren grössten Werth an; sie wird dann gleich der Rechtecksdiagonale.

§ 19. Bestimmung von Trägheitsmomenten mit Hülfe des Momentenplanimeters.

Es gibt keinen zweiten Gegenstand der technischen Mechanik, über den schon so viel geschrieben worden wäre, als über die Lehre von den Trägheitsmomenten und die damit zusammenhängenden Betrachtungen, von denen die letzten Paragraphen handeln. Dahin gehören namentlich auch die zahlreichen Methoden, die zur Bestimmung der Trägheitsmomente von Querschnittsflächen ausgearbeitet wurden. Es ist nicht möglich, aber auch nicht nöthig, sie hier alle vorzuführen; es wäre damit fast so, als wenn man in einem Lehrbuche der Euklidischen Geometrie alle bisher aufgestellten Beweise für den Pythagoräischen Lehrsatz abdrucken wollte. Die zeichnerischen Methoden gehören überdies zur graphischen Statik und die schönste, die von Mohr herrührt, wird dort behandelt werden. An dieser Stelle genügt es, wenn darauf hingewiesen wird, dass irgend eine principielle Schwierigkeit bei der Ermittelung des Trägheitsmomentes niemals bestehen kann, da man im schlimmsten Falle sich immer damit helfen kann, dass man den Querschnitt in schmale Streifen zerlegt, die zur Axe parallel laufen, für die das Trägheitsmoment ermittelt werden soll, dass man den Flächeninhalt jedes Streifens mit dem

Quadrate des mittleren Abstandes von der Axe multiplicirt und die Producte addirt. Unbedingte Genauigkeit wird bei Festigkeitsberechnungen niemals gefordert — oder höchstens unverständiger Weise — und den berechtigten Ansprüchen an die Genauigkeit lässt sich dabei leicht vollständig genügen. Viel Werth vermag ich daher jenen Untersuchungen nicht beizulegen, ich pflege vielmehr meinen Hörern zu rathen, wenn sie einmal den Drang fühlen, selbst etwas zur Bereicherung der Wissenschaft beizutragen, ihre Kräfte lieber bei anderen Dingen einzusetzen, die wohl nicht zu so mühelosen, dafür aber auch zu werthvolleren Resultaten führen.

Dagegen soll hier noch auseinandergesetzt werden, auf welchem Gedankengange das von Amsler zur mechanischen Ermittelung der Trägheitsmomente construirte Momentenplanimeter beruht. In Abb. 25 sei AA die Axe, für die das Trägheitsmoment ermittelt werden soll. Wir dehnen die Summirung zunächst über den schmalen Streifen aus, der durch Schraffirung hervorgehoben ist. Dieser liefert zum Trägheitsmomente den Beitrag

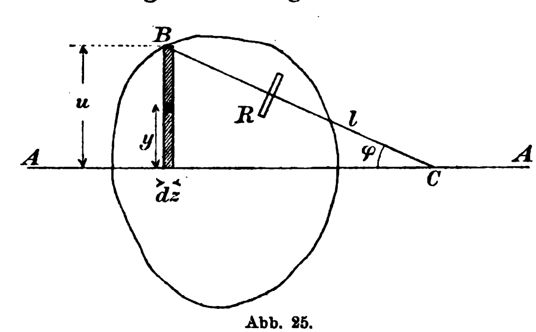


Abb. 25.

$$dz \int_0^u y^2\, dy = dz\, \frac{u^3}{3}.$$

Eine Stange BC von der Länge l wird so herumgeführt, dass das Ende B auf dem Querschnittsumfange, das Ende C auf der Axe AA fortschreitet. Man hat $u = l \sin\varphi$ und das Trägheitsmoment der ganzen Fläche ist daher

$$\Theta = \frac{l^3}{3} \int \sin^3\varphi\, dz.$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch etwas umformen mit Hülfe der goniometrischen Formel

$$\sin^3\varphi = \frac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4}.$$

Er geht dadurch über in

$$\Theta = \frac{l^3}{4}\int \sin\varphi\, dz - \frac{l^3}{12}\int \sin 3\varphi\, dz.$$

Unmittelbar an der Stange BC des Instruments ist eine Rolle R befestigt. Wenn man mit dem Stifte am Ende B der Stange den Umfang des Querschnitts umfährt, rollt R über die Papierfläche und die Drehung, die sie nach Beendigung des Umlaufs ausgeführt hat, kann mit Hülfe eines Nonius abgelesen werden. Während der Stift B das zu dem schraffirten Streifen gehörige Element des Umfangs durchläuft, findet eine Drehung der Rolle statt, die in zwei Theile zerlegt werden kann. Der eine Theil ist durch die Verticalprojection, der andere durch die Horizontalprojection des Umfangselements bedingt. Hat man mit dem Umfahren bei dem einen der auf der Axe AA liegenden Punkte begonnen, war also die Stange BC zuerst horizontal gerichtet, so nimmt sie wieder dieselbe Richtung an, wenn der Stift B an dem anderen auf AA liegenden Punkte angelangt ist. Die verticalen Wege von B liefern also zusammen Null und alle Drehungen, die durch die Verticalprojectionen der Umfangselemente auf der einen Seite von AA bedingt sind, heben sich daher ebenfalls gegeneinander auf. Wir brauchen also nur auf die Drehungen zu achten, die durch die Horizontalcomponenten des Weges von B veranlasst werden. Für das betrachtete Umfangselement ist der Weg in horizontaler Richtung gleich dz. Nun ist klar, dass die Rolle gar keine Drehung ausführt, wenn sich die Stange in ihrer eigenen Richtung verschiebt; es kommt also auch bei der Parallelverschiebung der Stange um dz nur auf jenen Antheil des Weges an, der senkrecht zur Stangenrichtung steht und dieser ist gleich $dz \sin\varphi$. Wenn der oberhalb der Axe liegende Theil des Umfangs durchlaufen ist, wird demnach die Drehung der Rolle proportional mit

$$\int \sin\varphi\, dz$$

sein. Wenn dann weiter der untere Theil durchlaufen wird, lassen sich dieselben Betrachtungen wieder anwenden. Man muss dabei beachten, dass jeder Factor des Productes $\sin\varphi dz$ das dem vorigen entgegengesetzte Vorzeichen annimmt, dass also das Produkt selbst das gleiche Vorzeichen behält. Daher heben sich die durch die horizontalen Wege bedingten Rollenumdrehungen nicht gegeneinander auf, wie es bei den verticalen Wegen des Stiftes B der Fall war. Im Ganzen bildet vielmehr die Rollenablesung unmittelbar ein Mass für das über den ganzen Umfang erstreckte $\int \sin\varphi\, dz$. Man sieht daher ein, dass nach einmaligem Umfahren der Fläche mit dem Stifte B das erste Glied des für Θ gefundenen Ausdrucks, abgesehen von einem constanten Factor, der von der Construction des Instruments abhängt, unmittelbar vom Instrumente abgelesen werden kann. Das zweite Glied in dem Ausdrucke für Θ ist ganz ähnlich gebildet, wie das erste; der wesentliche Unterschied besteht nur darin, dass der Sinus des dreifachen Winkels vorkommt. Dem lässt sich aber leicht Rechnung tragen, indem man eine zweite Rolle anbringt, deren Lager durch eine Zahnradübersetzung im Verhältnisse 1:3 mit der Stange B verbunden ist, so dass die Umdrehungsaxe dieser zweiten Rolle in jedem Augenblicke den Winkel 3φ mit der Axe AA bildet. An der Horizontalverschiebung der Stange nimmt sie ebenso Theil wie die vorige Rolle, und die an ihr nach einem ganzen Umlaufe genommene Ablesung gibt daher ein Mass für die Grösse des zweiten Gliedes in dem Ausdrucke für Θ. Demnach erhält man für Θ

$$\Theta = \alpha r - \beta r_1,$$

wenn α und β Constanten des Instruments, die ein für alle Mal ermittelt sind und r und r_1 die Rollenablesungen bedeuten.

Das Amsler'sche Planimeter hat auch noch eine dritte Rolle, mit deren Hülfe das statische Moment der Fläche für die Axe AA bestimmt werden kann; ich werde aber darauf nicht näher eingehen.

§ 20. Berechnung der Schubspannungen im gebogenen Stabe.

Bisher stand immer der Fall der reinen Biegungsbeanspruchung im Vordergrunde und für diesen hatten wir Grund genug zu der Annahme, dass überhaupt keine Schubspannungen im Querschnitte übertragen werden. Wir betrachten jetzt den allgemeineren Fall, dass die äusseren Kräfte am einen Stabtheile neben einem Biegungsmomente auch noch eine Scheerkraft V liefern. Nach dem Grundsatze der Superposition verschiedener Spannungszustände wird dadurch an der Vertheilung der Normalspannungen σ über den Querschnitt nichts geändert. Wir können daher die früher durchgeführte Berechnung von σ auch im allgemeineren Falle ohne weiteres anwenden. Dagegen bleibt hier noch die Frage zu entscheiden, wie sich die Schubspannungen, die zusammen die Resultirende V geben, über den Querschnitt vertheilen. Wir sind dabei in etwas günstigerer Lage als bei der Frage der Vertheilung der Normalspannungen, die wir ungefähr in der gleichen Weise lösen mussten wie Alexander, als er den Gordischen Knoten durchhieb. In der That ist die Vertheilung der Schubspannungen durch die Vertheilung der Normalspannungen schon bis zu einem gewissen Grade mit bedingt. Man erkennt dies schon aus den allgemeinen Betrachtungen des ersten Abschnitts. Die erste der Gleichungen (5), die das Gleichgewicht der Spannungen an einem unendlich kleinen Parallelepiped aussprechen, lautet, wenn wir die Componente X der äusseren Kraft gleich Null setzen,

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0.$$

Denken wir uns die X-Axe in die Stabmittellinie und die Y-Axe in die Ebene der äusseren Kräfte, also in die Richtung von V gelegt, so spricht diese Gleichung den nothwendigen Zusammenhang zwischen der Vertheilung der Normalspannungen σ und der Schubspannungscomponenten τ_{xy} und τ_{xz} über den Querschnitt aus, denn nach den Gleichungen (4) ist $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ und $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Freilich reicht diese Gleichung allein

noch nicht vollständig aus, die Schubspannungscomponenten zu berechnen. Es muss immer noch eine mehr oder minder willkürliche Annahme hinzutreten.

Wir wollen zunächst den Fall behandeln, dass der Querschnitt des Stabs ein Rechteck ist und die Kraftebene durch eine Hauptaxe geht. Dann liegt es nahe, $\tau_{xz} = 0$ zu setzen, denn es ist kein Grund zu der Vermuthung gegeben, dass Schubspannungen im Querschnitte rechtwinklig zur Ebene der äusseren Kräfte auftreten sollten. Wir wissen vielmehr sicher, dass an den zur Kraftebene parallelen Querschnittskanten $\tau_{xz} = 0$ sein muss, weil an den dazu gehörigen Seitenflächen des Balkens von aussen her keine Kräfte τ_{zx} einwirken. — Mit dieser Annahme, die schliesslich darauf hinauskommt, dass alle Schichten, in die man sich den Balken parallel zur Kraftebene zerlegt denken kann, gleiche Formänderungen ausführen, oder dass überhaupt alle Formänderungs- und Spannungsgrössen von der Querschnittscoordinate z unabhängig sind, geht die vorige Gleichung über in

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}$$

und da σ_x schon überall als bekannt vorauszusetzen ist, lässt sich aus ihr die Vertheilung der Schubspannungen der Höhe des Balkenquerschnitts nach leicht ableiten.

Es kommt zwar auf dasselbe hinaus, ist aber anschaulicher, wenn man diese Betrachtung durch eine andere ersetzt.

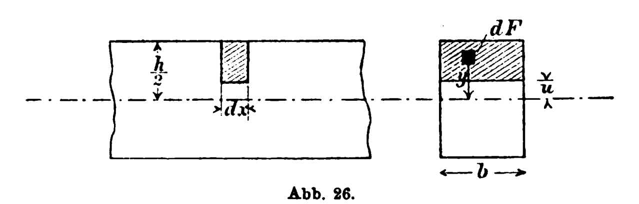


Abb. 26.

Die Gl. (5) bezogen sich auf das Gleichgewicht eines unendlich kleinen Parallelepipeds; wir wollen dieselbe Schlussfolgerung, die zu ihnen führte, jetzt auf das Gleichgewicht eines etwas grösser abgegrenzten Körpertheiles anwenden. In Abb. 26

ist links ein Stück der Ansichtszeichnung des Balkens, rechts der Querschnitt dargestellt, und der scheibenförmige Theil des Balkens, dessen Gleichgewicht wir untersuchen wollen, ist in beiden Projectionen durch Schraffirung hervorgehoben. Ausserdem gibt Abb. 27 noch eine Gesammtübersicht des Balkens und der an ihm angreifenden Lasten. Wir stellen zunächst eine Beziehung auf, die zwischen dem Biegungsmomente M und der Scheerkraft V für irgend einen Querschnitt mm besteht. Nach den Definitionen dieser Grössen hat man

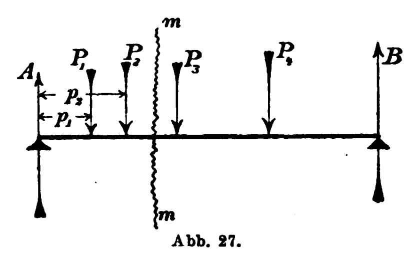


Abb. 27.

$$V = A - \sum_0^x P \quad \text{und} \quad M = Ax - \sum_0^x P(x - p).$$

Differentiirt man M nach x, so erhält man

$$\frac{dM}{dx} = A - \sum_0^x P.$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass man beim Weiterrücken des Querschnitts um die Strecke dx nicht über den Angriffspunkt einer Einzellast hinausrückt, denn an einer solchen Stelle ist zwar M selbst stetig, $\frac{dM}{dx}$ erleidet aber einen plötzlichen Sprung. Tritt indessen eine stetig vertheilte Belastung an die Stelle des Systems der Einzellasten, so bleibt die Gleichung immer noch gültig, da der Zuwachs, den M dann ausserdem noch erfährt, weil ein Belastungsdifferential, das vorher zur rechten Seite zählte, auf die linke Seite übertritt, nur von der zweiten Ordnung unendlich klein ist und daher nicht in Betracht kommt.

Man hat daher, wie aus dem Vergleiche der vorstehenden Formeln hervorgeht, allgemein

$$V = \frac{dM}{dx}, \tag{72}$$

denn auch V theilt mit dem Differentialquotienten von M die Eigenschaft, seinen Werth sprungweise zu ändern, wenn der Querschnitt über den Angriffspunkt einer Einzellast hinaus gerückt wird.

Man kann sich diese einfache, aber sehr wichtige Beziehung auch noch in anderer Weise klar machen. Für den Schnitt mm waren die äusseren Kräfte links vom Schnitt auf die Scheerkraft V im Querschnittsschwerpunkt und das Kräftepaar vom Momente M zurückgeführt. Gehen wir um dx weiter, so muss V parallel um dx verlegt werden. Dabei tritt aber noch ein Kräftepaar Vdx auf, das die Aenderung von M darstellt; aus $dM = Vdx$ folgt aber Gl. (72) sofort.

An dem in Abb. 26 angegebenen scheibenförmigen Körpertheile greifen die Spannungen an den drei Schnittflächen an. Wir wollen dabei nur auf das Gleichgewicht gegen Verschieben in horizontaler Richtung achten. Von den Spannungen an den quer zur Stabaxe gehenden Schnittflächen kommen dann nur die Normalspannungen σ in Betracht. Nach Gl. (48) ist in dem Schnitte mit der Abscisse x

$$\sigma = \frac{M}{\Theta} y$$

und an dem Schnitte mit der Abscisse $x + dx$ kommt noch ein Differential hinzu, das sich durch Differentiiren, also aus

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial x} \cdot \frac{y}{\Theta} = \frac{Vy}{\Theta}$$

leicht feststellen lässt. Die Normalspannungen an beiden Schnittflächen wirken in entgegengesetzter Richtung; für das Gleichgewicht gegen Verschieben kommt also nur ihr Unterschied in Frage. Im Ganzen erhalten wir dafür

$$\int_u^{\frac{h}{2}} d\sigma\, dF = dx \frac{V}{\Theta} \int_u^{\frac{h}{2}} y\, dF,$$

wenn die Integration über den schraffirten Theil des Querschnitts ausgedehnt wird.

In der dritten Schnittfläche wirkt nur die Schubspannung

τ_{yx} in horizontaler Richtung und zwar über die Fläche bdx. Die Gleichgewichtsbedingung liefert

$$\tau_{yx}\, b dx = dx \frac{V}{\Theta} \int_u^{\frac{h}{2}} y dF,$$

woraus τ_{yx} und damit auch die gesuchte Schubspannung τ_{xy} im Querschnitte in der Entfernung u von der Nulllinie,

$$\tau_{xy} = \frac{V}{b\Theta} \int_u^{\frac{h}{2}} y dF \tag{73}$$

folgt. Das Integral stellt das statische Moment des über u hinaus liegenden Querschnittstheiles in Bezug auf die Nulllinie dar. Für den rechteckigen Querschnitt ist

$$\int_u^{\frac{h}{2}} y dF = b\left(\frac{h^2}{8} - \frac{u^2}{2}\right) \quad \text{und daher } \tau = \frac{V}{\Theta}\left(\frac{h^2}{8} - \frac{u^2}{2}\right).$$

Wir wollen aber für dieses statische Moment ausserdem noch den Buchstaben S setzen, also Gl. (73) in der Form

$$\tau_{xy} = \frac{VS}{b\Theta} \tag{74}$$

schreiben, denn offenbar kann die vorausgehende Betrachtung auch dann angewendet werden, wenn der Querschnitt nicht ein einfaches Rechteck bildet, sondern nur dort, wo wir τ berechnen wollen, durch zwei parallele Seiten begrenzt wird, wie z. B. der Steg eines I-Trägers. Auch für solche Fälle ist durch Gl. (74) die Aufgabe gelöst, denn das statische Moment S, das zu einem gegebenen u gehört, kann immer leicht gefunden werden.

Durch Gl. (74) ist τ als Function von u bestimmt und damit die Spannungsvertheilung gegeben. Wir erkennen aus dieser Gleichung, dass τ am Rande des Querschnitts verschwindet, also gerade dort, wo die Normalspannung ihren grössten Werth annimmt, und dass umgekehrt τ am grössten

wird in der Nulllinie, also da, wo die Normalspannung verschwindet. Speciell für den rechteckigen Querschnitt ist τ eine Function zweiten Grades von u. Wenn wir diese Function durch eine Curve darstellen, wie wir es früher thaten, um die Vertheilung der Normalspannungen vor Augen zu führen, erhalten wir jetzt eine Parabel. Das lineare Spannungsvertheilungsgesetz gilt also nur für die Normalspannungen und nicht für die Schubspannungen.

Es bleibt jetzt noch die Vertheilung der Schubspannungen über einen anders gestalteten Querschnitt zu besprechen. Wir wählen zur Erläuterung des Verfahrens einen kreisförmigen Querschnitt, der deshalb von besonderer Wichtigkeit ist, weil die Nieten vorwiegend auf Schub beansprucht werden und sich bei ihnen die Schubkraft, die sie übertragen, über einen kreisförmigen Querschnitt vertheilt. Hier dürfen wir nicht, wie vorher beim rechteckigen Querschnitt, die Schubspannungscomponenten τ_{xz}, die quer zur Kraftebene gehen, gleich Null setzen. Vielmehr muss am Umfang die resultirende Schubspannung in die Richtung der Querschnittstangente fallen, wenigstens dann, wenn am Umfange des Stabes keine äusseren Kräfte in der Richtung der Stabaxe auftreten.

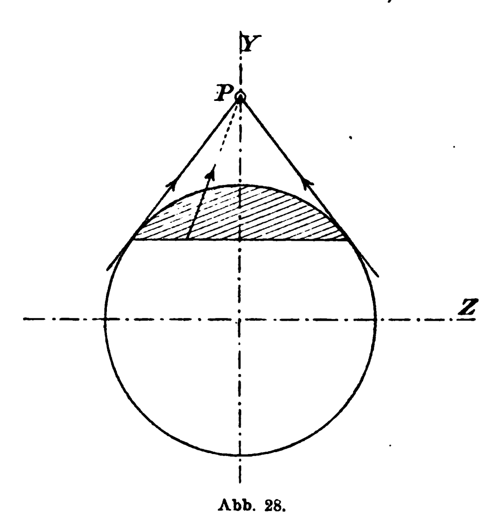


Abb. 28.

Dies folgt aus dem Gleichgewichte eines unendlich kleinen Parallelepipeds, von dem eine Kante mit einem Elemente des Querschnittsumrisses zusammenfällt. Wenn die Schubspannung am Umfange eine Componente in der Richtung der Normalen zum Querschnittsumrisse haben sollte, müsste, um

das Gleichgewicht gegen Drehen zu sichern, nothwendig auch eine Kraft auf der Mantelfläche des Stabs in der Richtung der Stabaxe übertragen werden, aus demselben Grunde, aus dem wir früher $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ fanden.

Nun kann man freilich im Zweifel sein, ob nicht in der That bei einem Niete, dessen Schaft von den Blechen, die er verbindet, vollständig umschlossen wird, solche Kräfte — also Reibungskräfte — in der Richtung der Stabaxe am Umfange auftreten. Gerade bei diesem für die Anwendungen sehr wichtigen Falle ist daher die hier durchzuführende Betrachtung ganz unsicher und man thut in der That bei der Berechnung von Nieten viel besser, sich an die Ergebnisse von Versuchen zu halten, durch die die Festigkeit von Nietverbindungen unmittelbar ermittelt wird, als an die Formel, die ich jetzt theoretisch ableiten werde. Diese Versuche zeigen nämlich, dass die Festigkeit von Nietverbindungen höher ist, als man nach dem Ergebnisse dieser Berechnung erwarten könnte. Sie stellt sich ungefähr so hoch, als wenn sich die Schubspannungen gleichförmig über den Querschnitt vertheilten.

Indessen kann man daraus der hier zu gebenden Entwickelung keinen Vorwurf machen. Sie gilt selbstverständlich, wie jede Schlussfolgerung, nur so lange, als ihre Voraussetzungen erfüllt sind. Gegen die unverständige Anwendung eines an sich richtigen Resultats gibt es nur einen Schutz: nämlich eine genaue und nicht bloss oberflächliche Kenntniss der Theorie. Wer diese besitzt, wird die Theorie nur dann nicht in Uebereinstimmung mit den Thatsachen finden, wenn er im Begriffe ist, eine neue Entdeckung zu machen, die selbstverständlich im Stande sein kann, eine Aenderung der theoretischen Lehren nothwendig zu machen.

Es sei also jetzt ausdrücklich vorausgesetzt, dass am Umfange des Stabes, wenigstens in der Umgebung des Querschnitts, für den wir die Schubspannungen berechnen wollen, keine derartige äussere Kraft auftritt. Dann müssen nothwendig die Schubspannungen am Rande des Querschnitts in die Richtung der Tangente fallen. Für einen Punkt auf der

Y-Axe müssen sie der Symmetrie wegen in die Richtung dieser Axe fallen und dazwischen werden sie irgend eine mittlere Richtung einnehmen. Man wird nicht viel von der Wahrheit abweichen, wenn man annimmt, dass die Schubspannungen in jedem Punkte einer zur Y-Axe senkrecht gezogenen Sehne alle durch den Punkt P in Abb. 28 gehen, in dem die Tangente die Y-Axe trifft. Bedenklicher ist freilich die andere Annahme, die man hiermit verbindet, nämlich dass die in der Richtung der Y-Axe gehende Componente τ_{xy} auch hier noch unabhängig von der Querschnittscoordinate z sei. Sie ist indessen die einfachste, die man machen kann, und wird daher, um zu einem Näherungsresultate zu gelangen, zu Grunde gelegt.

Auf Grund dieser Annahmen lässt sich die Aufgabe jetzt leicht lösen. Man berechnet zuerst τ_{xy} nach Gl. (74), wobei S wieder das statische Moment des in Abb. 28 schraffirten Querschnittstheiles bedeutet, der oberhalb der Stelle liegt, für die τ_{xy} aufgesucht wird und fügt die Componenten τ_{xz} entsprechend der Bedingung hinzu, dass die Resultirende durch den Punkt P gehen soll.

§ 21. Fortsetzung. Die Spannungstrajectorien.

Da bei dem allgemeinen Falle der Biegungsbeanspruchung eines Stabes ausser den Normalspannungen auch noch Schubspannungen übertragen werden, ist die Normalspannung keine Hauptspannung. Die Hauptrichtungen des Spannungszustandes sind vielmehr im Allgemeinen gegen die Längsaxe des Stabes unter irgend einem Winkel geneigt. Nur in den äussersten Fasern, wo σ seinen grössten Werth annimmt und $\tau = 0$ ist, ist σ zugleich die Hauptspannung und nur diesem glücklichen Umstande ist es zu danken, dass man bei gewöhnlichen Biegungsaufgaben nur auf die Normalspannungen σ zu achten braucht, sich also mit der einfachen Anwendung der früher für σ aufgestellten Formeln begnügen kann, um zu erkennen, in welchem Grade das Material beansprucht wird. Dieses

Verfahren ist aber nicht mehr zulässig, wenn die Schubspannungen verhältnissmässig gross gegen die Normalspannungen werden, also dann, wenn V gross, M dagegen klein ist. Dieser Fall tritt ein, wenn der Stab eine grosse Querschnittsfläche und nur eine geringe Länge hat. Wegen der geringen Länge sind die Hebelarme und daher die Biegungsmomente klein; ein solcher Stab wird daher mit Rücksicht auf die Normalspannungen grosse Lasten tragen können, dabei wird aber V gross und die Schubspannungen treten in den Vordergrund, so dass die Festigkeit schliesslich in erster Linie von diesen abhängt.

Es ist daher wünschenswerth, noch eine Uebersicht darüber zu erlangen, in welchen Richtungen die Hauptspannungen an den verschiedenen Theilen des Stabes auftreten. Man construirt zu diesem Zwecke Linien, die überall in die Richtungen der Hauptspannungen fallen. Diese Linien werden als Spannungstrajectorien bezeichnet. Um sie zu erhalten, legt man eine Anzahl Querschnitte durch den Stab, berechnet für verschiedene Stellen dieser Querschnitte die Normalspannung und die Schubspannung, wie es in dem vorausgehenden Paragraphen gelehrt wurde, und bestimmt dann nach Gl. (11) die Winkel φ, die die Hauptrichtungen des Spannungszustandes mit der Stabaxe bilden. Nachdem man so eine genügende Zahl von Tangenten der Spannungstrajectorien construirt hat, kann man diese leicht freihändig in die Zeichnung des Stabes eintragen. Anstatt dessen kann man auch die Gleichungen dieser Curven mit Hülfe einer Integration erhalten, da die Tangente ihres Neigungswinkels, also der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ für sie bekannt ist.

Ich werde diese Rechnungen hier nicht durchführen, sondern mich damit begnügen, in Abb. 29 (S. 134) den Verlauf der Spannungstrajectorien für den Fall eines Stabes von rechteckigem Querschnitte, der an einem Ende eingemauert ist und am freien Ende eine Einzellast trägt, anzugeben. In der neutralen Schicht schneiden die Spannungstrajectorien die Stabaxe

unter Winkeln von 45°, da hier der Fall der reinen Schubspannung vorliegt, und an der oberen und der unteren Begrenzung steht die eine senkrecht zur Kante und die andere berührt sie. Selbstverständlich steht die eine Schaar überall senkrecht zur anderen.

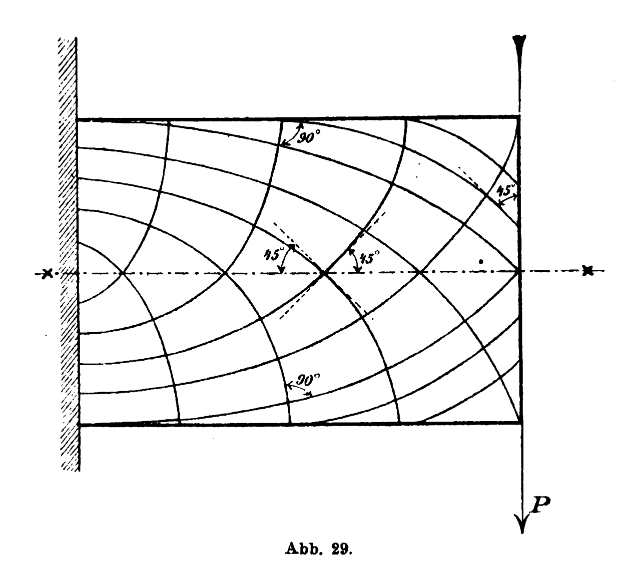


Abb. 29.

Schliesslich bemerke ich noch, dass die Beachtung der Schubspannungen im gebogenen Balken namentlich dann von Wichtigkeit werden kann, wenn das Material eine besonders geringe Schubfestigkeit hat, wie es beim Holze in Schnittrichtungen, die parallel zu den Fasern laufen, zutrifft. Es kommt nicht selten vor, dass ein Holzbalken, dessen Spannweite selbst zehnmal so gross sein kann als die Querschnittshöhe, durch die Ueberwindung der Schubfestigkeit in der neutralen Schicht bricht, wenn er in der Mitte belastet wird. Selbstverständlich wird die Gefahr eines Bruches dieser Art um so grösser, je kleiner das Verhältniss zwischen der Spannweite und der Höhe des Querschnitts ist.

Es möge daher noch berechnet werden, von welchem Werthe dieses Verhältnisses ab die Bruchgefahr nur noch

durch die Normalspannungen bedingt ist. Ich setze dabei einen Holzbalken von der Länge $2\,l$ und der Querschnittshöhe h voraus, der in der Mitte die Last $2\,P$ trägt. Dann ist $V = P$ und $M = Pl$ zu setzen. Für die grösste Normalspannung σ erhält man

$$\sigma = \frac{6\,Pl}{b\,h^2}$$

und für die Schubspannung τ in der neutralen Schicht nach Gl. (74)

$$\tau = \frac{P \cdot \frac{bh^2}{8}}{b\Theta} = \frac{3}{2} \cdot \frac{P}{bh}\,.$$

Wenn das Verhältniss zwischen der Druckfestigkeit (die beim Holze gewöhnlich etwas kleiner ist als die Zugfestigkeit, beide für Schnittrichtungen senkrecht zur Faser gerechnet) und der Schubfestigkeit zwischen den Fasern mit n bezeichnet wird, bestimmt sich jenes Verhältniss aus der Gleichung

$$\frac{6\,Pl}{bh^2} = n \cdot \frac{3}{2}\,\frac{P}{bh}, \quad \text{also} \quad \frac{l}{h} = \frac{n}{4} \quad \text{oder} \quad \frac{2\,l}{h} = \frac{n}{2}\,.$$

Nun wird n nicht leicht grösser als etwa 10, die ganze Spannweite darf also nur etwa fünfmal so gross sein, als die Querschnittshöhe, wenn eine Bruchgefahr durch die Schubspannungen gegeben sein soll; ausnahmsweise (wie es scheint, besonders bei Weisstannenholz) kann n aber auch noch grösser werden. So abnorm grosse Werthe von n kommen indessen bei anderen Materialien als Holz überhaupt nicht vor, auch nicht bei gewalztem Schweisseisen, das sich dem Holze noch am meisten nähert, und es ist daher gerechtfertigt, wenn man bei gewöhnlichen Biegungsberechnungen die Schubspannungen ganz unberücksichtigt lässt.

Ein Fall muss indessen noch erwähnt werden. Bei einem Balken von I-förmigem Querschnitte ist nämlich das statische Moment S in Gl. (74) unmittelbar unterhalb des Flantsches fast ebenso gross als für die neutrale Schicht. Die Schubspannungen erreichen daher an dieser Stelle schon beträchtliche Werthe, während die Normalspannung gegenüber dem grössten Werthe an der äussersten Faser noch nicht viel ab-

genommen hat. Es kann daher vorkommen, dass die Hauptspannung an dieser Stelle grösser wird als in der äussersten Faser, und zwar wird dieser Fall auch hier wieder um so eher vorkommen können, je beträchtlicher die Schubspannungen im Vergleiche zu den Normalspannungen ausfallen, also bei Stäben von geringer Länge und grosser Höhe. Eine Berechnung, die sich hierauf bezieht, befindet sich unter den Aufgaben am Schlusse des Abschnitts.

§ 22. **Genietete Träger.**

Ein Stab, der eine Biegungsbelastung aufnehmen soll wird oft aus mehreren Theilen zusammengesetzt, derart, dass der Querschnitt aus der Summe der Querschnitte der einzelnen Theile besteht. Wenn die Theile des Stabes fest miteinander zusammenhingen, würden in den Flächen, in denen diese Theile aneinander grenzen, Schubspannungen übertragen werden. Diese Spannungen fallen hier fort, — soweit sie nicht etwa durch Reibungen in den Grenzflächen ersetzt werden. Damit sich aber der zusammengesetzte Stab im grossen Ganzen doch ähnlich verhalten kann, als wenn er aus einem Stücke wäre, müssen die sonst durch die Schubspannungen übertragenen Kräfte durch die Verbindungstheile aufgenommen werden, die das Ganze zusammenhalten.

Sehr häufig verwendet man genietete Blechbalken, denen man einen den gewalzten I-Trägern ähnlichen Querschnitt gibt, um wie bei diesen mit möglichst wenig Materialaufwand ein möglichst grosses Trägheits- oder Widerstandsmoment zu erzielen. Der Steg und die rechtwinklig dazu verlaufenden Gurtplatten werden durch Winkeleisen aneinander geschlossen und alle Theile werden durch Vernietung miteinander verbunden. Hier sind es die Nieten, durch die alle Schubspannungen übertragen werden müssen. Wir wollen berechnen, wie gross die Kraft ist, die auf einen solchen Niet trifft, der den Anschluss der Winkeleisen an den Steg bewirkt. In Abb. 30 ist ein kleines Stück von der Ansichtszeichnung eines

genieteten Blechträgers gegeben. Die Entfernung zwischen zwei aufeinander folgenden Nieten sei gleich e. Der durch einen schwarzen Kreis angegebene Niet N muss für den Unterschied der Normalspannungen σ in den durch ihn angeschlossenen Winkeln und Gurtplatten für zwei um e voneinander entfernte Querschnittsflächen aufkommen. In der That gleicht der Fall ganz dem in § 20 behandelten; es ist nur an die Stelle des Abstandes dx in Abb. 26 hier der endliche Abstand e getreten. Man hat wie dort

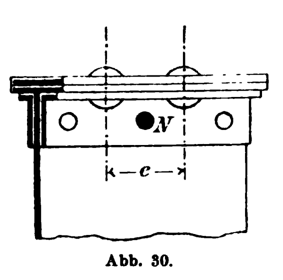


Abb. 30.

$$\sigma = \frac{M}{\Theta} y \quad \text{und} \quad \Delta\sigma = \frac{\Delta M}{\Theta} y = \frac{Ve}{\Theta} y,$$

wobei nur die endliche Differenz $\Delta\sigma$ für das Differential $d\sigma$ eingetreten ist. Die von dem Niet zu übertragende Kraft P folgt daraus

$$P = \int \Delta\sigma dF = \frac{Ve}{\Theta} \int y dF = \frac{Ve}{\Theta} \cdot S, \qquad (75)$$

wenn mit S das statische Moment des durch den Niet angeschlossenen Querschnittstheiles in Bezug auf die Nulllinie bezeichnet wird.

Früher hat man auch öfters aus Holz sogenannte verzahnte oder verdübelte Träger zusammengesetzt. Jetzt macht man seltener davon Gebrauch und ich will daher nicht näher darauf eingehen, bemerke vielmehr nur noch, dass deren Berechnung ebenfalls nach Gl. (75) erfolgen kann.

§ 23. Die elastische Linie des gebogenen Stabes.

Bisher war unser Augenmerk nur auf die Berechnung der Spannungen gerichtet. Um die Formänderungen kümmerten wir uns nur so weit, als es nöthig war, um die nöthigen Anhaltspunkte für wahrscheinliche Annahmen über die Spannungsvertheilung zu erlangen. Jetzt wollen wir uns die Frage nach der Gestalt der elastischen Linie vorlegen, also jener Linie,

in die die Stabmittellinie durch die Biegung übergeht. Dabei soll aber von vornherein vorausgesetzt werden, dass der Biegungspfeil gering bleibt, da andere Fälle fast ganz ohne Interesse für die Anwendungen sind.

Zu diesem Zwecke berechnen wir zunächst, wie gross der Winkel $d\varphi$ ist, um den sich zwei im Abstande dx aufeinander folgende Querschnitte bei der Biegung gegeneinander drehen. Eine Faser, die den Abstand y von der Nulllinie hat, erfährt eine Längenänderung $y d\varphi$, die nach dem Elasticitätsgesetze mit der specifischen Spannung σ an dieser Stelle in einem Zusammenhange steht, der durch die Proportion

$$\frac{y\,d\varphi}{dx} = \frac{\sigma}{E}$$

ausgesprochen wird. Für σ führen wir den durch Gl. (48) angegebenen Werth ein und erhalten

$$d\varphi = dx\,\frac{M}{E\Theta}. \tag{76}$$

Diese Gleichung kann noch auf zwei andere Formen gebracht werden, die für die Anwendung meistens bequemer sind. Zunächst führen wir den Krümmungsradius ϱ der elastischen Linie mit Hülfe der Beziehung $\varrho\,d\varphi = dx$ ein und erhalten

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E\Theta} \quad \text{oder} \quad \varrho = \frac{E\Theta}{M}. \tag{77}$$

Andererseits hat man aber für ϱ nach den Lehren der analytischen Geometrie allgemein den Ausdruck

$$\varrho = \frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

wenn jetzt y nicht mehr die Coordinate eines Punktes des Querschnitts, sondern die Ordinate der elastischen Linie bedeutet. In unserem Falle weicht aber die Curve, deren Krümmungshalbmesser wir betrachten, nur sehr wenig von einer Graden ab. Wenn wir die Ordinaten y von der ursprünglichen Lage der Stabaxe aus rechnen, ist daher $\frac{dy}{dx}$ die Tangente

eines sehr kleinen Winkels und das Quadrat dieses sehr kleinen Bruches kann daher ohne merklichen Fehler in dem vorausgehenden Ausdrucke gegen die Einheit vernachlässigt werden. Dadurch geht ϱ in den reciproken Werth von $\frac{d^2y}{dx^2}$ über und Gl. (77) liefert, wenn man dies einsetzt,

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = - M. \tag{78}$$

Das Vorzeichen von ϱ ist nämlich zunächst unbestimmt, da im Zähler des Ausdrucks für ϱ eine Quadratwurzel steht. Es muss daher nachträglich so gewählt werden, dass es mit den übrigen Festsetzungen in Uebereinstimmung steht. Nun wird M dann positiv gerechnet, wenn es den in horizontaler Lage gezeichneten Stab so krümmt, dass sich die Hohlseite noch oben hin kehrt. Zugleich wollen wir die Einsenkungen y positiv rechnen, wenn sie, wie gewöhnlich, nach abwärts gehen. In diesem Falle ist aber bei dem auf zwei Stützen ruhenden Balken $\frac{dy}{dx}$ am grössten am linken Auflager des Balkens; es wird dann, wenn wir weiter nach der Mitte hin gehen, allmählich kleiner, wird dann zu Null, nimmt hierauf negative Werthe an und erlangt den grössten negativen Werth am rechten Auflager. Ueber die ganze Spannweite hin ist daher $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativ, während M überall positiv ist, und damit Gl. (78) auch dem Vorzeichen nach gültig sei, musste daher ein Minuszeichen beigegeben werden.

Gl. (78) wird die Differentialgleichung der elastischen Linie genannt. Um die Gleichung dieser Curve daraus in endlicher Form zu finden, drückt man zunächst mit Hülfe der gegebenen Lasten M als Function von x aus und integrirt Gl. (78) zweimal nach x. Dabei treten zwei Integrationsconstanten auf, deren Werthe mit Hülfe der Grenzbedingungen an den Enden des Balkens ermittelt werden.

Dieses Verfahren soll an einigen einfachen Fällen erläutert werden. Zunächst sei ein Balken von überall gleichem Querschnitt gegeben, der an beiden Enden frei aufliegt und

eine gleichmässig über die ganze Länge vertheilte Belastung von q kg auf die Längeneinheit trägt. Für irgend einen Querschnitt im Abstande x vom linken Auflager hat man für das Biegungsmoment, also für das Moment der links vom Querschnitte liegenden äusseren Kräfte

$$M = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}.$$

Mit l ist dabei die Spannweite bezeichnet. Der Auflagerdruck auf beiden Seiten ist gleich $\frac{ql}{2}$, das erste Glied stellt daher das Moment des linken Auflagerdrucks dar. Die Belastung der linken Balkenhälfte ist qx und der Hebelarm davon gleich $\frac{x}{2}$. Das Biegungsmoment ist über die ganze Spannweite positiv und wird an den beiden Auflagern zu Null. Denkt man sich M in jedem Punkte der Stabaxe rechtwinklig dazu in irgend einem Massstabe aufgetragen, so erhält man eine Parabel. Allgemein heisst die in dieser Weise gefundene Curve die zu der gegebenen Belastung gehörige Momentencurve und die zwischen ihr und der Stabaxe eingeschlossene Fläche die Momentenfläche.

Mit dem hier festgestellten Werthe von M geht Gl. (78) über in

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2} - \frac{qlx}{2}.$$

Nach zweimaliger Integration erhält man daraus

$$E\Theta y = \frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} + Cx + C_1,$$

wenn mit C und C_1 die beiden Integrationsconstanten bezeichnet werden. Nun muss nach den Bedingungen der Aufgabe y zu Null werden für $x = 0$ und für $x = l$, da beide Enden des Balkens durch die Auflagerung gegen verticale Bewegungen geschützt sind. Die erste Bedingung lehrt, dass die Constante C_1 gleich Null zu setzen ist. Zur Ermittelung von C haben wir die Gleichung

$$0 = \frac{ql^4}{24} - \frac{ql^4}{12} + Cl, \quad \text{also } C = \frac{ql^3}{24},$$

und für die Gleichung der elastischen Linie in endlicher Form folgt daher

$$E\Theta y = \frac{qx^4}{24} - \frac{qlx^3}{12} + \frac{ql^3x}{24}. \tag{79}$$

Die Linie ist also vom vierten Grade. Es mag noch erwähnt werden, dass sich die hier analytisch vorgenommene Integration allgemein auch mit Hülfe einer geometrischen Construction, nämlich mit Hülfe eines Seilpolygons, ausführen lässt. Diese Betrachtungen gehören indessen zur graphischen Statik und sie werden dort eine ausführliche Darstellung erhalten.

Von besonderem Interesse ist der Werth der Einsenkung y in der Balkenmitte, also zugleich der grösste Werth, den y annimmt. Man nennt diese Strecke den Biegungspfeil, der hier stets mit dem Buchstaben f bezeichnet werden soll. Mit $x = \frac{l}{2}$ erhält man aus Gl. (79)

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{E\Theta} = \frac{5}{384} \frac{Ql^3}{E\Theta}. \tag{80}$$

In der letzten Form dieser Gleichung ist unter Q die Gesammtbelastung des Balkens, also ql zu verstehen.

Zweitens sei ein Balken betrachtet, der in der Mitte der Spannweite eine Einzellast P trägt. Man hat hier

$$M = \frac{P}{2} x$$

und daher

$$E\Theta \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{Px}{2}$$

oder nach zweimaliger Integration

$$E\Theta y = -\frac{Px^3}{12} + Cx + C_1.$$

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten muss aber hier ein anderes Verfahren eingeschlagen werden. Der Ausdruck $\frac{P}{2} x$ für M ist nämlich nur für solche Querschnitte gültig, die links von der Mitte liegen; rechts davon wäre

$$M = \frac{P}{2} x - P\left(x - \frac{l}{2}\right) = \frac{P(l-x)}{2}$$

zu setzen. Infolgedessen gilt auch die vorausgehende endliche Gleichung nur für die linke Hälfte der elastischen Linie. Diese Linie selbst setzt sich aus zwei Aesten zusammen, die sich in der Mitte stetig und ohne Knick aneinander schliessen, die aber zu verschiedenen Bildungsgesetzen gehören. Hier wird die Lösung dadurch vereinfacht, dass die Last in der Mitte angenommen wurde. Dadurch sind beide Aeste der elastischen Linie symmetrisch zueinander gestaltet und symmetrisch gelegen und es genügt, den einen Ast zu betrachten. Dieser muss nämlich der Symmetrie wegen in der Mitte eine horizontale Tangente haben. In

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = -\frac{Px^2}{4} + C$$

muss daher die rechte Seite für $x = \frac{l}{2}$ verschwinden, also $C = \frac{Pl^2}{16}$ gesetzt werden.

Für die andere Integrationsconstante C_1 erhält man wie vorher $C_1 = 0$, weil y für $x = 0$ verschwinden muss. Für den linken Ast der elastischen Linie hat man daher schliesslich die Gleichung

$$E\Theta y = \frac{Pl^2 x}{16} - \frac{Px^3}{12}. \tag{81}$$

Mit $x = \frac{l}{2}$ erhält man für den Biegungspfeil f

$$f = \frac{Pl^3}{48 E\Theta}, \tag{82}$$

eine bei den Anwendungen sehr häufig gebrauchte Formel.

Trägt der Balken zwei Einzellasten P_1 und P_2 in den Abständen p_1 und p_2 vom linken Auflager, so zerfällt die elastische Linie in drei sich stetig und ohne Knick aneinander schliessende Aeste. Man berechnet zunächst die Auflagerkräfte. Wird der Auflagerdruck am linken Ende mit A bezeichnet, so hat man

$$M_{\mathrm{I}} = Ax; \quad M_{\mathrm{II}} = Ax - P_1(x - p_1);$$
$$M_{\mathrm{III}} = Ax - P_1(x - p_1) - P_2(x - p_2).$$

Von diesen Ausdrücken gilt M_I zwischen $x = 0$ und $x = p_1$, der zweite zwischen $x = p_1$ und $x = p_2$ und der dritte zwischen $x = p_2$ und $x = l$. Man hat der Reihe nach jeden dieser Ausdrücke in die Gleichung der elastischen Linie einzusetzen und diese jedesmal zu integriren. Dadurch erhält man die endlichen Gleichungen der drei Aeste, in denen zusammen sechs unbekannte Integrationsconstanten auftreten. Zu deren Bestimmung hat man zunächst die beiden Bedingungen, dass y an den beiden Auflagerstellen zu Null werden muss. Ausserdem muss an jeder Uebergangsstelle y und $\frac{dy}{dx}$ für beide Aeste gleich werden. Dadurch erhält man nochmals vier Bedingungsgleichungen, die mit den vorigen zusammen zur Ermittelung der Constanten genügen.

Dasselbe Verfahren bleibt auch noch anwendbar, wenn der Balken drei oder beliebig viele Einzellasten trägt. Es macht aber dann an sich zwar ganz einfache, durch den Umfang, den sie annehmen, aber sehr lästige Rechnungen zur Bestimmung der verschiedenen Integrationsconstanten der einzelnen Aeste nöthig. In solchen Fällen thut man daher fast immer besser, sich des graphischen Verfahrens zur Ermittelung der Gestalt der elastischen Linie zu bedienen.

Aehnlich liegt der Fall, wenn der Balken zwar nur eine stetig vertheilte Belastung oder eine einzige Last in der Mitte trägt, der Querschnitt aber nicht constant ist, sondern in verschiedenen Absätzen wechselt, wie es z. B. bei Blechbalken vorkommt, deren Querschnitt nach der Mitte zu durch Aufnieten von Gurtungsplatten verstärkt wird. Auch dann setzt sich die elastische Linie aus einer Anzahl verschiedener Aeste zusammen. Verändert sich der Querschnitt stetig, so ist Θ als Function von x in die Differentialgleichung einzusetzen. Insofern die Ausführung der Integration dadurch nicht erschwert oder unmöglich gemacht wird, erleidet das Verfahren hierdurch keine Aenderung. Der praktisch wichtigste Fall bleibt aber immer der des Balkens von constantem Querschnitt; man behilft sich häufig damit, die für diesen auf-

gestellten Formeln näherungsweise auch für andere Fälle anzuwenden, weil man die umständlichere Rechnung, die diese erfordern würden, scheut und man sich sehr oft mit einer ungefähren Schätzung des Biegungspfeiles begnügen kann.

Die vorausgehenden Rechnungen beruhen auf der stillschweigenden Voraussetzung, dass die Kraftebene durch eine Hauptaxe des Querschnitts geht. Trifft dies nicht zu, so hat man die Lasten, wie in § 16, in Componenten nach den Richtungen der Hauptaxen zu zerlegen und die Biegungslinie für die Componenten in beiden Ebenen zu ermitteln. Die gesammte Formänderung ergibt sich durch geometrische Summirung der zu diesen beiden Componentensystemen gehörigen elastischen Verschiebungen.

§ 24. Einfluss der Schubspannungen auf die Biegungslinie.

Bei den vorausgehenden Betrachtungen ist noch keine Rücksicht auf die Formänderungen genommen, die durch die Schubspannungen bewirkt werden. Diese haben zur Folge, dass der Biegungspfeil noch etwas vergrössert wird und dass überhaupt die elastische Linie von der vorher berechneten Gestalt ein wenig abweicht.

In Abb. 31 ist ein Längenelement des Balkens gezeichnet. Wenn sich die Scheerkraft V gleichmässig über den Querschnitt vertheilte, hätte sie zur Folge, dass sich der ursprünglich rechte Winkel zwischen dem Querschnitt und der Stabaxe um einen kleinen Betrag γ änderte, der nach dem Elasticitätsgesetze leicht berechnet werden kann. Man hat nämlich für den durchschnittlichen Betrag τ_m

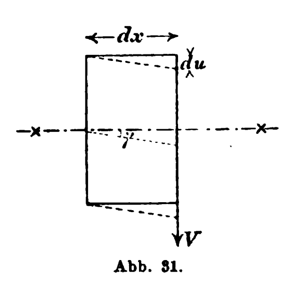


Abb. 31.

der Schubspannung

$$\tau_m = \frac{V}{F}$$

und nach Gl. (33)

$$\gamma = \frac{\tau_m}{G} = \frac{V}{GF}.$$

Die Winkeländerung γ bewirkt eine Parallelverschiebung der beiden Querschnitte gegeneinander, die mit du' bezeichnet werden mag; man findet dafür

$$du' = \gamma\, dx = \frac{V\, dx}{GF}.$$

So einfach liegt die Sache in Wirklichkeit aber nicht. Die Schubspannungen vertheilen sich nach einem anderen Gesetze über den Balkenquerschnitt, das in § 20 festgestellt wurde. In der Mitte sind demnach die Schubspannungen grösser als der vorher berechnete Durchschnittsbetrag τ_m während sie nach der oberen und der unteren Kante hin bis auf Null abnehmen. In Folge davon wird auch die Winkeländerung γ zwischen der Stabaxe und dem Balkenquerschnitte in der Mitte grösser, während der Winkel an den Kanten ungeändert bleibt. Man erkennt daraus nebenbei, dass die Bernouilli'sche Annahme, die Querschnitte blieben bei der Formänderung eben, nicht streng erfüllt sein kann. In der That ist auch schon im Vorhergehenden diese Annahme nur als näherungsweise richtig vorausgesetzt worden.

Hier handelt es sich besonders um den Höhenunterschied aufeinander folgender Punkte der Stabaxe, der auf Rechnung der Schubspannungen zu setzen ist. Wir bezeichnen diesen mit du und setzen

$$du = \varkappa\, du' = \varkappa \frac{V\, dx}{GF}. \tag{83}$$

Unter $\varkappa$ ist dann eine Verhältnisszahl zu verstehen, die nach den vorausgehenden Bemerkungen jedenfalls grösser als 1 ist. Der genaue Werth von $\varkappa$ hängt von der Gestalt des Querschnitts ab, da durch diese die Vertheilung der Schubspannungen und hiermit das Verhältniss zwischen dem Werthe von τ in der Mitte und dem Durchschnittswerthe τ_m bedingt ist. Es wäre indessen nicht zulässig, $\varkappa$ unmittelbar gleich dem zuletzt genannten Verhältnisse zu setzen, denn die Verschiebungen du verschiedener Faser, die in verschiedenen Abständen von der Nulllinie liegen, können nicht unabhängig voneinander erfolgen, weil sonst eine Zerrung in der Richtung

der Höhe des Querschnitts zu Stande käme. In der That ist der Vorgang durch die Querschnittskrümmung, die nothwendig auftreten muss, ziemlich verwickelt. Man hilft sich daher damit, den Werth von $\varkappa$ auf Grund einer Betrachtung zu ermitteln, die sich auf den Begriff der Formänderungsarbeit stützt. Es kommt dies darauf hinaus, dass man einen Durchschnittswerth du für alle Fasern berechnet. Strenger begründen lässt sich dieses Verfahren freilich nicht; es hat mehr den Charakter einer Abschätzung als einer genauen Berechnung. Da es sich hierbei nur um eine an sich geringfügige Correctionsgrösse handelt, lässt sich aber gegen seine Benützung nichts einwenden.

Für den Fall der reinen Schubspannung ist die specifische Formänderungsarbeit nach Gl. (44) gleich $\frac{\tau^2}{2G}$. Für das Balkenelement von der Länge dx ist daher die Formänderungsarbeit gleich

$$dx\int\frac{\tau^2}{2G}dF$$

zu setzen, wobei die Integration über den ganzen Querschnitt zu erstrecken ist.

In diesem Ausdrucke kann für τ der in Gl. (74) aufgestellte Werth eingesetzt werden. Der so ermittelten Formänderungsarbeit ist die von der Scheerkraft V (die für das Balkenelement eine äussere Kraft bildet) geleistete Arbeit $\frac{1}{2}Vdu$ gleich zu setzen. Man erhält dadurch

$$dx\int\frac{\tau^2}{2G}dF = \frac{1}{2}Vdu = \frac{1}{2}V\varkappa du' = \varkappa\frac{V^2}{2GF}dx$$

und hiermit

$$\varkappa = \frac{F\int\tau^2\,dF}{V^2}. \qquad (84)$$

Für den rechteckigen Querschnitt soll die Rechnung zu Ende geführt werden. In § 20 war dafür

$$\tau = \frac{V}{\Theta}\left(\frac{h^2}{8} - \frac{z^2}{2}\right)$$

gefunden, wobei zur Vermeidung von Missverständnissen hier z an Stelle des dort mit u bezeichneten Abstandes der betreffenden Faser von der Nulllinie gesetzt ist. Mit $\Theta = \frac{b h^3}{12}$ wird dies

$$\tau = \frac{V}{b h^3}\left(\frac{3}{2} h^2 - 6 z^2\right)$$

und daher

$$\int \tau^2 dF = \frac{V^2}{b^2 h^6} \int\limits_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \left(\frac{3}{2} h^2 - 6 z^2\right)^2 b\, dz\,.$$

Nach Ausführung der Integration erhält man

$$\int \tau^2 dF = \frac{6}{5} \frac{V^2}{b h}.$$

Setzt man dies in Gl. (84) ein und beachtet, dass $F = bh$ ist, so erhält man für den rechteckigen Querschnitt

$$\varkappa = \frac{6}{5} = 1{,}2.$$

Es möge noch bemerkt werden, dass die Berechnung von $\varkappa$ nach Gl. (84) immer leicht durchgeführt werden kann, auch wenn sich die Integration nach den gewöhnlichen Methoden nicht vornehmen lässt, indem man den Querschnitt in schmale Streifen zerlegt und an die Stelle der Integration eine Summirung treten lässt. Das Resultat dieser mechanischen Quadratur wird immer genau genug, auch wenn man eine Eintheilung in nur wenige Streifen vornimmt.

Für die besonders häufig verwendeten gewalzten Eisenträger von dem I-Profile hat man $\varkappa$ ein für alle Male berechnet. Für den I-Träger Nr. 8 (d. h. von 8 cm Höhe) wurde $\varkappa = 2{,}4$, für den höchsten Träger, der noch verwendet zu werden pflegt, Nr 50 $\varkappa = 2{,}0$ gefunden. Für die dazwischen liegenden Trägerhöhen ändert sich $\varkappa$ allmählich von dem einem zu dem anderen dieser Werthe. Grösser als bei den I-Trägern wird $\varkappa$ nicht leicht bei einer anderen Querschnittsgestalt.

Bei den jetzt durchgeführten Rechnungen ist nur auf den Einfluss von V auf die Biegungslinie geachtet worden, d. h. M wurde bei dem betrachteten Balkenelemente als Null vorausgesetzt. Wirken M und V gleichzeitig ein, so summiren sich die Wirkungen von beiden. An irgend einer Stelle im Abstande x vom linken Auflager hat man daher die gesammte Durchsenkung y'

$$y' = y + \int_0^x du, \tag{85}$$

wenn unter y die im vorigen Paragraphen berechnete Einsenkung verstanden wird. Das letzte Glied in diesem Ausdrucke ist indessen gewöhnlich klein gegen das erste und es genügt daher meistens $y' = y$ zu setzen, den Einfluss der Schubspannungen also zu vernachlässigen. Nur bei kurzen Stäben von grossem Querschnitte, bei denen, wie wir schon früher fanden, die Schubspannungen überhaupt mehr hervortreten, oder für Stellen, die den Balkenenden benachbart sind, wird es nöthig, das zweite Glied in Gl. (85) zu berücksichtigen. Um uns davon zu überzeugen, betrachten wir noch speciell einen beiderseits frei aufliegenden Balken von constantem rechteckigen Querschnitt, der eine Einzellast in der Mitte trägt. Der Biegungspfeil f war dafür im vorigen Paragraphen in Gl. (82) zu

$$f = \frac{Pl^3}{48\,E\Theta} = \frac{Pl^3}{4\,Ebh^3}$$

berechnet. Für du hat man hier nach Gl. (83) mit $\varkappa = 1{,}2$ $V = \frac{P}{2}$ und $F = bh$

$$du = 0{,}6\,\frac{P\,dx}{Gbh}$$

und daher

$$\int_0^{\frac{l}{2}} du = 0{,}3\,\frac{Pl}{Gbh}.$$

Für den mit Rücksicht auf den Einfluss der Schubspannungen verbesserten Werth f' des Biegungspfeiles findet man also nach Gl. (85)

$$f' = \frac{Pl^3}{4Ebh^3} + 0{,}3\,\frac{Pl}{Gbh} = \frac{Pl}{4Ebh}\left(\frac{l^2}{h^2} + 3\right). \qquad (86)$$

Bei der letzten Umformung ist $G = 0{,}4\,E$ gesetzt, also vorausgesetzt, dass für den Stoff, aus dem der Balken besteht, die Verhältnisszahl $m = 4$ sei. Nimmt man an, dass die Spannweite l etwa 10 Mal so gross sei, als die Balkenhöhe h, so macht das zweite Glied in der Klammer, das vom Einflusse der Schubspannungen herrührt, nur 3% von dem ersten aus. Gewöhnlich ist das Verhältniss $\frac{l}{h}$ noch grösser als 10, und das von den Schubspannungen herrührende Glied macht dann einen noch kleineren Bruchtheil des anderen aus. Mit dem Verhältnisse $\frac{l}{h} = 5$ steigt indessen der Bruchtheil auf 12% und von da an wird es nöthig, die genauere Formel (86) an Stelle von Gl. (82) zur Berechnung des Biegungspfeiles zu verwenden.

§ 25. Durchlaufende Träger.

Für einen Balken, der über mehrere Oeffnungen hinwegreicht, kann man, wie schon früher hervorgehoben wurde, die Auflagerkräfte nur auf Grund der elastischen Formänderungen, die er erfährt, berechnen. Wenn die Auflagerkräfte bereits bekannt wären, würde sich die Berechnung der Spannungen genau so wie bei dem Träger über einer einzigen Spannweite ausführen lassen. Man könnte ohne Weiteres für jeden Querschnitt das Biegungsmoment und die Scheerkraft angeben und die Spannungen daraus nach den bereits dafür aufgestellten Formeln finden. Es handelt sich also in der That nur noch darum, zu zeigen, wie man die Auflagerkräfte oder überhaupt die statisch unbestimmten Grössen, die auch in anderer Weise gewählt werden können, berechnen kann.

Man nehme zunächst an, dass der Träger über zwei Oeffnungen von gleicher Grösse l hinwegreicht und eine gleichmässig vertheilte Last q auf die Längeneinheit trägt. Wenn die Mittelstütze entfernt wäre, würde sich die Trägermitte um

den in Gl. (80) angegebenen Betrag durchbiegen, wobei nur $2\,l$ an Stelle von l zu setzen ist. Auf den Einfluss der Schubspannungen braucht man in der Regel keine Rücksicht zu nehmen; wenn es gewünscht werden sollte, kann dies aber nach dem im vorigen Paragraphen angegebenen Verfahren leicht geschehen.

Hierauf denke man sich an dem Balken in der Mitte eine nach aufwärts gerichtete Kraft angebracht. Dadurch wird die Balkenmitte wieder gehoben und zwar um den in Gl. (82) festgestellten Betrag, wenn an Stelle von l wieder $2\,l$ gesetzt und unter P die Grösse der aufwärts gerichteten Kraft verstanden wird. Wenn wir P so bestimmen, dass die vorher erlittene Durchbiegung in der Mitte gerade wieder rückgängig gemacht wird, erhalten wir damit die Grösse des Auflagerdrucks an der Mittelstütze, denn nur bei diesem Werthe des Auflagerdrucks kann die elastische Linie des ganzen Stabes durch den vorgeschriebenen Punkt gehen. Die Gleichsetzung der Werthe von f in Gl. (80) und Gl. (82) liefert

$$P = \frac{5}{8} \cdot 2ql = \frac{5}{8} Q,$$

wenn jetzt Q die über beide Oeffnungen vertheilte Last bedeutet. Man sieht daraus, dass der durchlaufende Träger einen grösseren Theil der ganzen Last auf die Mittelstütze überträgt, als zwei getrennte Träger, von denen jeder eine der beiden Oeffnungen überdecken würde, denn in diesem Falle käme auf die Mittelstütze $\frac{Q}{2}$ und auf jede Endstütze $\frac{Q}{4}$. Der Auflagerdruck des durchlaufenden Trägers an jedem Ende stellt sich auf $\frac{1}{2}\left(Q - \frac{5}{8}\,Q\right) = \frac{3}{16}\,Q$.

Diese Betrachtung setzt voraus, dass alle drei Stützen genau in gleicher Höhe liegen und dass sie auch unter dem Einflusse der Belastung nicht nachgeben, selbstverständlich auch, dass der Träger vorher genau gradlinig war. Senkt sich etwa die Mittelstütze um den Betrag δ oder musste sich der Träger schon vorher in der Mitte um δ durchbiegen, ehe er

die Mittelstütze erreichte, so findet man den Auflagerdruck P aus der Gleichung

$$\frac{5}{384} \cdot \frac{Q(2l)^3}{E\Theta} = \delta + \frac{P(2l)^3}{48\, E\Theta},$$

also

$$P = \frac{5}{8} Q - \delta \frac{6 E\Theta}{l^3}.$$

Wenn die Mittelstütze zu hoch lag, ist hierin δ negativ zu setzen.

Man sieht leicht ein, dass dasselbe Verfahren auch noch anwendbar bleibt, wenn die Oeffnungen von verschiedener Grösse sind. Man braucht dann nur an die Stelle von f die für irgend eine andere Abscisse x gültigen Werthe von y aus § 23 einzusetzen. Auch für Träger, die über mehr als zwei Oeffnungen hinwegreichen, lässt sich die Berechnung der Auflagerkräfte in derselben Weise durchführen; bei drei Oeffnungen hat man zwei nach aufwärts gerichtete unbekannte Kräfte an den Mittelstützen anzunehmen, die sich aus den beiden Bedingungen berechnen, dass die elastischen Verschiebungen der zugehörigen Angriffspunkte im Ganzen verschwinden müssen. Auf die Berechnung der durchlaufenden Träger wird im Uebrigen hier nicht ausführlicher eingegangen, da sie besser der graphischen Statik vorbehalten bleibt.

§ 26. Der auf beiden Seiten eingespannte Träger.

Ein Träger sei an den Auflagern so gestützt, dass jede Drehung des Stabendes unmöglich gemacht ist. Die elastische Linie hat dann horizontale Tangenten an den Stabenden und man erkennt daraus schon, dass sie zwei Wendepunkte haben muss, zwischen denen sie, wie beim frei aufliegenden Träger, hohl nach oben hin gekrümmt ist, während sie zwischen einem Wendepunkte und dem benachbarten Auflager ihre Hohlseite nach unten kehrt. In den Wendepunkten ist die Krümmung Null, daher muss dort auch das Biegungsmoment M verschwinden.

Eine Einzelkraft würde nicht ausreichen, das Ende des Trägers gegen eine Drehung schützen zu können. Ausser einem Auflagerdrucke muss daher an jedem Trägerende noch ein Kräftepaar von der Stütze her übertragen werden. Das Moment dieses Kräftepaars am linken Auflager sei mit M_0 bezeichnet, denn es stellt zugleich das Biegungsmoment für einen Querschnitt dar, der unmittelbar in der Nähe des Auflagers gezogen ist. Wenn wir der Einfachheit halber voraussetzen, dass der Balken eine gleichmässig vertheilte Last trägt, ist M für irgend einen anderen Querschnitt mit der Abscisse x

$$M = M_0 + Ax - \frac{qx^2}{2}.$$

Die Differentialgleichung der elastischen Linie geht damit über in

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{qx^2}{2} - Ax - M_0.$$

Für den Auflagerdruck A kann in unserem Falle auch noch $\frac{ql}{2}$ gesetzt werden. Eine einmalige Integration liefert

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = \frac{qx^3}{6} - A\frac{x^2}{2} - M_0 x + C.$$

Die Integrationsconstante C muss aber hier verschwinden, weil $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = 0$ bleibt. Auch für $x = l$ muss der Ausdruck verschwinden, da der Balken auch am rechten Ende eingemauert sein sollte. Dies liefert die Bedingungsgleichung

$$0 = \frac{ql^3}{6} - \frac{ql}{2} \cdot \frac{l^2}{2} - M_0 l,$$

woraus

$$M_0 = -\frac{ql^2}{12}$$

folgt. Das grösste positive Biegungsmoment in der Mitte wird gleich $\frac{ql^2}{24}$; die grösste Bruchgefahr ist also an den Auflagerstellen vorhanden. — Aehnliche Betrachtungen lassen sich auch für den durchlaufenden Träger anstellen.

Natürlich kann man auch hier auf den Einfluss der Schubspannungen Rücksicht nehmen; es lohnt sich aber nicht, näher

darauf einzugehen, da alle diese Rechnungen bei der Anwendung mit einer grossen Unsicherheit behaftet sind. Man kann sich niemals sicher darauf verlassen, dass der Träger wirklich so gut eingespannt sei, dass jede Drehung des Stabendes ausgeschlossen wäre. Das wirkliche Verhalten der Stabenden kann vielmehr von dem bei der Rechnung vorausgesetzten weit abweichen und es würde nur ein irrthümliches Gefühl der Sicherheit erwecken, wenn man sich unter solchen Umständen mit der Berechnung kleiner Correctionsgrössen befassen wollte, die gegenüber den zu erwartenden Fehlern des Hauptwerthes kaum in Betracht kommen.

Aufgaben.

11. Aufgabe. Man soll die Centralellipse für ein gleichschenkliges Winkeleisenprofil von 70 mm Schenkellänge und 10 mm Schenkelstärke construiren.

Lösung. Eine Hauptaxe des Querschnitts ist die Symmetrieaxe YY. Das zugehörige Trägheitsmoment Θ_y ist

$$\Theta_y = \frac{7^4}{12} - \frac{6^4}{12} = 92{,}1 \text{ cm}^4,$$

da sich der Querschnitt als Differenz zweier Quadrate ansehen lässt, für die beide YY eine Schwerpunktsaxe ist. Den Abstand a des Schwerpunkts S von der Diagonale des umschriebenen Quadrats findet man aus der Momentengleichung

$$a \cdot 13 = 7{,}07 \cdot 36,$$

also $$a = 19{,}6 \text{ mm}.$$

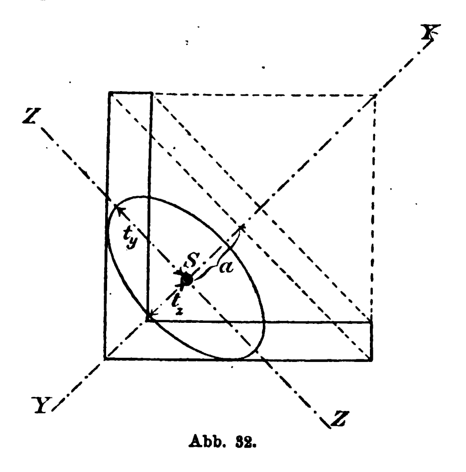


Abb. 32.

Auch das Trägheitsmoment Θ_z setzt man aus den Trägheitsmomenten der beiden Quadrate zusammen, wobei aber darauf zu achten ist, dass die Axe ZZ nicht durch die Schwerpunkte dieser beiden Quadrate geht. Man hat

$$\Theta_z = \frac{7^4}{12} + 7^2 \cdot 1{,}96^2 - \left(\frac{6^4}{12} + 6^2 \cdot 2{,}67^2\right) = 23{,}7 \text{ cm}^4.$$

Für die Trägheitsradien folgt hieraus

$$t_y = \sqrt{\frac{92,1}{13}} = 2,66 \text{ cm}; \quad t_z = \sqrt{\frac{23,7}{13}} = 1,35 \text{ cm}.$$

Man trägt die Trägheitsradien auf den Hauptaxen ab und construirt die hierdurch bestimmte Ellipse.

12. Aufgabe. Für das Z-Eisen N. P. 16 findet man im deutschen Normalprofilbuche für die Hauptaxen YY und ZZ angegeben

$$\text{tg}\,\alpha = 0,39; \quad \Theta_z = 1193 \text{ cm}^4; \quad \Theta_y = 58,8 \text{ cm}^4.$$

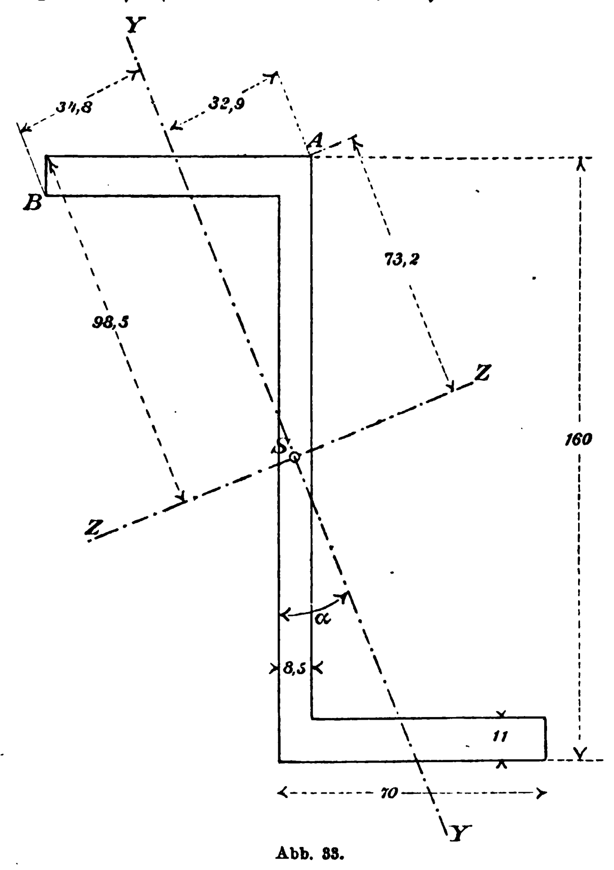


Abb. 83.

Die Maasse sind aus der Abbildung zu entnehmen. Ein Balken von diesem Querschnitte ist am einen Ende eingemauert (so, dass der Steg aufrecht steht, in derselben Lage wie in der Abbildung)

und trägt an dem um 1,20 m vorkragenden Ende eine Last von 500 kg. Wie gross wird die grösste Spannung σ, wenn das freie Ende des Balkens an kleinen horizontalen Ausbiegungen nicht verhindert wird?

Lösung. Aus $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}39$ folgt $\alpha = 21^0 20'$; $\sin\alpha = 0{,}36$; $\cos\alpha = 0{,}93$. Das Biegungsmoment an der Einmauerung hat die Grösse $500 \times 120 = 60\,000$ cmkg; wir zerlegen es in die Componenten $60\,000 \times 0{,}93 = 55\,800$ und $60\,000 \times 0{,}36 = 21\,600$ in den Richtungen der Hauptaxen. Zur ersten Componenten gehört die neutrale Axe ZZ, und die zugehörigen Spannungen σ_I sind

$$\sigma_I = \frac{55\,800}{1193} \cdot y = 46{,}8\,y, \quad \text{ebenso } \sigma_{II} = \frac{21\,600}{58{,}8} \cdot z = 367\,z.$$

Die in irgend einem Flächenelemente des Querschnitts mit den Coordinaten y und z im Ganzen auftretende Spannung σ ist daher

$$\sigma = \sigma_I + \sigma_{II} = 46{,}8\,y + 367\,z.$$

Dabei ist die positive Y-Axe nach oben, die positive Richtung der Z-Axe nach rechts hin zu nehmen; y und z sind, wie alle übrigen Maasse, in cm auszudrücken, man erhält dann σ in atm. An der Kante A ist $y = 7{,}32$ und $z = 3{,}29$ cm, man hat daher

$$\sigma = 46{,}8 \times 7{,}32 + 367 \times 3{,}29 = 1550 \text{ atm}.$$

An der Kante B sind σ_I und σ_{II} von verschiedenem Vorzeichen und

$$\sigma = 46{,}8 \times 9{,}85 - 367 \times 3{,}48 = -818 \text{ atm}.$$

Die grösste Spannung tritt daher an der Kante A auf und ist gleich 1550 atm, das Material ist also an dieser gefährlichsten Stelle bis etwa zur Elasticitätsgrenze beansprucht.

Die elastische Verschiebung des freien Balkenendes unter der senkrecht gerichteten Belastung erfolgt in schräger Richtung. Wird das Balkenende dagegen so gestützt, dass es sich nur in lothrechter Richtung bewegen kann, so tritt noch eine horizontale Kraft auf, die von der Stütze auf das Balkenende übertragen wird. In diesem Falle ist die Nulllinie horizontal gerichtet und man erhält die Spannung σ aus der gewöhnlichen Biegungsformel, wenn darin das Trägheitsmoment auf die horizontale Axe bezogen wird.

13. Aufgabe. Den Querschnittskern für die in den beiden vorigen Aufgaben vorkommenden beiden Profile zu construiren.

Lösung. Bei dem Winkeleisenprofil kann man fünf Linien zeichnen, die mit dem Umfang mehr als zwei Punkte gemeinsam haben und die Fläche nicht durchkreuzen. Von diesen fallen vier

mit den nach aussen gekehrten Umfangsseiten zusammen und die fünfte ist die parallel zur ZZ-Axe gezogene Verbindungslinie der beiden nach rechts oben gekehrten Ecken. Alle übrigen Strahlen des den Querschnitt einhüllenden Tangentenbüschels gehen aus diesen Hauptlagen durch Drehung um eine der Ecken des Querschnitts hervor. Daraus folgt, dass der Kern ein Fünfeck bildet, dessen Ecken die Antipole jener fünf Graden und dessen Seiten die Antipolaren der genannten Querschnittsecken sind. In Abb. 34 ist der Querschnitt mit der Centralellipse und dem durch Schraffirung hervorgehobenen Kerne gezeichnet. Ganz ähnlich findet man auch den in Abb. 35 (S. 157) angegebenen Kern des Z-Profils, für das man die Centralellipse nach den Angaben über die Trägheitsmomente ohne Weiteres auftragen kann.

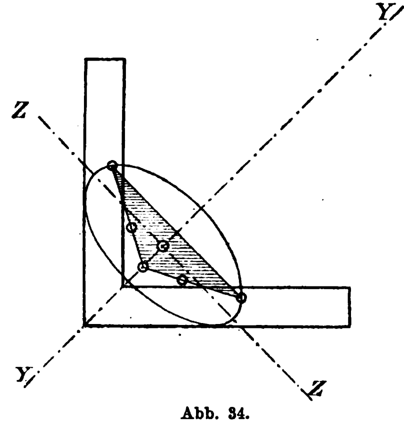


Abb. 34.

14. *Aufgabe. Centralellipse und Querschnittskern für eine hohle gusseiserne Säule von 20 cm äusserem Durchmesser und 2 cm Wandstärke zu bestimmen.*

Lösung. Das Trägheitsmoment des ringförmigen Querschnitts für eine Schwerpunktsaxe ist

$$\Theta = \frac{\pi}{4}(10^4 - 8^4) = 4635 \text{ cm}^4$$

und die Querschnittsfläche $F = 113 \text{ cm}^2$, woraus

$$t = \sqrt{\frac{4635}{113}} = 6{,}40 \text{ cm}$$

folgt. Die Centralellipse ist ein Kreis von diesem Radius. Auch der Querschnittskern wird hier durch einen Kreis begrenzt, dessen Radius k aus der Proportion

$$\frac{k}{6{,}4} = \frac{6{,}4}{10}, \quad \text{also } k = 4{,}1 \text{ cm}$$

folgt.

15. *Aufgabe. Ein Balken (oder eine Tragaxe, wie man solche Stäbe im Maschinenbau zu nennen pflegt), der an beiden Enden gestützt ist und eine Einzellast aufzunehmen hat, soll als Rotationskörper ausgeführt werden, so dass in jedem Querschnitte die zuläs-*

sige Spannung des Materials erreicht wird. Nach welchem Gesetze muss der Meridianschnitt gekrümmt werden?

Lösung. Der Auflagerdruck am linken Ende betrage A; dann ist das Biegungsmoment im Abstande x davon $M = Ax$ und die Spannung

$$\sigma = \frac{M}{W} = 4\,\frac{Ax}{\pi r^3},$$

wenn r der Radius des Querschnittskreises ist. Die Spannung σ soll in allen Querschnitten gleich gross werden, daher muss auch der Ausdruck auf der rechten Seite unabhängig von x sein und r wird dadurch als Function von x bestimmt. Man erhält

$$r = \sqrt[3]{\frac{4Ax}{\pi\sigma}}$$

als Gleichung der Meridiancurve. Man sieht daraus, dass das Längsprofil der Tragaxe durch eine cubische Parabel gebildet werden muss, wenn die Tragaxe ein Körper von überall gleicher Festigkeit sein soll.

Die Aufgabe lässt sich natürlich noch mannichfach variiren, indem man etwa eine andere Querschnittsgestalt (z. B. eine rechteckige) oder eine andere Belastung (z. B. eine gleichförmig vertheilte) voraussetzt. In den elementaren Darstellungen der Festigkeitslehre pflegen diese Aufgaben einen grossen Raum einzunehmen, da sie sich sehr leicht lösen lassen und auch sonst ganz niedlich sind. Eine erhebliche practische Bedeutung ist diesen Lösungen freilich nicht zuzusprechen, da kein Grund

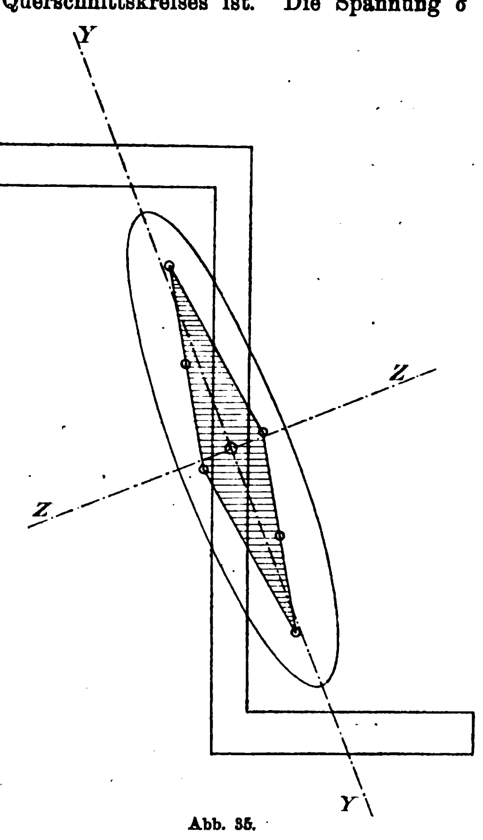


Abb. 35.

vorliegt, sich an die berechneten Formen genau zu halten. Die Gestalt einer Tragaxe setzt man z. B. aus Cylindern und abgestumpften Kegeln zusammen, wobei man sich freilich dem vorher berechneten Rotationskörper möglichst eng anzuschliessen sucht. Uebrigens ist die vorige Betrachtung insofern ungenau, als sie keine Rücksicht auf die Schubspannungen nimmt, die in der Nähe der Stützen das Uebergewicht über die Normalspannungen erlangen. So würde für $x = 0$ nach der Formel $r = 0$ sein, der Querschnitt an der Stütze also bis auf Null abnehmen können. Das ist natürlich ein Trugschluss, denn der Querschnitt muss überall mindestens noch so gross bleiben, dass die Schubspannungen für sich genommen die zulässige Beanspruchung des Materials nicht überschreiten. Bei den Tragaxen ordnet man an den Enden Zapfen an, die von dem vorher bestimmten Umdrehungskörper unabhängig festgesetzt werden, d. h. man weicht hier von der „theoretischen" (richtiger gesagt von der „ungenau-theoretischen") Form so weit ab, um den bei deren Ableitung begangenen Fehler nachträglich zu verbessern.

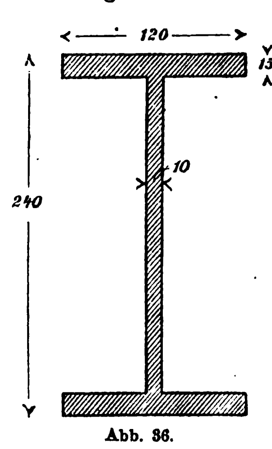


Abb. 36.

16. Aufgabe. Ein I-Balken von beistehendem Querschnitte (Abb. 36) ist am einen Ende eingemauert und trägt an dem um 0,8 m vorkragenden Ende eine Belastung von 5000 kg. Man soll die grösste Spannung und die Anstrengung des Materials unmittelbar unter dem Flantsche des Einspannungsquerschnitts berechnen.

Lösung. Das Trägheitsmoment für die horizontale Axe berechnen wir, indem wir uns den Querschnitt durch Wegnahme von zwei Rechtecken aus dem umschriebenen Rechteck entstanden denken, also

$$\Theta = \frac{12 \cdot 24^3}{12} - 2 \cdot \frac{5{,}5 \cdot 21^3}{12} = 5335 \text{ cm}^4.$$

Das statische Moment S des Flantschenquerschnitts für die horizontale Schwerpunktsaxe ist

$$S = \int_u^{\frac{h}{2}} y\,dF = 1{,}5 \cdot 12 \cdot 11{,}25 = 202{,}5 \text{ cm}^3.$$

Für die Normalspannungen σ im Einspannquerschnitte hat man

$$\sigma = \frac{M}{\Theta}\,y = \frac{5000 \cdot 80}{5335} \cdot y = 75\,y.$$

Am oberen Rande ist $y = 12$ cm und daher $\sigma = 900$ atm. Dagegen ist unmittelbar unter dem Flantsche $y = 10,5$ und $\sigma = 787$ atm. Für diese Stelle berechnen wir auch die Schubspannung τ. Nach Gl. (74) findet man

$$\tau = \frac{VS}{b\Theta} = \frac{5000 \cdot 202,5}{1 \cdot 5335} = 190 \text{ atm.}$$

Aus σ und τ ergibt sich die Hauptspannung an dieser Stelle nach Gl. (12)

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_x}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2} = \frac{787}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{380^2 + 787^2} = 830 \text{ atm.}$$

Die Hauptspannung ist also an dieser Stelle trotz des Hinzutretens von τ noch kleiner als σ an der oberen Kante. Daran wird auch nicht viel geändert, wenn man die reducirte Spannung, von der die Beanspruchung des Materials abhängt, berechnet. Nach Gl. (39) ist für $m = 3\frac{1}{3}$ die reducirte Spannung

$$\sigma_{red} = 0,35\, \sigma_x + 0,65 \sqrt{4\tau^2 + \sigma_x^2} = 844 \text{ atm.}$$

Diese Rechnung lehrt, dass man in der That auch bei I-Profilen in der Regel nicht nöthig hat, die Spannungen an anderen Stellen als an der oberen Kante zu berechnen, also überhaupt nicht nöthig hat, auf die Schubspannungen zu achten. Anders wird die Sache indessen, wenn der Hebelarm der Kraft noch kleiner wird, als hier angenommen war. Denn τ behält dann — bei gleicher Belastung — seinen Werth, während σ abnimmt und man kommt dann bald zu einem Hebelarme, bei dem die Beanspruchung des Materials unmittelbar unter dem Flantsche grösser wird als an der äusseren Kante.

Schliesslich sei nochmals ausdrücklich darauf hingewiesen, dass diese ganze Betrachtung nur einen Anspruch auf ungefähre Gültigkeit machen kann, denn Gl. (74) ist aus einer recht unsicheren Voraussetzung über die Vertheilung der Spannungen τ abgeleitet, die gerade an der Stelle unmittelbar unter dem Flantsche des I-Profiles keineswegs genau zutreffen kann. Man sieht aber auch, dass diese Formel in der That nur zu einer mehr schätzungsweisen Bestimmung des Ortes der grössten Beanspruchung gebraucht wird. Gegen einen solchen Gebrauch lässt sich nichts einwenden.

17. Aufgabe. Die Vertheilung der Schubspannungen τ über einen kreisförmigen Querschnitt zu berechnen.

Lösung. Man hat zunächst das statische Moment S des in

Abbildung 37 schraffirten Kreisabschnitts zu berechnen. Wegen $z = \sqrt{r^2 - y^2}$ hat man

$$\int y dF = 2\int_u^r y \sqrt{r^2 - y^2}\, dy.$$

Allgemein ist aber

$$\int y\sqrt{r^2 - y^2}\, dy = -\frac{1}{3}\sqrt{(r^2 - y^2)^3},$$

wovon man sich durch Differentiation leicht überzeugt. Nach Einsetzen der Grenzen wird daher

$$\int y\, dF = \frac{2}{3}\sqrt{(r^2 - u^2)^3} = \frac{b^3}{12},$$

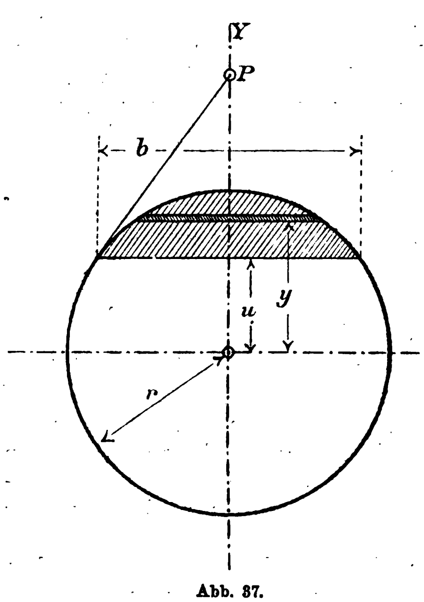


Abb. 37.

wenn mit b die Länge der Sehne im Abstande u vom Mittelpunkte bezeichnet wird, für den man die Schubspannung berechnen will.

Nach Gl. (74) wird jetzt

$$\tau_{xy} = \frac{Vb^2}{12\Theta} = \frac{Vb^2}{3\pi r^4}.$$

Die Componente τ_{xz} bestimmt sich am Umfange aus der Bedingung, dass die resultirende Spannung in die Richtung der Tangente fällt. Daraus folgt

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \frac{u}{\frac{1}{2}b};$$

$$\tau_{xz} = \tau_{xy} \cdot \frac{2u}{b} = \frac{2Vub}{3\pi r^4},$$

und für die resultirende Spannung τ selbst erhält man nach dem Pythagoräischen Satze

$$\tau = \frac{Vb}{3\pi r^4} \cdot \sqrt{b^2 + 4u^2} = \frac{2Vb}{3\pi r^3}.$$

Die Schubspannungen nehmen, wie man hieraus erkennt, ihren grössten Werth in der Mitte an. Dort wird $b = 2r$ und daher

$$\tau_{max} = \frac{4V}{3\pi r^2},$$

d. h. die grösste Schubspannung verhält sich zu der durchschnittlichen Schubspannung, die bei gleichförmiger Vertheilung über den ganzen Querschnitt überall zu Stande käme, wie 4 zu 3.

18. *Aufgabe. Wie viel Schubkraft hat ein Niet N am Ende des unten gezeichneten Blechbalkens aufzunehmen, wenn der Auflagerdruck 6000 kg beträgt?*

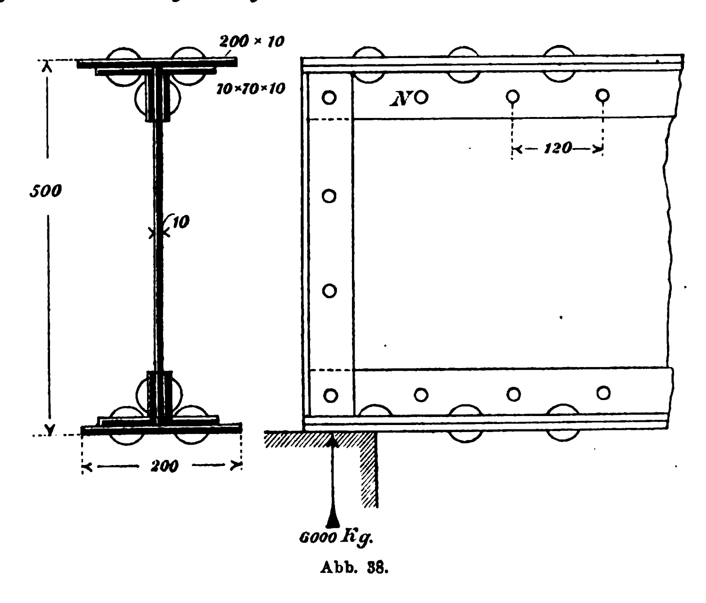


Abb. 38.

Lösung. Nach Gl. (75) ist

$$P = \frac{Ve}{\Theta} S.$$

Für Θ findet man mit hinreichender Annäherung

$$\Theta = 2 \cdot 46 \cdot 23{,}5^2 + \frac{1 \cdot 48^3}{12} = 60\,022 \text{ cm}^4.$$

Hierbei ist der mittlere Abstand der Gurtfläche von der horizontalen Schwerlinie gleich 23,5 einfach geschätzt, wobei freilich die Decimalstelle ganz unsicher ist. Für Rechnungen dieser Art genügt aber die dadurch gegebene Genauigkeit gewöhnlich vollauf; andernfalls muss Θ in der früher besprochenen Weise berechnet werden. Für S hat man ebenso

$$S = 46 \cdot 23{,}5 = 1081 \text{ cm}^3.$$

Hiermit folgt, da $V = 6000$ kg und $e = 12$ cm ist,

$$P = \frac{6000 \cdot 12}{60\,000} \cdot 1081 = 1300 \text{ kg},$$

eine Kraft, die sich auf zwei Scheerflächen des Niets vertheilt.

19. *Aufgabe. Wie ändert sich der Werth des Biegungspfeiles f in Gl. (82), wenn Θ nicht constant, sondern überall proportional dem Biegungsmomente M ist?*

Lösung. Setzt man

$$\frac{M}{E\Theta} = c,$$

so geht die Differentialgleichung der elastischen Linie (Gl. 78) über in

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -c$$

und durch zweimalige Integration folgt daraus

$$y = -\frac{cx^2}{2} + ax + b,$$

wenn a und b die Integrationsconstanten sind. Diese Gleichung gilt für die ganze Spannweite, da es hier gleichgültig ist, welchen Werth M an jeder Stelle annimmt; sie gilt aus demselben Grunde auch für jeden beliebigen Belastungsfall, wenn nur die für die Veränderlichkeit des Trägheitsmoments ausgesprochene Bedingung überall erfüllt ist. Die elastische Linie bildet daher in diesem Falle eine gemeine Parabel. Die Constanten a und b folgen aus den beiden Grenzbedingungen, dass y für $x = 0$ und für $x = l$ verschwinden muss. Dies liefert $b = 0$ und aus

$$0 = -\frac{cl^2}{2} + al \text{ folgt } a = \frac{cl}{2}.$$

Hiermit wird

$$y = \frac{c}{2}\left(lx - x^2\right)$$

und der Biegungspfeil f für die Balkenmitte folgt daraus mit $x = \frac{l}{2}$

$$f = \frac{cl^2}{8}.$$

Werden das Biegungsmoment und das Trägheitsmoment in der Balkenmitte durch Anhängen des Zeigers m gekennzeichnet, so folgt durch Einsetzen des Werthes von c

$$f = \frac{M_m}{E\Theta_m} \cdot \frac{l^2}{8}.$$

Speciell für den Belastungsfall, zu dem Gl. (82) gehörte, ist $M_m = \frac{Pl}{4}$ und daher

$$f = \frac{Pl^3}{32\, E\Theta_m}.$$

Wäre das Trägheitsmoment nicht veränderlich, sondern überall gleich Θ_m, so würde an Stelle dieses Werthes der in Gl. (82) gegebene treten, d. h. der Factor 32 im Nenner wäre durch 48 zu ersetzen. Der Biegungspfeil ist daher hier um 50 % grösser als bei constantem Trägheitsmomente.

Die Voraussetzung, dass Θ proportional mit M sein soll, wird näherungsweise erfüllt bei einem Blechträger, dessen Querschnitt nach der Mitte hin durch Aufnieten von Platten verstärkt wird, so dass überall ungefähr dieselbe Spannung σ auftritt. Die Trägerhöhe wird nämlich durch das Aufnieten der Platten nicht erheblich geändert, so dass in der That die Spannung $\sigma = \frac{M}{\Theta} y$ überall ungefähr dem Verhältnisse $\frac{M}{\Theta}$ proportional ist.

20. Aufgabe. Die Constante $\varkappa$ der Gl. (83) für den kreisförmigen Querschnitt zu berechnen.

Lösung. Nach Gl. (84) ist

$$\varkappa = \frac{F\int \tau^2 dF}{V^2}.$$

Beim kreisförmigen Querschnitte war in Aufgabe 17

$$\tau_{xy} = \frac{Vb^2}{3\pi r^4}$$

gefunden. Achtet man bei der Berechnung von $\varkappa$ nur auf die zur Lastrichtung parallele Componente τ_{xy} der Schubspannung, so wird demnach bei Benutzung derselben Bezeichnungen wie in Abb. 37

$$\varkappa = \pi r^2 \cdot \int \frac{b^4}{9\pi^2 r^8} dF.$$

Zur Ermittelung des Momentes vierten Grades der Querschnittsfläche $\int b^4 dF$ setzen wir

$$\int b^4 dF = 32 \int_{-r}^{+r} z^5 dy = 64 \int_0^r (r^2 - y^2)^{\frac{5}{2}} dy.$$

Nun ist allgemein

$$\int (r^2 - y^2)^{\frac{5}{2}} dy = \frac{8(r^2 - y^2)^2 + 10r^2(r^2 - y^2) + 15r^4}{48} y\sqrt{r^2 - y^2} + \\ + \frac{5}{16} r^6 \arcsin \frac{y}{r}.$$

Setzt man die Grenzen ein, so wird daher

$$\int b^4 dF = 10\pi r^6$$

und hiermit endlich

$$\varkappa = \frac{10}{9}.$$

In ähnlicher Weise kann $\varkappa$ auch unter Berücksichtigung der zweiten Componente τ_{xz} von τ berechnet werden; es wird dann etwas grösser gefunden. In jedem Falle handelt es sich indessen, wie schon früher bemerkt wurde, nur um eine Abschätzung des Werthes, die auf besondere Genauigkeit keinen Anspruch macht.

21. Aufgabe. Ein durchlaufender Balken überdeckt drei Oeffnungen von gleicher Grösse und ist gleichförmig belastet; man soll die Auflagerkräfte berechnen.

Lösung. Der Symmetrie wegen ist der Druck auf jede der beiden Mittelstützen gleich gross, er sei mit C bezeichnet. Der Auflagerdruck A am linken Trägerende ist dann $A = \frac{3ap}{2} - C$, wenn p die Last für die Längeneinheit und a die Weite einer Oeffnung bedeuten.

In der ersten Oeffnung hat man

$$M = x\left(\frac{3ap}{2} - C\right) - \frac{px^2}{2}.$$

Die Differentialgleichung der elastischen Linie wird daher für diesen Ast

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{px^2}{2} + x\left(C - \frac{3ap}{2}\right)$$

und hieraus durch Integration

$$E\Theta\frac{dy}{dx} = \frac{px^3}{6} + \frac{x^2}{2}\left(C - \frac{3ap}{2}\right) + K,$$

$$E\Theta y = \frac{px^4}{24} + \frac{x^3}{6}\left(C - \frac{3ap}{2}\right) + Kx + K'.$$

Wegen $y = 0$ für $x = 0$ hat man $K' = 0$ und wegen $y = 0$ für $x = a$ folgt

$$0 = \frac{pa^4}{24} + \frac{a^3}{6}\left(C - \frac{3ap}{2}\right) + Ka \quad \text{oder} \quad K = \frac{5pa^3}{24} - C\frac{a^2}{6}.$$

In der zweiten Oeffnung ist

$$M = (x + a)\left(\frac{3ap}{2} - C\right) + Cx - p\frac{(a + x)^2}{2} = \frac{pax}{2} + \\ + pa^2 - Ca - \frac{px^2}{2},$$

wenn hier die Abscissen x von der Mittelstütze aus gerechnet werden. Die Differentialgleichung für den Mittelast der elastischen Linie lautet daher

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{px^2}{2} + Ca - \frac{pax}{2} - pa^2$$

und hieraus durch Integration

$$E\Theta \frac{dy}{dx} = \frac{px^3}{6} + Cax - \frac{pax^2}{4} - pa^2x + K''$$

$$E\Theta y = \frac{px^4}{24} + Ca\frac{x^2}{2} - \frac{pax^3}{12} - \frac{pa^2x^2}{2} + K''x + K'''.$$

Für $x = 0$ und für $x = a$ verschwindet wieder y und daraus folgt $K''' = 0$ und

$$0 = \frac{pa^4}{24} + C\frac{a^3}{2} - p\frac{a^4}{12} - p\frac{a^4}{2} + K''a \text{ oder } K'' = \frac{13}{24}pa^3 - C\frac{a^2}{2}.$$

Wir haben jetzt noch die Bedingung, dass sich die beiden Aeste der elastischen Linie an der Mittelstütze ohne Knick aneinander schliessen müssen. Dazu gehört, dass $\frac{dy}{dx}$ für $x = a$ im ersten Aste gleich $\frac{dy}{dx}$ für $x = 0$ im zweiten Aste wird. Dies liefert die Gleichung

$$\frac{pa^3}{6} + \frac{a^2}{2}\left(C - \frac{3ap}{2}\right) + K = K''$$

oder nach Einsetzen der Werthe von K und K''

$$\frac{a^2}{2}C - \frac{7}{12}pa^3 + \frac{5}{24}pa^3 - C\frac{a^2}{6} = \frac{13}{24}pa^3 - C\frac{a^2}{2}.$$

In dieser Gleichung ist C die einzige Unbekannte. Die Auflösung liefert

$$C = \frac{11}{10}pa.$$

Auf jede Mittelstütze kommt also um 10% mehr als die Last einer Oeffnung. Da die gesammte Belastung des Trägers $3pa$ beträgt, bleibt für den Druck auf jede Endstütze $0{,}4pa$.

22. Aufgabe. Ein im Grundrisse rechteckig gestalteter Raum wird von zwei sich in der Mitte kreuzenden und an dieser Stelle miteinander verbundenen Trägern mit den Ordnungsnummern 1 und 2 überdeckt. An der Kreuzungsstelle ist eine Last P aufgehängt; wie viel kommt davon auf jeden Träger?

Lösung. Der Biegungspfeil f in der Mitte muss für beide Träger gleich sein. Nimmt der erste Träger den Antheil C, der

andere also $P - C$ der ganzen Last auf, so hat man die Bedingungsgleichung

$$\frac{C l_1^3}{48 E \Theta_1} = \frac{(P - C) l_2^3}{48 E \Theta_2},$$

woraus

$$C = P \frac{l_2^3 \Theta_1}{l_1^3 \Theta_2 + l_2^3 \Theta_1}$$

folgt. — Ganz ähnlich lässt sich die Aufgabe auch für den Fall lösen, dass sich die Träger nicht in der Mitte, sondern an irgend einer anderen Stelle kreuzen. An Stelle von f ist dann die zur betreffenden Abscisse gehörige Ordinate y der elastischen Linie jedes Trägers einzusetzen.

Vierter Abschnitt.

Die Formänderungsarbeit.

---

§ 27. Die potentielle Energie eines gebogenen Stabes.

Wenn man annimmt, dass die Schubspannungen neben den Normalspannungen nicht in Betracht kommen, oder wenn es sich um den Fall der reinen Biegungsbeanspruchung handelt, hat man für die specifische Formänderungsarbeit nach Gl. (41)

$$\mathsf{A} = \frac{\sigma^2}{2E}$$

und für σ kann nach Gl. (48)

$$\sigma = \frac{M}{\Theta} y$$

gesetzt werden. Setzt man dies ein, multiplicirt A mit dem Volumenelemente $d\tau$ und integrirt über das Volumen eines Balkenelementes von der Länge dx, so erhält man für die in diesem Balkenelemente aufgespeicherte Formänderungsarbeit dA den Ausdruck

$$dA = \int \frac{M^2}{2E\Theta^2} y^2 \, d\tau.$$

Für $d\tau$ kann man aber $dx \cdot dF$ setzen. Der Factor dx kann vor das Integralzeichen gesetzt werden, ebenso M, E und Θ, und man erhält

$$dA = \frac{M^2}{2E\Theta^2} dx \int y^2 \, dF.$$

Das verbliebene Integral stellt aber das Trägheitsmoment des Querschnitts dar; der Ausdruck vereinfacht sich daher zu

$$dA = \frac{M^2}{2E\Theta} dx. \tag{87}$$

Zu demselben Ausdrucke kann man auch noch auf einem anderen Wege gelangen. Betrachtet man nämlich nur das eine Balkenelement während der Formänderung, so sind die an den beiden Querschnittsflächen auftretenden Normalspannungen äussere Kräfte für dieses Körperstück und die von ihnen geleistete Arbeit muss gleich der in dem Stücke aufgespeicherten potentiellen Energie sein. Eine Bewegung des Körperstücks als Ganzes kommt dabei nicht in Betracht, da sich die äusseren Kräfte daran im Gleichgewichte halten, die bei einer solchen Bewegung von ihnen geleistete Arbeit daher gleich Null ist. Wir brauchen uns daher nur um die relativen Bewegungen innerhalb des Körperelements zu kümmern. Am einfachsten geben wir uns über diese Rechenschaft, wenn wir uns den einen Querschnitt festgehalten denken. Der andere Querschnitt führt dann gegen diesen eine Drehung um den Winkel $d\varphi$ aus, der in Gl. (76) zu

$$d\varphi = \frac{M}{E\Theta} dx$$

berechnet ist. Die Normalspannungen an dem festgehaltenen Querschnitte leisten während dieser Bewegung keine Arbeit, da ihre Angriffspunkte in Ruhe bleiben. Am anderen Querschnitte können wir uns die Normalspannungen zu einem Kräftepaare vereinigt denken, dessen Moment gleich dem Biegungsmomente M ist. Die Arbeit bei der Drehung ist daher

$$dA = \frac{1}{2} M d\varphi = \frac{M^2}{2E\Theta} dx,$$

wie schon vorher gefunden war. Der Faktor $\frac{1}{2}$ musste hier wieder deshalb beigefügt werden, weil das Moment nicht während der ganzen Bewegung dieselbe Grösse M hat, sondern von Null an proportional mit der schon ausgeführten Formänderung bis auf den Endwerth M anwächst. Als Mittelwerth des Moments während der ganzen Drehung ist daher $\frac{1}{2} M$ einzuführen.

Die in dem ganzen Balken aufgespeicherte Formänderungsarbeit A ist demnach

$$A = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{E\Theta} dx. \tag{88}$$

Wenn die Arbeit der Schubspannungen nicht vernachlässigt werden soll, muss hierzu noch ein Glied gefügt werden, das aus den Entwickelungen in § 24 unmittelbar entnommen werden kann. Man muss dabei beachten, dass die Schubspannungen bei der Drehung der beiden Querschnitte gegeneinander keine Arbeit leisten, da die Wege der Angriffspunkte hierbei senkrecht zur Kraftrichtung stehen, während umgekehrt bei der Schiebung des einen Querschnitts relativ zum anderen die Bewegung senkrecht zu den Normalspannungen erfolgt, so dass hierbei nur die Schubspannungen Arbeit leisten. In der That wird daher die ganze Formänderungsarbeit für ein Balkenelement durch einfache Summirung der beiden Werthe erhalten, von denen sich der eine nur auf die Drehung und die Normalspannungen, der andere nur auf die Schiebung und die Schubspannungen bezieht. Für ein Balkenelement war die Arbeit der Schubspannungen in § 24 zu

$$\frac{1}{2} V du = \varkappa \frac{V^2}{2GF} dx$$

gefunden. Mit Rücksicht auf die Schubspannungen wird daher die ganze im gebogenen Balken aufgespeicherte Formänderungsarbeit zu

$$A = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{E\Theta} dx + \frac{1}{2}\int \frac{\varkappa V^2}{GF} dx \tag{89}$$

erhalten.

Wenn etwa neben der Biegungsbeanspruchung noch eine axiale Belastung des Stabes vorkommen sollte, muss dazu noch ein drittes Glied gefügt werden. An dieser Stelle soll aber auf solche Fälle nicht weiter eingegangen werden.

Die im Stabe aufgespeicherte potentielle Energie muss auch gleich der von den äusseren Kräften, also von den Lasten, während der Formänderung geleisteten Arbeit sein. Hierdurch sind wir in den Stand gesetzt, noch einen zweiten Ausdruck für A aufzustellen, den wir dem vorigen gleich setzen können. Die Auflagerkräfte leisten bei der Formänderung keine Arbeit. Ihre Angriffspunkte sind nämlich entweder vollständig festgehalten oder, wenn ein Angriffspunkt längs einer

Auflagerbahn beweglich ist, steht die Verschiebung, die er erfährt, senkrecht zur Richtung der Auflagerkraft; in beiden Fällen ist also die Arbeit gleich Null. Nur dann, wenn etwa ein Auflagerpunkt längs eines Gleitlagers verschieblich sein sollte, in dem eine Reibung von merklichem Betrage zu überwinden wäre, käme die Arbeit dieser Reibung in Betracht. Dieser Fall soll aber bei allen Betrachtungen dieses Abschnittes ausdrücklich ausgeschlossen werden; nur unter dieser Voraussetzung gelten, wie wohl zu beachten ist, die hier abzuleitenden Sätze streng.

Wir brauchen also nur die Arbeiten zu beachten, die von den Lasten geleistet werden. Eine dieser Lasten sei mit P, die in ihrer Richtung erfolgende Verschiebung ihres Angriffspunktes mit y bezeichnet. Wegen des allmählichen Anwachsens von P während der Durchbiegung des Balkens ist die Arbeit gleich $\frac{1}{2} Py$ zu setzen und wir haben daher auch

$$A = \frac{1}{2} \sum Py, \tag{90}$$

wobei die Summirung über alle Lasten zu erstrecken ist. Bei gleichförmig vertheilten Lasten tritt an die Stelle der Summirung eine Integration.

Wenn der Balken nur eine einzige Last trägt, kann die Gleichsetzung der Ausdrücke (90) und (88) oder (89) zur Berechnung der Verschiebung des Angriffspunktes der Last benutzt werden. Dies möge an dem Beispiele eines Balkens, der am einen Ende eingemauert ist und am freien Ende eine Last P trägt, erläutert werden. Im Abstande x vom freien Ende ist $M = Px$. Wenn wir den Einfluss der Schubkräfte auf die Durchbiegung vernachlässigen, erhalten wir A nach Gl. (88)

$$A = \frac{P^2}{2E\Theta} \int_0^l x^2\,dx = \frac{P^2 l^3}{6E\Theta}.$$

Die Durchbiegung f des freien Endes folgt daher aus

$$\frac{1}{2} Pf = \frac{P^2 l^3}{6E\Theta} \text{ zu } f = \frac{Pl^3}{3E\Theta}.$$

Dieses Ergebniss steht in Uebereinstimmung mit dem in Gl. (82) für den Biegungspfeil eines beiderseits gestützten Balkens, der in der Mitte eine Last trägt. Der aus der Mauer vorkragende Balken verhält sich nämlich wie die Hälfte eines beiderseits gestützten von der doppelten Länge, der in der Mitte die doppelte Last trägt. In der That kann der soeben für f abgeleitete Werth auch in der Form

$$f = \frac{2P \cdot (2l)^3}{48 E\Theta}$$

geschrieben werden, womit die Uebereinstimmung nachgewiesen ist.

Selbstverständlich kann auch hier der Einfluss der Schubspannungen auf die Durchbiegung f leicht berücksichtigt werden, indem man A nicht nach Gl. (88), sondern nach Gl. (89) berechnet. Man kommt dann wieder zu den gleichen Resultaten wie nach dem früheren Verfahren.

§ 28. Die Sätze von Castigliano.

Es möge jetzt angenommen werden, dass eine der Lasten, die der Balken trägt, etwa die Last P_i, einen unendlich kleinen Zuwachs erfährt, während alle übrigen Lasten ungeändert bleiben. Wir wollen berechnen, um wie viel sich die Formänderungsarbeit A hierbei ändert. Das Verhältniss beider Zuwüchse, also der Differentialquotient $\frac{\partial A}{\partial P_i}$ kann auf verschiedene Art ermittelt werden, zunächst durch partielle Differentiation von Gl. (90) nach P_i. Hierbei ist zu beachten, dass jedes y von allen Lasten, die der Balken trägt, also auch von P_i abhängig ist. Das Glied $P_1 y_1$ der Summe in Gl. (90) liefert also bei der Differentiation einen Beitrag

$$P_1 \frac{\partial y_1}{\partial P_i}$$

und ebenso bei allen anderen Gliedern, abgesehen von $P_i y_i$ selbst. In diesem Gliede sind beide Factoren veränderlich und es trägt daher (von dem Factor $\frac{1}{2}$ abgesehen)

$$P_i \frac{\partial y_i}{\partial P_i} + y_i$$

zu dem Differentialquotienten bei. Wenn wir wieder alle Glieder von gleichem Bau durch ein Summenzeichen zusammenfassen, erhalten wir demnach

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \frac{1}{2} \sum P \frac{\partial y}{d P_i} + \frac{1}{2} y_i. \tag{91}$$

Die Berechnung des Differentialquotienten durch Differentiiren hat den Sinn, dass wir uns während des Aufbringens der Belastung P_i stets etwas grösser denken als vorher und es gleichzeitig mit den übrigen Lasten von Null an bis auf $P_i + dP_i$ anwachsen lassen. Anstatt dessen können wir uns aber auch zuerst alle Lasten in der früheren Grösse und dann noch nachträglich dP_i aufgebracht denken. Auf die Formänderungsarbeit kann diese Reihenfolge in der Herstellung der Belastung keinen Einfluss haben, denn in jedem Falle wird zuletzt derselbe Endzustand erreicht und die Arbeit der äusseren Kräfte muss immer im Ganzen gleich der potentiellen Energie des gebogenen Balkens sein, die nur von dem Endzustande abhängig ist. Der Schluss, dass die Reihenfolge im Aufbringen der Belastung ohne Einfluss auf die im Ganzen geleistete Arbeit ist, hängt daher, wie man sieht, wesentlich davon ab, dass diese Arbeit vollständig in Form von potentieller Energie aufgespeichert wird. Er würde also z. B. unzulässig sein, wenn während der Formänderung Reibungen an den Auflagern oder unelastische Formänderungen vorkämen. Dagegen ist es nicht nöthig, dass die Formänderungen etwa dem Hooke'schen Gesetze folgen, wenn sie nur in dem früher definirten Sinne als vollkommen elastisch gelten können.

Unter dieser Voraussetzung erhalten wir $\frac{\partial A}{\partial P_i}$ auch auf dem folgenden Wege. Wenn zuerst alle Lasten P in ihrer ursprünglichen Grösse aufgebracht wurden, leisteten sie dabei die Arbeit A. Wenn jetzt dP_i hinzugefügt wird, vermehrt sich die Einsenkung y_1 des Angriffspunktes der Last P_1 um

$$\frac{\partial y_1}{\partial P} dP_i$$

und dabei leistet die Kraft P_1, die während dieser Bewegung unverändert bleibt, die Arbeit

$$P_1 \frac{\partial y_1}{\partial P_i} dP_i.$$

Dasselbe gilt für alle Lasten P, auch für P_i. Dazu kommt dann noch die Arbeit, die von dP_i selbst geleistet wird. Da dieser Lastzuwachs allmählich von 0 bis zum Endwerthe dP_i anwächst, haben wir dafür

$$\frac{1}{2} dP_i \frac{\partial y_i}{\partial P_i} dP_i.$$

Der Vergleich mit den vorigen Gliedern zeigt, dass die von dP_i selbst geleistete Arbeit unendlich klein zweiter Ordnung ist und daher gegen die nur von der ersten Ordnung unendlich kleinen Arbeiten der Kräfte P verschwindet. Nach Division mit dP_i erhalten wir demnach aus dieser Betrachtung

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \sum P \frac{\partial y}{\partial P_i}. \tag{92}$$

Wir können noch einen dritten Weg einschlagen, um $\frac{\partial A}{\partial P_i}$ zu berechnen. Zuerst sei nämlich auf den vorher unbelasteten Balken die Last dP_i aufgebracht. Sie leistet dabei die Arbeit

$$\frac{1}{2} dP_i \cdot \frac{\partial y_i}{\partial P_i} dP_i.$$

Dann seien alle Lasten P zugefügt, so dass sie gleichzeitig und gleichmässig von Null an bis auf ihre Endwerthe zunehmen. Dabei biegt sich der Balken weiter durch und zwar überall um ebenso viel, als wenn er vorher unbelastet gewesen wäre. Die Kräfte P leisten dabei die vorher schon mit A bezeichnete Arbeit; gleichzeitig erfährt aber der Angriffspunkt von dP_i eine weitere Senkung y_i und die zugehörige Arbeitsleistung ist gleich

$$dP_i \cdot y_i.$$

Im Ganzen haben wir daher mit Weglassung des von der zweiten Ordnung unendlich kleinen Gliedes

$$A + dA = \frac{1}{2}\sum Py + y_i dP_i,$$

woraus für den Differentialquotienten der dritte Ausdruck

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = y_i \tag{93}$$

folgt. Diese dritte Ableitung wäre freilich entbehrlich gewesen, denn schon aus dem Vergleiche der in den Formeln (91) und (92) gefundenen Werthe geht hervor, dass

$$y_i = \sum P \frac{\partial y}{\partial P_i} \tag{94}$$

sein muss, womit jene Ausdrücke in den zuletzt gefundenen übergehen. Uebrigens ist die dritte Ableitung auch nur dann ohne Weiteres in der gegebenen Form anwendbar, wenn der Stoff, aus dem der Balken besteht, nicht nur vollkommen elastisch ist, sondern zugleich dem Hooke'schen Gesetze gehorcht, während die beiden anderen Ableitungen von dieser Voraussetzung unabhängig sind. Jedenfalls gelten aber, da die dritte Ableitung entbehrlich ist, die Formeln (91) bis (94) immer dann streng, wenn die Formänderung vollkommen elastisch, also namentlich auch von Reibungen nicht beeinflusst ist.

Bei den vorausgehenden Entwickelungen sprach ich der Uebersichtlichkeit wegen immer nur von den Formänderungen, die ein Balken erfährt, wenn Lasten auf ihn gebracht werden. Nachträglich mache ich aber darauf aufmerksam, dass diese Beschränkung auf diesen einen Fall ganz entbehrlich ist: die vorausgehenden Schlussfolgerungen bleiben vielmehr Wort für Wort auf jeden Körper anwendbar, der unter dem Einflusse äusserer Kräfte vollkommen elastische Formänderungen erfährt. Unter der zu einer Kraft P gehörigen Verschiebung y des Angriffspunktes ist dabei nur immer jene Componente der gesammten Verschiebung zu verstehen, die in die Richtung der Kraft P fällt. Auf die Verschiebungscomponenten, die rechtwinklig zur Kraftrichtung stehen, kommt es bei der

Formänderungsarbeit überhaupt nicht an. Ist der Weg y entgegengesetzt zum Pfeile der Kraft gerichtet, so muss er natürlich negativ gerechnet werden.

Gl. (93) spricht den von Castigliano aufgestellten Satz aus: „Die Verschiebung des Angriffspunktes einer äusseren Kraft bei der vollkommen elastischen Formänderung eines Körpers ist gleich der nach dieser Kraft genommenen partiellen Ableitung der Formänderungsarbeit."

Diesem Satze schliesst sich ein zweiter an, der durch eine einfache Schlussfolgerung aus ihm gewonnen wird. Ist nämlich unter den äusseren Kräften eine, von der wir wissen, dass ihr Angriffspunkt keine Verschiebung erfährt, so muss für sie nach Gl. (93)

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = 0 \tag{95}$$

sein. Damit erhalten wir eine Gleichung, die zur Berechnung dieser Kraft, wenn deren Grösse unbekannt war, benutzt werden kann. Gerade hierauf beruht die wichtigste Anwendung dieser Betrachtungen in der Festigkeitslehre. Gewöhnlich handelt es sich dabei um die Berechnung der Auflagerkräfte von statisch unbestimmten Constructionen. Man wählt dann gewisse Componenten der Auflagerkräfte als die statisch unbestimmten Grössen des Problems aus, so dass die übrigen auf Grund der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen der Statik in diesen Unbekannten ausgedrückt werden können. Auch alle Biegungsmomente, Scheerkräfte u. s. f. lassen sich dann in den gewählten Unbekannten ausdrücken und ebenso auch die Formänderungsarbeit A nach Gl. (88) oder (89). Wenn man nun weiss, dass die Angriffspunkte der unbekannten Auflagercomponenten in Folge der ihnen vorgeschriebenen Auflagerbedingungen keine Verschiebungen in den Richtungen dieser Kräfte ausführen können, liefert die Anwendung von Gl. (95) für jeden dieser Angriffspunkte eine Bedingungsgleichung und man erhält damit ebenso viele Gleichungen als Unbekannte. Man braucht dann nur noch diese Gleichungen, die alle vom ersten Grade sind, nach den Unbekannten aufzulösen.

Die Methode ist übrigens noch etwas allgemeiner, als sie bis jetzt dargestellt wurde. Es ist nämlich nicht nöthig, dass etwa P_i nur eine Einzelkraft bezeichne: es kann auch irgend eine Gruppe von äusseren Kräften vorstellen, wenn nur unter y_i eine Verschiebungsgrösse verstanden wird, durch deren Multiplication mit P_i (oder dem Mittelwerthe von P_i bei allmählichem Aufbringen der Belastung) die geleistete Arbeit gefunden wird. Auch durch diese Erweiterung wird an den früheren Schlüssen gar nichts geändert.

Häufig ist es nämlich zweckmässig, ein Kräftepaar an einer Auflagerstelle, an der der Träger eingespannt wird, als statisch unbestimmte Grösse in die Rechnung einzuführen. Die Arbeit eines Kräftepaars hängt aber von der Drehung ab, die die Angriffsstelle im Sinne der Axe des Kräftepaars erfährt und unter dem zugehörigen y ist daher in diesem Falle der Drehungswinkel zu verstehen. Wenn man weiss, dass der Träger an dieser Stelle fest eingespannt ist, der Drehungswinkel also verschwinden muss, erhält man auch in diesem Falle die Bedingungsgleichung (95), in der jetzt unter P_i das unbekannte Auflagermoment zu verstehen ist.

Aber auch nach einer zweiten Richtung ist diese Betrachtung noch einer Erweiterung fähig. Es ist zur Durchführung der Berechnung der statisch unbestimmten Grössen oft nützlich, eine Construction in zwei (oder mehr) Theile zu zerlegen. Gewöhnlich führt man diese Zerlegung in solcher Weise aus, dass jeder Theil für sich genommen einen statisch bestimmten Träger bilden würde. Man muss dann nur die an der Verbindungsstelle zwischen beiden Trägertheilen in Wirklichkeit übertragenen inneren Kräfte als äussere Kräfte, also als Belastungen der beiden Theilstücke betrachten. Diese treten dann als die statisch unbestimmten Grössen des Problems auf und auch für sie gilt Gl. (95).

Um dies zu erkennen, bedenke man, dass die ganze Formänderungsarbeit A hier in zwei Theile zerlegt werden kann

$$A = A_1 + A_2, \tag{96}$$

so dass A_1 die im ersten Theilstücke aufgespeicherte potentielle Energie bezeichnet und ebenso A_2 die im anderen Theilstücke. Bedeutet nun P_i eine von dem zweiten Theilstücke auf das erste an der Verbindungsstelle übertragene unbekannte Kraft oder ein eben solches Moment, so hat man für den ersten Theil nach Gl. (93)

$$y_i = \frac{\partial A_1}{\partial P_i},$$

und dieselbe Gleichung lässt sich auch auf das zweite Theilstück anwenden. Wenn man nun weiss, dass die beiden Theile so miteinander zusammenhängen, dass die Verschiebungsgrösse y_i für beide gleich gross sein muss, so liefert dies die Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial A_1}{\partial P_i} = -\frac{\partial A_2}{\partial P_i}.$$

Das Minuszeichen auf der rechten Seite war nämlich nöthig, weil am zweiten Trägertheile nach dem Gesetze der Action und Reaction die statisch unbestimmte Grösse gleich $- P_i$ ist. Aus Gl. (96) folgt daher auch in diesem Falle

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \frac{\partial A_1}{\partial P_i} + \frac{\partial A_2}{\partial P_i} = 0.$$

Wir können jetzt alle diese Betrachtungen zu dem andern von Castigliano herrührenden Satze zusammenfassen:

„Die partiellen Ableitungen der Formänderungsarbeit eines vollkommen elastischen Körpers nach den statisch unbestimmten Kräften, die so ausgewählt sind, dass sie selbst keine Arbeit leisten, sind gleich Null und aus den sich hieraus ergebenden Bedingungsgleichungen können die statisch unbestimmten Kräfte selbst berechnet werden."

Gewöhnlich gibt man diesem Satze noch eine etwas andere Form, die zwar für die praktische Anwendung nichts Neues lehrt, die sich aber durch die gedrängte Art der Aussage dem Gedächtnisse besser einprägen lässt. Die Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = 0$$

ist nämlich eine nothwendige Bedingung dafür, dass P_i so gewählt sei, um A entweder zu einem Maximum oder zu einem Minimum zu machen. Um zu erkennen, ob der eine oder der andere Fall vorliegt, bilden wir den zweiten Differentialquotienten. Mit Rücksicht auf Gl. (93) erhält man dafür

$$\frac{\partial^2 A}{\partial P_i^2} = \frac{\partial y_i}{\partial P_i}.$$

Der Werth auf der rechten Seite ist aber nothwendig positiv, denn eine Vermehrung irgend einer äusseren Kraft P_i um dP_i kann nur eine Verschiebung dy_i ihres Angriffspunktes in der gleichen Richtung mit dP_i zur Folge haben. In der That ist also A ein Minimum.

Mit Rücksicht hierauf kann man den vorhergehenden Satz auch in der Form aussprechen:

„Die statisch unbestimmten Grössen machen die Formänderungsarbeit zu einem Minimum.“

Er wird daher auch als der Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit bezeichnet. Dabei muss aber, wie nochmals hervorgehoben werden soll, beachtet werden, dass die Minimumseigenschaft selbst bei den Anwendungen des Satzes gar keine Rolle spielt, sondern dass es dabei immer nur auf die Gleichungen von der Form

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = 0$$

ankommt.

Zur Erläuterung des Rechenverfahrens soll noch ein einfaches Beispiel behandelt werden. Ich wähle dazu einen Balken, der über zwei Oeffnungen von ungleicher Grösse reicht und eine über die ganze Länge gleichmässig vertheilte Belastung q auf die Längeneinheit trägt. Als statisch unbestimmte Grösse wählen wir den Auflagerdruck Z (vgl. Abb. 39) an der Mittelstütze. Für die Auflagerkräfte B und C folgt dann aus den Gleichgewichtsbedingungen für den ganzen Balken

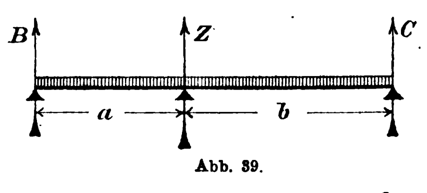


Abb. 39.

$$B = \frac{q(a+b)}{2} - \frac{Zb}{a+b}; \quad C = \frac{q(a+b)}{2} - Z\frac{a}{a+b}.$$

Für das Biegungsmoment in der ersten Oeffnung hat man

$$M_{\mathrm{I}} = Bx - \frac{qx^2}{2}.$$

Diesen Werth setzen wir in den Ausdruck (88) für die Formänderungsarbeit ein. Das Trägheitsmoment des Balkens und der Elasticitätsmodul E sind stillschweigend als constant über die ganze Balkenlänge vorausgesetzt; es handelt sich also nur darum, das Integral

$$\int M^2\, dx$$

auszuführen. Dies wird hier für die erste Oeffnung

$$\int_0^a \left(B^2x^2 - Bqx^3 + \frac{qx^4}{4}\right)dx = B^2\frac{a^3}{3} - Bq\frac{a^4}{4} + q\frac{a^5}{20}.$$

Dazu kommt der Beitrag der zweiten Oeffnung, der durch eine Rechnung von derselben Art festgestellt werden kann. Einfacher ist es aber hier, darauf aufmerksam zu machen, dass jede Oeffnung bei geeigneter Aufstellung des Beobachters als die links liegende angesehen werden kann und dass der soeben berechnete Werth unmittelbar auch für die andere Oeffnung benutzt werden kann, wenn man darin B mit C und a mit b vertauscht. Im Ganzen erhält man daher für die Formänderungsarbeit des durchlaufenden Balkens

$$A = \frac{1}{2E\Theta}\left\{\frac{B^2a^3}{3} - \frac{Bqa^4}{4} + \frac{qa^5}{20} + \frac{C^2b^3}{3} - \frac{Cqb^4}{4} + \frac{qb^5}{20}\right\}.$$

Dieser Ausdruck wird durch den gesuchten Werth der Unbekannten Z zu einem Minimum gemacht oder mit anderen Worten, der Differentialquotient des Ausdrucks nach Z ist gleich Null zu setzen. Bei der Ausführung der Differentiation ist zu beachten, dass Z nur in B und C vorkommt, deren Abhängigkeit von Z schon vorher festgestellt wurde. Man erhält

$$\frac{\partial A}{\partial Z} = \frac{1}{2E\Theta}\left\{\left(\frac{2Ba^3}{3} - \frac{qa^4}{4}\right)\frac{\partial B}{\partial Z} + \left(\frac{2Cb^3}{3} - \frac{qb^4}{4}\right)\frac{\partial C}{\partial Z}\right\}.$$

Setzt man dies gleich Null und führt für B und C ihre Werthe ein, ebenso für die Differentialquotienten die daraus hervorgehenden

$$\frac{\partial B}{\partial Z} = -\frac{b}{a+b}; \quad \frac{\partial C}{\partial Z} = -\frac{a}{a+b},$$

so findet man die Bedingungsgleichung

$$0 = -\frac{b}{a+b}\left(\frac{2a^3}{3}\left[\frac{q(a+b)}{2} - Z\frac{b}{a+b}\right] - \frac{qa^4}{4}\right) -$$

$$-\frac{a}{a+b}\left(\frac{2b^3}{3}\left[\frac{q(a+b)}{2} - Z\frac{a}{a+b}\right] - \frac{qb^4}{4}\right),$$

deren Auflösung den Werth der statisch unbestimmten Grösse Z liefert. Man erhält

$$Z = q \cdot \frac{a^3 + 4a^2b + 4ab^2 + b^3}{8ab}.$$

Wenn man $a = b$ setzt, geht dies in $Z = \frac{5}{4}qa$ über, was wir für diesen besonderen Fall schon in § 25 gefunden haben.

Auch die Anwendung des Satzes vom Minimum der Formänderungsarbeit macht, wie schon aus diesem einfachen Beispiele hervorgeht, die Durchführung längerer Rechnungen nöthig. In dieser Hinsicht ist die Methode den älteren kaum überlegen; ihr Hauptvorzug besteht darin, dass sie eine einfache Vorschrift für den ganzen Rechnungsgang aufstellt, die den Rechner der Mühe des Nachdenkens so ziemlich enthebt. Die Rechnung spielt sich in allen Fällen ungefähr in derselben Weise ab und stellt während ihrer Abwickelung die möglichst geringen Anforderungen an eine höhere geistige Thätigkeit. Nur weil der Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit bei seiner Anwendung zugleich ein Minimum von Gedankenarbeit erfordert, ist er heute zu der Bedeutung eines der wichtigsten Sätze der technischen Mechanik gelangt. Uebrigens soll in dieser Bemerkung durchaus nicht etwa irgend ein Vorwurf enthalten sein; vielmehr geht das ganze Streben der Wissenschaft auf eine Ersparung von Gedankenarbeit hinaus und jede Aenderung der früheren Darstellung, die hierzu verhilft, bildet einen wichtigen Fortschritt.

§ 29. Stossweise Belastung.

Bei allen vorausgehenden Berechnungen der Formänderungsarbeit ist angenommen worden, dass die Belastung ganz allmählich von Null an auf ihren Höchstwerth gesteigert wird. Dies war nöthig, um zu verhindern, dass ein merklicher Theil der von der äusseren Kraft geleisteten Arbeit zur Beschleunigung der Masse des belasteten Körpers verwendet, also in kinetische Energie umgesetzt wird. Diese Untersuchungen bedürfen aber jetzt noch einer Ergänzung. Die allmähliche Steigerung der Belastung bildet zwar in Wirklichkeit die Regel; man kann es aber durch geeignete Vorrichtungen offenbar auch erreichen, dass die Last plötzlich aufgebracht wird und von Anbeginn der Belastung an mit ihrer vollen Grösse auf den Träger einwirkt. Den Weg des Angriffspunktes der Belastung während der elastischen Formänderung bis zum grössten Ausschlage und in der Richtung der Kraft gemessen, wollen wir der Kürze halber in diesem Falle den dynamischen Biegungspfeil nennen und ihn mit f_d bezeichnen, obschon die ganze Betrachtung nicht nur für den Fall der Biegung, sondern für jeden Belastungsfall gültig ist. Die Arbeit der Last P ist dann gleich

$$Pf_d$$

zu setzen, da hier der Factor $\frac{1}{2}$ fortfällt. Zunächst sieht man ein, dass f_d grösser sein muss, als der früher berechnete statische Biegungspfeil f_s, der zu derselben Last P im Gleichgewichtszustande gehören würde. Denn wenn die elastische Formänderung bis zu f_s vorgeschritten ist, hat P schon eine Arbeit Pf_s geleistet, die nach den früheren Untersuchungen doppelt so gross ist als die bei dieser Formänderung aufgespeicherte potentielle Energie. Die andere Hälfte der geleisteten Arbeit muss sich daher — unter der Voraussetzung, dass die Formänderung vollkommen elastisch ist — in lebendige Kraft der sich bewegenden Massen umgesetzt haben. Nach dem Trägheitsgesetze geht dann die Bewegung über die Formänderung f_s hinaus weiter. Diese weitere Bewegung ist

eine verzögerte, da jetzt eine grössere Belastung als P erforderlich wäre, um den erreichten Formänderungszustand aufrecht zu erhalten. Dabei verwandelt sich die vorher angesammelte lebendige Kraft ebenfalls in Formänderungsarbeit, und wenn die Bewegung bis zu f_d fortgeschritten ist, ist die ganze zugeführte Energie in diese Form umgewandelt, so dass dann

$$A = P f_d$$

gesetzt werden kann. In dieser Lage kann der Körper aber nicht verharren, da die Formänderung grösser ist, als es der Last P im Gleichgewichtszustande entspricht; er geht daher wieder zurück und führt Schwingungen um die Gleichgewichtslage f_s herum aus.

Man weiss aus der Erfahrung, dass diese Schwingungen allmählich erlöschen, theils weil die Formänderung nicht so vollkommen elastisch ist, wie sie hier vorausgesetzt wurde, theils wegen des Luftwiderstandes, theils wegen Reibungen, die an verschiedenen Stellen vorkommen können. Da eine solche Zerstreuung der zugeführten Energie im späteren Verlaufe ohne Zweifel eintritt, muss man schliessen, dass sie sich auch schon während des ersten Schwingungsausschlages bemerklich macht. Mit Rücksicht auf diese Erwägung thut man besser, die vorige Gleichung durch

$$A = n \cdot P f_d$$

zu ersetzen, wobei nun n einen von den Nebenumständen des Falles abhängigen Zahlenfactor bedeutet, der sicher ein echter Bruch, unter gewöhnlichen Umständen aber nicht viel kleiner als 1 ist.

Hier handelt es sich nicht darum, den Verlauf der Schwingungen zu untersuchen, die der Körper um die Gleichgewichtslage ausführt, sondern nur um die grösste Beanspruchung des Materials, die er während des ganzen Vorganges erleidet. Diese hängt von der grössten Formänderung ab, die überhaupt vorkommt, also von f_d. Wir entscheiden die Frage am einfachsten dadurch, dass wir berechnen, wie gross eine Last P' sein müsste, die im Gleichgewichtszustande dieselbe Formänderung

f_d hervorbrächte, wie sie hier unter P auftritt. Wir wissen, dass für diese

$$A = \frac{1}{2} P' f_d$$

wäre, und da A in beiden Fällen dieselbe potentielle Energie, die nur von dem erreichten Formänderungszustande abhängig ist, bedeutet, erhalten wir durch Gleichsetzung beider Werthe

$$P' = 2nP \tag{97}$$

oder, wenn wir näherungsweise $n = 1$ setzen,

$$P' = 2P. \tag{98}$$

Beim plötzlichen Aufbringen der Belastung wird also ein Träger doppelt so stark beansprucht, als wenn er dieselbe Belastung im Gleichgewichtszustande trägt. Auf diesen einfachen Satz ist bei den Festigkeitsberechnungen vieler Tragconstructionen Rücksicht zu nehmen.

Aehnlich liegt z. B. der Fall bei Eisenbahnbrücken, über die ein Zug mit grosser Geschwindigkeit fährt. Freilich ist der Vorgang hier verwickelter und überhaupt nur auf Grund einer eingehenden Untersuchung der auftretenden Schwingungen wenigstens näherungsweise zu verfolgen. Immerhin lässt sich von vornherein erwarten, dass grössere Formänderungen auftreten werden, als sie einer gleichen ruhenden Belastung entsprechen würden, und man kann diesem Umstande auf Grund der vorausgehenden Betrachtungen dadurch Rechnung tragen, dass man die bewegte Last mit einem Zahlenfactor multiplicirt in die Rechnung einführt. So rührt von Gerber die Vorschrift her, dass man die bewegte Last in solchen Fällen mit dem $1\frac{1}{2}$fachen Betrage in Ansatz bringen soll. Der Zahlenfactor ist kleiner als der in Gl. (98) gefundene Werth 2, was sich damit rechtfertigt, dass hier in der That von einem plötzlichen Aufbringen in die ungünstigste Laststellung nicht die Rede sein kann, so dass die Verstärkung der Beanspruchung niedriger zu schätzen ist, als dort.

Schon das plötzliche Aufbringen einer Belastung ohne Anfangsgeschwindigkeit in der Durchbiegungsrichtung wird gewöhnlich als eine stossweise Belastung bezeichnet. Ausser-

dem muss aber auch noch der Fall des Stosses im engeren Sinne untersucht werden, bei dem die Last schon beim Auftreffen auf den Körper eine Geschwindigkeit v in der Richtung der nachher erfolgenden Durchbiegung und damit eine lebendige Kraft

$$L = \frac{Pv^2}{2g} = Ph$$

hatte. Unter h ist dabei die Fallhöhe zu verstehen, durch deren Durchlaufen die Geschwindigkeit v entweder wirklich erreicht wurde oder doch erreicht werden könnte. — Auch dieser Fall ist im Allgemeinen wie der vorige zu behandeln; man setze

$$A = nP(h + f_d), \tag{99}$$

wobei n wieder ein Zahlenfactor ist, der aber hier unter Umständen erheblich kleiner als 1 werden kann. In der zutreffenden Wahl oder in der richtigen Berechnung von n beruht die Schwierigkeit der Aufgabe, für die man bis jetzt noch keine vollständig befriedigende Lösung besitzt. Es kommen hier mehrere Umstände zusammen, die die Sache sehr verwickelt machen. Zunächst können an der Aufschlagstelle der Last in kleinerem Umkreise bleibende Formänderungen sowohl der Last selbst als auch des Trägers auftreten, die für den Bestand des ganzen Trägers ohne Belang sind, aber einen Theil der Energie aufzehren. Dann wird ein Theil der ganzen lebendigen Kraft auch abgesehen davon, weil der Stoss niemals ganz elastisch ist, unmittelbar in Wärme verwandelt. Dazu kommt, dass sich die elastische Bewegung nicht plötzlich über den ganzen Träger erstreckt, sondern sich mit der Schallgeschwindigkeit in dem Körper fortpflanzt. Der Einfluss dieser Schallwellen ist schwer zu übersehen. Dann kann auch die Last unter Umständen schon wieder zurückspringen, ehe die grösste Formänderung des Trägers erreicht ist und dabei einen Theil der vorhandenen Energie mit sich nehmen.

Die besten bisher vorliegenden Untersuchungen über diesen Gegenstand rühren von de Saint-Vénant her und sind in der von ihm herausgegebenen französischen Uebersetzung des Buches von Clebsch über die Theorie der Elasticität veröffentlicht. Es

scheint, dass sich aber auch diese Untersuchungen in vielen Fällen sehr weit von der Wirklichkeit entfernen. Ich habe daher zu allen diesen Betrachtungen einstweilen kein Vertrauen und unterlasse es daher, hier näher darauf einzugehen. Weiteren theoretischen Forschungen auf diesem Gebiete müssten vor allen Dingen Experimentaluntersuchungen vorangehen, durch die man allein zur richtigen Abschätzung des Gewichtes wird geführt werden können, das man bei der Rechnung den einzelnen Umständen beizulegen hat. Ich werde mir es angelegen sein lassen, solche Untersuchungen bei gelegener Zeit auszuführen und behandle bis dahin die Frage nach der richtigen Wahl des Faktors n in Gl. (99) als eine offene.

Wenn n bekannt wäre, würde man daraus die gleichwerthige statische Belastung P' und mit dieser die Beanspruchung des Materials wie vorher aus der Gleichung

$$\frac{1}{2} P' f_d = n P (h + f_d) \qquad (100)$$

berechnen können, denn die Unbekannte f_d lässt sich nach früheren Betrachtungen in der zugehörigen statischen Belastung P' ausdrücken, worauf die Gleichung nur noch die eine Unbekannte P' enthält, nach der sie leicht aufgelöst werden kann. Ein Beispiel wird man unter den Aufgaben finden; man beachte auch die Anmerkung zu Aufgabe 24.

§ 30. Satz von Maxwell über die Gegenseitigkeit der Verschiebungen.

Dieser wichtige Satz lässt sich mit wenigen Worten aus den Sätzen von Castigliano ableiten. Das soll zuerst geschehen; da aber hierbei nicht leicht zugleich das volle Verständniss für den Sinn des Satzes gewonnen werden kann, werde ich nachträglich noch eine andere Ableitung geben, die leichter verständlich ist.

Nach Gl. (94) ist

$$y_i = \sum P \frac{\partial y}{\partial P_i}.$$

Wir wollen diese Gleichung nach irgend einer der anderen Lasten, etwa nach P_k differentiiren. In jedem Gliede der rechten Seite ist der Factor $\frac{\partial y}{\partial P_i}$ von P_k abhängig, der andere Factor nur in dem einem Gliede, das sich auf P_k selbst bezieht. Beim Differentiiren erhalten wir also auf der rechten Seite ein Glied mehr als wir hatten, nämlich

$$\frac{\partial y_i}{\partial P_k} = \sum P \frac{\partial^2 y}{\partial P_i \partial P_k} + \frac{\partial y_k}{\partial P_i}. \tag{101}$$

Wenn das Superpositionsgesetz für die elastischen Formänderungen gültig ist, sind die elastischen Verschiebungen y Functionen ersten Grades der Lasten; y_i ist also etwa von der Form

$$y_i = \alpha_{i1} P_1 + \alpha_{i2} P_2 + \alpha_{i3} P_3 + \cdots + \alpha_{ii} P_i + \cdots \tag{102}$$

Die von der Gestalt und den elastischen Eigenschaften des Körpers, sowie von der Lage des Punktes, zu dem y_i gehört, und der Lage des Angriffspunktes der betreffenden Last abhängigen Coefficienten α pflegt man als die Einflusszahlen der zugehörigen Lasten auf die Durchbiegungen oder sonstigen Formänderungen y zu bezeichnen.

Unter dieser Voraussetzung verschwinden alle zweiten Differentialquotienten der y und Gl. (101) vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial y_i}{\partial P_k} = \frac{\partial y_k}{\partial P_i}. \tag{103}$$

Mit Rücksicht auf Gl. (102) lässt sich dies auch in der Form

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki} \tag{104}$$

aussprechen. Der Einfluss der Last k auf die Verschiebung des Angriffspunktes von i ist demnach ebenso gross als der Einfluss der Last i auf die Verschiebung des Angriffspunktes von k. Das ist der Maxwell'sche Satz.

Auch dann, wenn das Hooke'sche Gesetz nicht gültig, die Formänderung aber immer noch vollkommen elastisch ist, bleibt der Maxwell'sche Satz bestehen. Der Beweis muss aber

dann etwas geändert werden. Man differentiire zu diesem Zwecke die nach Gl. (94) bestehende Gleichung

$$y_k = \sum P \frac{\partial y}{\partial P_k}$$

nach P_i; dadurch erhält man

$$\frac{\partial y_k}{\partial P_i} = \sum P \frac{\partial^2 y}{\partial P_k \partial P_i} + \frac{\partial y_i}{\partial P_k}.$$

Die Summengrösse in dieser Formel stimmt mit der in Gl. (101) überein; der Vergleich beider Gleichungen zeigt, dass diese Summe gleich Null und auch in diesem Falle

$$\frac{\partial y_i}{\partial P_k} = \frac{\partial y_k}{\partial P_i}$$

sein muss. Von Einflusszahlen im früheren Sinne kann hier freilich nicht mehr die Rede sein; jeder der beiden Differentialquotienten kann indessen als eine Einflusszahl für einen unendlich kleinen Lastzuwachs auf die Durchsenkung des Angriffspunktes der anderen Last betrachtet werden und in diesem Sinne lässt sich der frühere Wortlaut des Satzes aufrecht erhalten.

Alle diese Formeln gelten ebenso wie Gl. (94), aus der sie hervorgegangen sind, ganz allgemein für alle vollkommen elastischen Formänderungen beliebig gestalteter und beliebig belasteter Körper.

Ich gebe jetzt eine von den früheren Betrachtungen unabhängige Ableitung, bei der ich mich der Anschaulichkeit wegen auf die Betrachtung des einfachsten, aber auch am häufigsten vorkommenden Falles beschränke. In Abb. 40 ist ein auf zwei Stützen ruhender Balken gezeichnet, von dem irgend zwei beliebig ausgewählte Querschnitte mit den Ordnungsziffern I und II versehen wurden. Ich denke mir zunächst eine Last P_1 im Querschnitte I aufgebracht. Wäre P_1 gleich der Lasteinheit, so sollte die Durchbiegung unter dieser

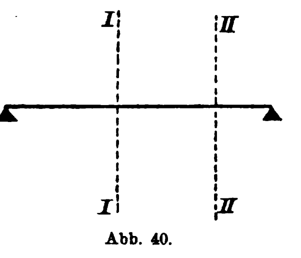


Abb. 40.

Last im Querschnitte I mit α_{11} und im Querschnitte II mit α_{21} bezeichnet werden. Diese Grössen sind wieder die Einflusszahlen der Last im Querschnitte I auf die Durchbiegungen in den Querschnitten I und II und die wirklichen Durchbiegungen in Folge von P_1 sind $\alpha_{11} P_1$ für den ersten und $\alpha_{21} P_1$ für den zweiten Querschnitt.

Dann soll auch eine andere Last P_2 im Querschnitte II aufgebracht werden, deren Einflusszahlen entsprechend mit α_{12} und α_{22} bezeichnet seien, so also, dass der erste Zeiger immer angibt, an welchem Querschnitte die Einsenkung beobachtet wird, während der zweite die Laststellung beschreibt.

Wenn man erst P_1 und dann P_2 aufbringt, leisten beide Kräfte Arbeiten, deren Summe gleich der im Endzustande des Balkens aufgespeicherten potentiellen Energie ist. Während P_1 aufgebracht wird, ist die von ihm geleistete Arbeit gleich

$$\frac{1}{2} P_1 \cdot \alpha_{11} P_1.$$

Während des hierauf folgenden Aufbringens von P_2 verschieben sich die Angriffspunkte beider Kräfte. Beide leisten also Arbeit, wobei zu beachten ist, dass P_1 während der ganzen Dauer dieses Vorgangs seine Grösse beibehält, während P_2 von Null bis zu seinem Endwerthe anwächst. Die in dieser zweiten Periode geleistete Arbeit ist daher

$$P_1 \cdot \alpha_{12} P_2 + \frac{1}{2} P_2 \cdot \alpha_{22} P_2.$$

Im Ganzen wird daher die potentielle Energie des vollständig belasteten Balkens

$$A = \frac{1}{2} \alpha_{11} P_1^2 + \alpha_{12} P_1 P_2 + \frac{1}{2} \alpha_{22} P_2^2. \qquad (105)$$

Man kann aber zu demselben Endzustande auch dadurch gelangen, dass man zuerst P_2 und dann erst P_1 aufbringt. Dann lassen sich dieselben Schlüsse wiederholen, wobei sich nur die Zeiger 1 und 2 miteinander vertauschen. Man findet daher auch

$$A = \frac{1}{2} \alpha_{22} P_2^2 + \alpha_{21} P_2 P_1 + \frac{1}{2} \alpha_{11} P_1^2.$$

Dieser Werth muss dem vorausgehenden gleich sein und der Vergleich zwischen ihnen zeigt, dass

$$\alpha_{12} = \alpha_{21} \tag{106}$$

ist, womit der Maxwell'sche Satz von Neuem bewiesen ist.

Nachträglich überzeugt man sich leicht, dass die der Abb. 40 zu Grunde liegende besondere Voraussetzung über die Gestalt und die Belastungsweise des Trägers unwesentlich ist. Man kann diese Abbildung auch durch die nebenstehende ersetzen, in der ein beliebig gestalteter und beliebig aufgelagerter Träger dargestellt werden soll. Auf diesem Körper wähle man zwei beliebige Punkte I und II aus und ziehe durch jeden in beliebiger Richtung irgend eine gerade Linie. Lässt man dann eine Kraft an I in der angenommenen Richtung angreifen, so verschiebt sich II im Sinne der dort gewählten Richtung um ebenso viel als sich I in der zugehörigen Richtung verschiebt, wenn an II eine ebenso grosse Kraft in der dort gewählten Richtung angreift. Denn in der That lassen sich die vorausgehenden Schlüsse ohne jede Aenderung auch auf den Fall der Abb. 41 übertragen.

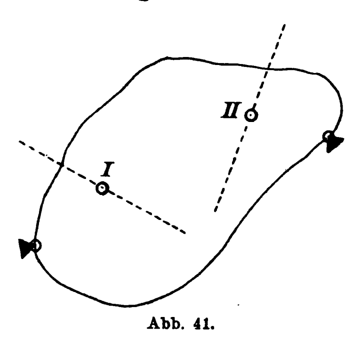


Abb. 41.

Es bleibt mir jetzt noch übrig, auf die Anwendungen hinzuweisen, die man von dem Maxwell'schen Satze bei den Festigkeitsberechnungen der technischen Praxis macht. Diese sollen an zwei einfachen, schon früher mehrfach behandelten Beispielen erläutert werden.

Bei der Berechnung eines über zwei Oeffnungen durchlaufenden Balkens auf Grund des Maxwell'schen Satzes beginnt man damit, die Mittelstütze fortzunehmen und an dieser Stelle eine Last von 1 t (oder überhaupt von der Krafteinheit) anzubringen. Man ermittelt nun die Gestalt der elastischen Linie, die diesem Belastungsfalle entspricht, entweder auf dem

Wege der Rechnung, wie es früher erläutert wurde, oder auf graphischem Wege. Die Abscisse der Mittelstütze, vom linken Auflager gerechnet, sei mit a, die eines beliebigen anderen Querschnitts mit x bezeichnet. Dann gibt die Ordinate der elastischen Linie im Querschnitte x unmittelbar die Einflusszahl

$$\alpha_{xa}$$

an. Nach dem Maxwell'schen Satze ist aber

$$\alpha_{ax} = \alpha_{xa}$$

und wir kennen damit auch die Einsenkung am Querschnitte a bei fortgenommener Mittelstütze, wenn im Querschnitte x die Lasteinheit angreift. Daraus folgt aber durch eine schon früher wiederholt benutzte einfache Ueberlegung auch die Grösse des Auflagerdrucks auf der Mittelstütze bei diesem Belastungsfalle. Diese Auflagerkraft muss nämlich so gross sein, dass sie jene Durchbiegung wieder rückgängig macht. Nun kennen wir schon aus der gezeichneten elastischen Linie die elastische Verschiebung α_{aa} des Querschnitts an der Mittelstütze für eine an dieser selbst angreifende Lasteinheit und wir wissen, dass die elastische Verschiebung der Grösse der Last proportional ist. Wir haben also, wenn die Last im Querschnitte x mit P und der von ihr in Wirklichkeit an der Mittelstütze hervorgerufene Auflagerdruck mit Z bezeichnet wird, die Gleichung

$$\alpha_{aa} \,.\, Z = \alpha_{ax} P,$$

woraus mit Rücksicht auf den Maxwell'schen Satz

$$Z = \frac{\alpha_{xa}}{\alpha_{aa}} P \tag{107}$$

folgt. Das Verhältniss der zwei Ordinaten der ursprünglich gezeichneten elastischen Linie in den Querschnitten x und a lehrt uns also sofort für jede beliebige Stellung einer Einzellast den Bruchtheil kennen, der von dieser Einzellast auf die Mittelstütze übertragen wird. Dieser Antheil ist überall proportional mit der Ordinate α_{xa} der elastischen Linie. Man bezeichnet daher diese elastische Linie als die Einflusslinie für den Auflagerdruck Z.

Sobald die Vorarbeit des Aufzeichnens dieser Linie erledigt ist, kann die weitere Berechnung des durchlaufenden Trägers genau so erfolgen, als wenn er statisch bestimmt wäre. Denn man ist im Stande, für jeden beliebigen Belastungsfall — z. B. wenn ein Eisenbahnzug die Belastung bildet — sofort den Auflagerdruck Z nach der Gleichung

$$Z = \frac{1}{\alpha_{aa}} \sum \alpha_{xa} P$$

anzugeben, worauf die übrigen Auflagerkräfte, die Momente und Scheerkräfte genau so wie beim Balken über einer Oeffnung folgen. Gerade hierin beruht die grosse Bedeutung des Maxwell'schen Satzes für die Festigkeitsberechnungen der Praxis. Man muss dabei sehr viele verschiedene Laststellungen in Betracht ziehen und es wäre äusserst mühsam, wenn man dabei immer wieder von Neuem die Rechnung auf Grund der Elasticitätslehre auszuführen hätte. Dem ist man durch die vorausgehenden Erörterungen vollständig enthoben. Die Construction einer einzigen elastischen Linie genügt, um alle Unterlagen für die weiteren Berechnungen zu liefern.

Bei diesem Beispiele kam nur eine statisch unbestimmte Grösse vor. Ich betrachte, um zu zeigen, wie man in verwickelteren Fällen verfährt, jetzt noch einen Balken, der über drei Oeffnungen durchläuft. Vom linken Auflager gerechnet, sei die Ordinate der ersten Mittelstütze mit a, die der zweiten mit b bezeichnet. Man entfernt zuerst beide Mittelstützen und bringt im Querschnitte a die Lasteinheit auf. Die Ordinaten der zugehörigen elastischen Linie, die man construirt, geben für jeden Querschnitt x die Einflusszahl α_{xa} und damit auch α_{ax} an. Dann wird eine zweite elastische Linie construirt für die im Querschnitte b angreifende Belastungseinheit, wodurch man die Einflusszahlen α_{xb} und α_{bx} erhält. Nach diesen Vorarbeiten kann man die Auflagerkräfte C und D an den beiden Mittelstützen, die zu einer Last P in irgend einem Querschnitte x gehören, sofort durch Auflösen der beiden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{aa} C + \alpha_{ab} D = P\alpha_{ax} \\ \alpha_{ba} C + \alpha_{bb} D = P\alpha_{bx} \end{array}\right\} \qquad (108)$$

erhalten, von denen die erste ausspricht, dass sich die erste Mittelstütze in Wirklichkeit nicht in vertikaler Richtung verschieben kann, während die zweite dasselbe für die zweite Mittelstütze aussagt. Die Auflösung liefert

$$C = P \cdot \frac{\alpha_{ax}\alpha_{bb} - \alpha_{bx}\alpha_{ab}}{\alpha_{aa}\alpha_{bb} - \alpha_{ab}^2}; \quad D = P \cdot \frac{\alpha_{ax}\alpha_{ba} - \alpha_{bx}\alpha_{aa}}{\alpha_{ab}^2 - \alpha_{aa}\alpha_{bb}}. \quad (109)$$

Die Factoren von P in diesen Gleichungen können, da alle darin vorkommenden α durch die beiden elastischen Linien gegeben sind, ohne Weiteres berechnet werden, womit man die Einflusslinien der Lasten auf die beiden Mittelstützendrücke findet. Von da ab kann die Berechnung auch dieses Trägers genau so durchgeführt werden, als wenn er statisch bestimmt wäre. Man sieht leicht ein, wie dasselbe Verfahren in anderen Fällen anzuwenden ist. Die weiteren Ausführungen darüber gehören nicht mehr der allgemeinen Festigkeitslehre, sondern der Lehre vom Brückenbau an.

Aufgaben.

23. Aufgabe. Eine Spannweite von 6 m (vgl. den Grundriss Abb. 42) wird durch drei nebeneinander liegende I-*Träger vom Normalprofile 36, für das* Θ *nach dem deutschen Normalprofilbuche zu 19 766* cm^4 *angegeben ist, in gleichen Abständen von 1 m überdeckt. In der Mitte sind die Träger durch einen Querträger N. P. 20 (*$\Theta = 2162\ cm^4$*) verbunden. Welche Last P darf man an der mittleren Kreuzungsstelle anbringen, wenn die Spannung* σ *an keiner Stelle 1000 atm überschreiten soll? Vom Eigengewichte der Träger kann abgesehen werden.*

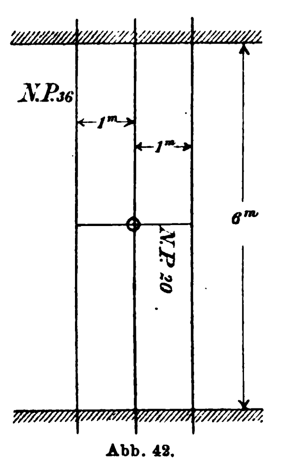


Abb. 42.

Lösung. Wir denken uns die Construction in zwei Theile getheilt, von denen der eine nur den mittleren Hauptträger, der andere die beiden äusseren Hauptträger und den Querträger umfasst. Jeder dieser Theile für sich genommen ist statisch bestimmt und als einzige statisch unbestimmte Grösse der ganzen Aufgabe kommt der Antheil Z in Betracht, den der mittlere Hauptträger von der Last P, die an ihm

angebracht ist, auf den Querträger abgibt. Am mittleren Hauptträger bleibt dann die Belastung $P - Z$ und der Querträger seinerseits gibt an jeden der beiden äusseren Hauptträger die Last $\frac{Z}{2}$ weiter. An der Kreuzungsstelle müssen sich die beiden statisch bestimmten Theile, in die wir uns die ganze Construction zerlegt dachten, um gleich viel senken; wir finden daher die statisch unbestimmte Grösse Z nach § 28, indem wir die Abgeleitete der Formänderungsarbeit nach Z gleich Null setzen. Zunächst ist also A als Function von Z zu berechnen.

Wenn ein beiderseits gestützter Balken in der Mitte die Last Q trägt, ist das Biegungsmoment M auf der linken Hälfte im Abstande x vom Auflager gleich $\frac{Q}{2}x$. Die in der linken Hälfte aufgespeicherte Formänderungsarbeit berechnet sich daraus mit Vernachlässigung der Arbeit der Schubspannungen, die in solchen Fällen immer zulässig ist, nach Gl. (88). Die Formänderungsarbeit für den ganzen Balken ist doppelt so gross und daher gleich

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{M^2}{E\Theta}dx = \frac{Q^2}{4E\Theta}\int_0^{\frac{l}{2}} x^2\,dx = \frac{Q^2 l^3}{96\,E\Theta}.$$

Für den mittleren Hauptträger haben wir hierin an Stelle von Q die Last $P - Z$, $l = l_1 = 6$ m und $\Theta = \Theta_1 = 19766\,\text{cm}^4$ zu setzen, für jeden der beiden äusseren Hauptträger wird $Q = \frac{Z}{2}$, während die anderen Werthe bleiben und für den Querträger ist $Q = Z$, $l = l_2 = 2$ m und $\Theta = \Theta_2 = 2162\,\text{cm}^4$. Im Ganzen wird daher die Formänderungsarbeit der gesammten Construction

$$A = \frac{(P - Z)^2 l_1^3}{96 E\Theta_1} + 2\cdot\frac{\left(\frac{Z}{2}\right)^2 l_1^3}{96 E\Theta_1} + \frac{Z^2 l_2^3}{96 E\Theta_2}.$$

Die Einsetzung der Zahlenwerthe wird besser bis zuletzt vorbehalten. Durch Nullsetzen des Differentialquotienten von A nach Z erhalten wir die Bestimmungsgleichung

$$0 = -2\cdot\frac{(P - Z)l_1^3}{96 E\Theta_1} + \frac{Z l_1^3}{96 E\Theta_1} + 2\cdot\frac{Z l_2^3}{96 E\Theta_2}.$$

Die Auflösung nach Z liefert

$$Z = \frac{2Pl_1^3}{3l_1^3 + 2l_2^3\frac{\Theta_1}{\Theta_2}} = 0{,}544\,P.$$

Es fragt sich jetzt, an welcher Stelle die grösste Beanspruchung des Materials zu erwarten ist. Diese kann entweder in der Mitte des mittleren Hauptträgers oder in der Mitte des Querträgers auftreten, denn die seitlichen Hauptträger sind offenbar weniger beansprucht als der in der Mitte. Das von dem mittleren Hauptträger in der Mitte aufzunehmende Biegungsmoment beträgt

$$\frac{l_1 (P - Z)}{4} = 68{,}4\ P \,\mathrm{cmkg}.$$

Wenn die Spannung an dieser Stelle 1000 atm betragen soll, berechnet sich P aus der Gleichung

$$1000 = \frac{68{,}4 P}{19766} \cdot 18, \quad \text{also } P = 16\,000 \text{ kg}.$$

Das Biegungsmoment im Mittelquerschnitt des Querträgers ist dagegen gleich $\frac{200 \cdot 0{,}544\ P}{4} = 27{,}2\ P$, und wenn hier die zulässige Spannung von 1000 atm nicht überschritten werden soll, darf P, wie aus der Gleichung

$$1000 = \frac{27{,}2\ P}{2162} \cdot 10$$

folgt, nur $P = 8000$ kg betragen. Der Querträger ist also am meisten gefährdet, und wenn er auf Grund des Ergebnisses der Rechnung nicht verstärkt wird, ist nur eine Last von 8000 kg für die Construction zulässig.

24. Aufgabe. Ein I-*Balken N. P. 24* ($\Theta = 4288$ cm^4) *überbrückt eine Spannweite von 2 m. Wie hoch darf eine Last von 400 kg auf die Mitte des Trägers herabfallen, ohne dass die Spannung von 1600 atm überschritten wird, wenn man annimmt, dass etwa 80 % der lebendigen Kraft in Gestalt von Formänderungsarbeit auf den Balken übergehen und wenn der Elasticitätsmodul = 2 000 000 atm gesetzt wird?*

Lösung. Wir berechnen zuerst die ruhende Belastung P', durch die die angenommene Spannung $\sigma = 1600$ atm hervorgerufen würde. Aus

$$\sigma = \frac{P' l}{4 \Theta} \cdot e \quad \text{folgt dafür} \quad P' = \frac{4 \Theta \sigma}{e l}.$$

Die hierbei aufgespeicherte Formänderungsarbeit ist

$$A = \left(\frac{4 \Theta \sigma}{e l}\right)^2 \frac{l^3}{96 E \Theta} = \frac{\sigma^2 l \Theta}{6 e^2 E}$$

oder nach Einsetzen der Zahlenwerthe $\sigma = 1600$ atm, $l = 200$ cm, $\Theta = 4288$ cm^4, $e = 12$ cm und $E = 2000000$ atm

$$A = 1270 \,\mathrm{cmkg}.$$

Die Höhe h, aus der die Last herabfallen darf, folgt aus

$$0{,}8 \cdot 400 \cdot h = 1270 \text{ zu } h = 4{,}0 \text{ cm}.$$

Diese Zahl ist indessen noch nicht ganz genau, da das Gewicht von 400 kg beim Herabsinken um den dynamischen Biegungspfeil f_d auch noch eine Arbeit leistet. Eigentlich ist daher $h + f_d = 4{,}0$ cm. Der Biegungspfeil f_d ist gleich dem statischen Biegungspfeil für die Last P', also

$$f_d = \frac{P' l^3}{48 E \Theta} = \frac{\sigma l^2}{12 e E} = 0{,}22 \text{ cm}.$$

Die ursprüngliche Höhe h des Gewichtes über dem Träger darf daher nur etwa 38 mm betragen, wenn die zugelassene Spannung nicht überschritten werden soll.

Anmerkung. Ich möchte bei dieser Gelegenheit erwähnen, dass ich kürzlich einige Schlagversuche ganz kleinen Umfangs ausführte. Es handelte sich darum, die Widerstandsfähigkeit eines Porzellangefässes gegen Stösse festzustellen. Bei dieser Gelegenheit wurden schmale Streifen von etwa 7 mm Stärke herausgeschnitten, die als Balken mit einer Spannweite von 15 cm auf einem schweren Eisenklotz in geeigneter Weise aufgelagert wurden. Einige Streifen wurden durch allmähliche Steigerung einer ruhenden Belastung zerbrochen, wobei der Biegungspfeil gemessen wurde, während die übrigen durch den Stoss eines Gewichtes von 0,4 kg, das aus einigen Centimetern Höhe herabfiel, zerstört wurden. Aus dem Vergleiche der erhaltenen Resultate folgt, dass in diesem Falle nur etwa 40% der lebendigen Kraft des herabfallenden Gewichtes in Formänderungsarbeit umgewandelt wurden. In Fällen, die ganz ähnlich liegen, würde man also den Zahlenfaktor n in Gl. (100) schätzungsweise gleich 0,4 setzen können. Zur Abschwächung der lokalen Stosswirkung an der Aufschlagstelle war ein kleines Stückchen Cartonpapier aufgeklebt worden, was bei dieser Angabe in Berücksichtigung zu ziehen ist.

25. Aufgabe. Ein Brückenträger erfuhr unter einer Einzellast von 10 t Einsenkungen, die an drei verschiedenen Stellen zu 2,0, 2,5 und 4,0 mm beobachtet wurden. An diesen drei Stellen werden nachher Lasten von 8, 12 und 6 t aufgebracht. Um wieviel senkt sich jene Stelle, die vorher als Angriffspunkt der Einzellast von 10 t gedient hatte?

Lösung. Stillschweigend ist vorausgesetzt, dass die Formänderung vollkommen elastisch ist. Nach dem Maxwell'schen Satze ist die gesuchte Durchbiegung

$$y = 8 \cdot 0{,}2 + 12 \cdot 0{,}25 + 6 \cdot 0{,}4 = 7{,}0 \text{ mm}.$$

Fünfter Abschnitt.

Stäbe mit gekrümmter Mittellinie.

---

§ 31. Grundlegende Annahmen und darüber bestehende Meinungsunterschiede.

Vor der Formänderung soll die Mittellinie des Stabes eine ebene Curve gewesen sein und die Richtungen der Kräfte, die an dem Stabe angreifen, mögen alle in der Ebene dieser Curve enthalten sein. Ausserdem soll diese Ebene jeden Querschnitt nach einer Hauptaxe schneiden. Dann liegt kein Grund zu einem Heraustreten der Stabaxe aus der Ebene während der Formänderung vor; die Mittellinie bleibt also auch nach der Biegung noch eine ebene Curve.

Auf die Untersuchung des hiermit umschriebenen einfachen Falles pflegt man sich in der technischen Mechanik stets zu beschränken, weil andere Fälle bei den praktischen Anwendungen kaum in Betracht kommen. Ich werde mir diese Beschränkung hier auch auferlegen und bemerke dazu, dass die Behandlung des allgemeineren Falles zwar zu verwickelteren Rechnungen führt, im Uebrigen aber sich ganz eng an die hier vorzutragende Untersuchung anschliesst. Wesentlich ist, wenn man eine Erweiterung nach dieser Richtung hin vornehmen will, namentlich die Bemerkung, dass die Stabmittellinie auch dann in eine doppelt gekrümmte Curve übergeht, wenn zwar die Kräfte immer noch alle in der Ebene der ursprünglichen Gestalt der Mittellinie enthalten sind, die Querschnittshauptaxen aber eine schiefe Lage zu dieser Ebene haben.

Wenn man sich der beim geraden Stabe für diesen Fall durchgeführten Betrachtungen erinnert, wird dies ohne Weiteres verständlich.

Für den Augenblick soll jetzt ferner noch vorausgesetzt werden, dass der Krümmungshalbmesser ϱ der Stabmittellinie im ursprünglichen Zustande überall sehr gross gegen die Querschnittsabmessungen sei. Es handelt sich darum, zu berechnen, in welchen Werth ϱ' der Krümmungshalbmesser ϱ an einer bestimmten Stelle übergeht, wenn für diese Stelle das Biegungsmoment M, die axiale Belastung N und die Schubkraft gegeben sind. Man erkennt zunächst, dass die Schubkraft hierbei unberücksichtigt bleiben kann, da eine geringe Verschiebung des einen Querschnitts parallel zu dem benachbarten keine merkliche Aenderung des Krümmungshalbmessers zur Folge haben kann. Eine gleichmässig über den Querschnitt vertheilte Normalspannung wird zwar den Winkel zwischen den aufeinander folgenden Querschnitten etwas ändern, der Krümmungshalbmesser wird aber davon ebenfalls nicht berührt. Denn jede Faser des Stabelements verkürzt oder verlängert sich proportional zu ihrer ursprünglichen Länge und nach der Formänderung schneiden sich die beiden aufeinander folgenden Querschnitte daher immer noch an derselben Stelle wie vorher. Uebrigens ist auch jene elastische Winkeländerung $\Delta d\varphi$ immer nur sehr klein im Verhältniss zur ursprünglichen Grösse $d\varphi$ des Winkels, denn man hat dafür

$$\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\sigma}{E}, \tag{110}$$

wobei Δds die elastische Längenänderung irgend einer Faser ds des Balkenelementes bezeichnet. In den praktisch vorkommenden Fällen ist das Verhältniss $\frac{\sigma}{E}$ höchstens etwa gleich $\frac{1}{2000}$, also auch $\Delta d\varphi$ unerheblich gegen $d\varphi$. Die durch die Momente hervorgebrachten Winkeländerungen sind im Allgemeinen weit grösser.

Bei der Berechnung von ϱ' brauchen wir also nur auf das Biegungsmoment M zu achten und selbst für die Berech-

nung von $\Delta d\varphi$ genügt dies in den meisten Fällen. Aus den weiteren Entwickelungen wird hervorgehen, in welchen Fällen es nöthig ist, auch den Einfluss von N auf $\Delta d\varphi$ zu berücksichtigen.

Wir können jetzt zur Berechnung von ϱ' von dem Kunstgriffe Gebrauch machen, uns den Stab als einen ursprünglich geraden vorzustellen, der durch ein fingirtes Biegungsmoment M_f zuerst zum Krümmungsradius ϱ und dann noch weiter durch das wirklich vorhandene Biegungsmoment M zum Krümmungsradius ϱ' gebogen wurde. Natürlich müssen wir dabei annehmen, dass diese ganze Biegung vorgenommen werden kann, ohne dass die Proportionalitätsgrenze überschritten wird. Diese Annahme ist indessen nicht bedenklich, so lange nur bei der Verbiegung von ϱ zu ϱ' keine Abweichung von dem Proportionalitätsgesetze vorkommt und so lange die Längen ds der einzelnen Fasern zwischen zwei aufeinander folgenden Querschnitten von vornherein nur wenig voneinander verschieden waren. Denn der Stab muss sich bei der wirklich mit ihm vorgenommenen Biegung dann ebenso verhalten, wie der andere ursprünglich gerade, den wir an seine Stellung setzen wollten und von dem wir immer voraussetzen können, dass die Proportionalitätsgrenze des Materials, aus dem er besteht, entsprechend hoch liegt, um ihn ohne deren Ueberschreitung sowohl zum Krümmungshalbmesser ϱ als zu ϱ' biegen zu können.

Durch diese Bemerkung wird die Aufgabe der Berechnung von ϱ' auf die in § 23 gelöste zurückgeführt. Die Anwendung von Gl. (77) auf die Belastungszustände M_f und $M_f + M$ liefert

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M_f}{E\Theta} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\varrho'} = \frac{M_f + M}{E\Theta}.$$

Durch Elimination der Hülfsgrösse M_f aus beiden Gleichungen erhalten wir die gesuchte Beziehung

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E\Theta}. \tag{111}$$

Auch die durch das Biegungsmoment M bewirkte Verdrehung $\Delta d\varphi$ der beiden Querschnitte gegeneinander folgt auf demselben Wege aus Gl. (76) zu

$$\Delta d\varphi = ds \frac{M}{E\Theta}, \tag{112}$$

wenn unter ds der Abstand beider Querschnitte, längs der neutralen Faser gemessen, verstanden wird.

Wir haben ferner hier ebenso viel Grund als beim ursprünglich geraden Stabe zu der Vermuthung, dass die Spannungsvertheilung mindestens näherungsweise dem Gradliniengesetze entspricht und können daher die Formeln für die Spannungen, die durch die äusseren Kräfte hervorgerufen werden, ohne jede Aenderung aus den früheren Betrachtungen über die Biegung des graden Stabes übernehmen.

Alle diese Folgerungen werden indessen hinfällig, oder mindestens zweifelhaft, wenn die Voraussetzung nicht erfüllt ist, dass der ursprüngliche Krümmungsradius ϱ überall gross gegen die Querschnittsabmessungen gewesen sei. Denn in diesem Falle sind die Längen ds der in verschiedenen Entfernungen vom Krümmungsmittelpunkte liegenden Fasern erheblich verschieden voneinander und die Längenänderungen Δds sind daher nicht mehr ausschliesslich dem zugehörigen Werthe von σ proportional, sondern hängen ausserdem auch von der Lage der Faser im Querschnitte ab.

Dieser Umstand hat zur Folge, dass die beiden grundlegenden Annahmen, von denen wir bei der Berechnung der Spannungen in § 13 ausgingen und die sich dort als gleichbedeutend miteinander erwiesen, hier zu einem Widerspruche führen. Die Bernouilli'sche Annahme, dass die Querschnitte bei der Formänderung eben blieben und die andere Annahme, dass die Spannungsvertheilung über den Querschnitt das einfachste Gesetz, nämlich das Gradliniengesetz befolge, lassen sich beim Stabe mit gekrümmter Mittellinie nicht nebeneinander aufrecht erhalten. Man muss also eine von beiden fallen lassen. Es fragt sich nun, an welcher von beiden man festhalten soll. Leider ist diese Frage noch nicht endgültig ent-

schieden; es bedarf dazu noch weiterer Versuche, die sowohl von mir als auch von anderer Seite, wie mir mitgetheilt wurde, in Aussicht genommen sind.

Früher hat man sich meistens für die Annahme entschieden, dass die Spannungsvertheilung nach dem Gradliniengesetze erfolge. Später ging aber die überwiegende Mehrzahl der litterarisch thätigen Techniker zu der Bernouilli'schen Annahme über. Die Rechnungen wurden dadurch erheblich verwickelter; man glaubte aber die damit verbundene grössere Mühe nicht scheuen zu dürfen, weil man meinte, damit genauere Resultate zu erhalten. Vor einiger Zeit habe ich indessen darauf hingewiesen, dass die Erfahrungen bei den Festigkeitsversuchen durchaus nicht dafür sprechen, dass dies wirklich der Fall sei. Die allerdings nicht sehr zahlreichen Ergebnisse von Festigkeitsproben, die mit Stäben von gekrümmter Mittellinie bisher angestellt und veröffentlicht worden sind, stimmen vielmehr weit besser mit der anderen Annahme überein, dass sich die Spannungen ungefähr nach dem Gradliniengesetz vertheilen. Wenn nun auch noch nicht unbedingt feststeht, dass diese Annahme in allen Fällen der Wirklichkeit besser entspricht, so liegt doch im Augenblicke gar kein Grund vor, verwickelte Rechnungen vorzunehmen, deren wahrscheinliche Genauigkeit auf Grund der bisher bekannten Erfahrungsthatsachen geringer zu schätzen ist, als die von ganz einfachen Formeln. Ich werde daher in diesem Buche, wie schon früher in einer Abhandlung, die ich darüber veröffentlichte und die bisher von keiner Seite einen öffentlichen Widerspruch erfuhr, an der Annahme des Gradliniengesetzes festhalten, obschon die neueren (aber schon vor meiner Abhandlung erschienenen) Schriften über Festigkeitslehre sich einmüthig für die Bernouilli'sche Annahme entschieden haben.

Aus diesem Sachverhalte lässt sich übrigens eine wichtige Lehre allgemeiner Art ziehen. Er zeigt uns nämlich — und dieselbe Erscheinung hat sich nur zu oft in anderen Gebieten der Wissenschaft wiederholt — wie eine an sich ganz willkürliche Hypothese (nämlich die Bernouilli'sche), nachdem

sie sich auf einem bestimmten engeren Gebiete (nämlich bei der Biegung des geraden Stabes) recht gut bewährt hat, nachher unbedenklich als streng richtig und als unbedingt anwendbar auch auf andere Fälle angesehen wird, ohne dass man sich irgend welche Sorge darum machte, ob man damit auf dem Boden der Thatsachen bliebe. In der That hat die Bernouilli'sche Annahme lange Zeit hindurch in den Schriften über technische Mechanik fast die Rolle eines geometrischen Axioms gespielt und ich glaube fast, dass es auch heute noch von der Mehrzahl der Techniker damit so gehalten wird. Das ist aber ein ganz verfehlter Standpunkt. Es lässt sich gewiss nichts dagegen einwenden, wenn man den Versuch macht, eine solche Hypothese auch noch in einem allgemeineren Falle der Entwickelung zu Grunde zu legen. Man muss sich dann nur dessen bewusst bleiben, dass erst der Ausfall des Versuches, d. h. die Prüfung der abgeleiteten Formeln an der Hand der Erfahrung zeigen kann, ob man auf dem rechten Wege war. Die Gültigkeit der Rechnung in solchen Fällen a priori anzunehmen, ist ein durchaus unwissenschaftliches Vorgehen, vor dem man sich wohl hüten muss. Die Sucht, zu rechnen um jeden Preis, die Ueberschätzung der Rechnung (und auch der graphischen Methoden) überhaupt im Gegensatze zu den Ueberlegungen des gesunden Menschenverstandes, denen sie doch nur als eine Gehülfin zur Seite stehen darf, führen nur zu leicht auf solche Irrwege.

Ich werde zunächst zeigen, inwiefern die beiden gegeneinander abgewogenen Annahmen zu verschiedenen Ergebnissen führen. In Abb. 43 ist ein zwischen zwei aufeinander folgenden Querschnitten liegendes Stabelement dargestellt. Es sei angenommen, dass die Querschnitte bei der Formänderung, die durch ein Biegungsmoment bewirkt sein möge, eben bleiben. Mit NN ist die Lage der neutralen Faserschicht bezeichnet. Der Punkt O gelangt durch die Formänderung nach O'. Für die ur-

Abb. 43.

sprüngliche Länge ds irgend einer Faser im Abstande y von NN hat man

$$ds = (r + y)\,d\varphi,$$

wenn r den Abstand von O bis NN angibt. Die zugehörige Längenänderung Δds ist

$$\Delta ds = y\,\Delta d\varphi$$

und der Vergleich beider Ausdrücke liefert

$$\sigma = E\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{y}{r+y}\,E\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}. \tag{113}$$

In der That ist also σ keine lineare Function von y. Wenn man die Abhängigkeit der Spannung von y durch eine Curve veranschaulicht, erhält man vielmehr einen Hyperbelbogen.

Da der betrachtete Spannungszustand einem Biegungsmomente entsprechen sollte, muss $\int \sigma\,dF = 0$ sein und dies liefert für die Ermittelung der Lage der neutralen Faser nach Einsetzen von σ aus Gl. (113) die Bedingungsgleichung

$$\int \frac{y}{r+y}\,dF = 0. \tag{114}$$

Damit ist gezeigt, dass die Nulllinie nach der Bernouillischen Annahme nicht durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehen würde. Wenn die Gestalt des Querschnitts gegeben ist, kann der Abstand vom Schwerpunkte mit Hülfe von Gl. (114) berechnet werden, wie bei Behandlung eines Beispieles in Aufg. 26 gezeigt werden wird. Sobald auf diese Weise r ermittelt ist, erhält man die Spannungen auf Grund des Momentensatzes, also auf Grund der Gleichung

$$\int y\sigma\,dF = M,$$

die nach Einsetzen von σ aus Gl. (113) übergeht in

$$E\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\int \frac{y^2}{r+y}\,dF = M.$$

Wenn y im ganzen Querschnitte klein wäre gegen r, würde das Integral in das Trägheitsmoment Θ des Querschnitts, getheilt durch r übergehen. Wenn diese Annäherung nicht als genau genug angesehen wird, kann man sich auch wohl damit helfen, den Ausdruck unter dem Integralzeichen in eine Reihe

zu entwickeln, von der man so viele Glieder berücksichtigt, als es gerade nöthig erscheint. Man hat dann

$$\int \frac{y^2}{r+y}\, dF = \frac{1}{r}\left[\int y^2\, dF - \frac{1}{r}\int y^3\, dF + \frac{1}{r^2}\int y^4\, dF - \cdots\right]$$

Zur Abkürzung wollen wir für den Klammerausdruck Θ' schreiben, da er in der Regel nur um eine kleine Correctionsgrösse von Θ abweicht. Setzt man dies in die vorige Gleichung ein, so wird

$$E\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{Mr}{\Theta'}$$

und damit geht schliesslich Gl. (113) über in

$$\sigma = \frac{ry}{r+y}\,\frac{M}{\Theta'}. \qquad (115)$$

Wenn y überall klein gegen r ist, geht die Formel in die früher für den geraden Stab abgeleitete über. In anderen Fällen kann die Abweichung aber sehr erheblich werden. Das trifft namentlich bei Berechnung der Haken zu. — Für die in der Praxis gewöhnlich vorkommenden Formen der Zughaken beträgt der Unterschied zwischen den Resultaten beider Formeln bis zu etwa 30%. Er ist also in diesem Falle so erheblich, dass es nicht zulässig wäre, Gl. (115) durch die auf der Annahme des Gradliniengesetzes für die Spannungsvertheilung beruhende Formel

$$\sigma = \frac{M}{\Theta}y \qquad (116)$$

zu ersetzen, wenn man irgend eine gegründete Vermuthung dafür hätte, dass Gl. (115) die genauere wäre. In der That sprechen aber, wie ich schon erwähnte, die seither angestellten Festigkeitsversuche weit eher für die Richtigkeit der einfachen Gleichung (116) als für Gl. (115) und ich werde daher auf diese weiterhin keine Rücksicht mehr nehmen.

Mit der Wahl des durch Gl. (116) ausgesprochenen Gradliniengesetzes ist natürlich umgekehrt die Folgerung verbunden, dass die Querschnitte auch dann, wenn nur ein Biegungsmoment und keine Schubkraft auftritt, etwas gekrümmt werden. Unter diesen Umständen muss man sich darüber einigen, was

unter der elastischen Aenderung $\Delta d\varphi$ des Winkels zwischen zwei Querschnitten verstanden werden soll. Ich werde darunter die Aenderung des Winkels zwischen den aufeinander folgenden Tangenten der Stabmittellinie verstehen. Dann kann Gl. (112) zur Berechnung von $\Delta d\varphi$ angewendet werden, wenn man unter ds das Längenelement der Mittellinie versteht.

Bei den praktischen Anwendungen sind glücklicherweise die Krümmungsradien gewöhnlich ziemlich gross gegen die Querschnittsabmessungen, so dass es ziemlich gleichgültig ist, ob man Gl. (116) oder die verwickeltere Formel (115) anwendet, namentlich mit Rücksicht darauf, dass die Festigkeitsberechnungen immer nur als Annäherungsrechnungen aufzufassen sind, bei denen es auf einige Procente mehr oder weniger im Schlussresultate nicht ankommt.

§ 32. Der Bogen mit zwei Gelenken.

Ein Stab von gekrümmter Mittellinie stütze sich an beiden Enden auf zwei Zapfen, um die er sich frei drehen kann. Es handelt sich um die Berechnung der Auflagerkräfte, die von diesen Zapfen aufgenommen werden, wenn beliebig gegebene Lasten an dem Stabe angreifen. Die Aufgabe ist einfach statisch unbestimmt, da jeder Auflagerdruck erst durch zwei Componenten völlig bestimmt ist, während die Statik starrer Körper nur drei Gleichgewichtsbedingungen zur Verfügung stellt.

Die Zapfen, auf die sich der Bogen stützt, bezeichnet man als Gelenke; bei der Berechnung treten sie nur als Punkte auf, unter denen man sich die Zapfenmittelpunkte zu denken hat. Der Bogen mit zwei Gelenken kommt in der Praxis namentlich als Brückenträger vor (heute freilich seltener als früher, da man jetzt den Fachwerkträgern vor den vollwandigen Constructionen den Vorzug zu geben pflegt). Da er nur auf Grund der Elasticitätstheorie berechnet werden kann, wird er auch häufig als „elastischer Bogenträger“ bezeichnet. Abb. 44 [illegible]05) zeigt die übliche Anordnung: beide Gelenke liegen in [illegible]er Höhe und der Bogen nimmt nur senkrecht gerichtete

Lasten auf. Die senkrechten Componenten beider Auflagerkräfte können in diesem Falle ohne Weiteres mit Hülfe von Momentengleichungen für die Gelenke als Momentenpunkte berechnet werden; sie sind ebenso gross als die Auflagerkräfte eines Balkens, der die selben Lasten trägt. Dazu tritt aber noch die

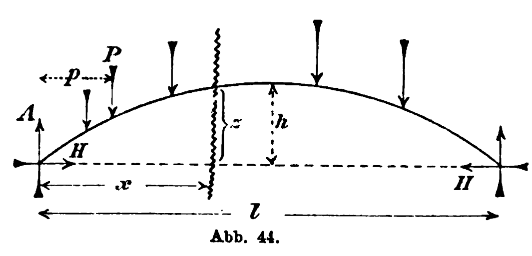


Abb. 44.

Horizontalcomponente jedes Auflagerdrucks, von der man nach den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nur aussagen kann, dass sie an beiden Gelenken gleich gross, aber entgegengesetzt gerichtet sein muss. Die Grösse dieser Horizontalcomponente bezeichnet man als den Horizontalschub H des Bogens; dieser bildet die statisch unbestimmte Grösse, auf deren Ermittelung es vor allen Dingen ankommt. Denn man sieht ein, dass die Biegungsmomente, die Schub- und die Normalkräfte für alle Querschnitte und daher auch die Spannungen an allen Stellen sofort angegeben werden können, wenn H bekannt ist. Wir können uns daher hier darauf beschränken, die Berechnung von H auseinander zu setzen.

Diese Aufgabe soll zunächst auf Grund des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit gelöst werden. Wenn die zur Abscisse x gehörige Ordinate der Stabmittellinie mit z bezeichnet wird, hat man für das Biegungsmoment im Querschnitte x

$$M = M_b - Hz. \tag{117}$$

Hierbei ist das Biegungsmoment, das ein Balkenträger bei derselben Belastung im Querschnitte x aufzunehmen hätte, zur Abkürzung mit M_b bezeichnet, d. h. M_b ist ein Ausdruck von der Form

$$M_b = Ax - \sum_0^x P(x-p),$$

also bei gegebenen Lasten eine bekannte Grösse. Die dem Biegungsmomente M im Bogenelemente entsprechende Form-

änderungsarbeit kann nach Gl. (87) berechnet werden, wenn man darin dx durch ds ersetzt, denn für die Verdrehung der benachbarten Querschnitte gegeneinander gilt beim Bogen dieselbe Formel wie beim graden Stabe. Vernachlässigt man neben dieser Formänderungsarbeit die durch die axiale Belastung N und die durch die Schubkraft hervorgerufene, so wird für den ganzen Bogen

$$A = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{E\Theta} ds = \frac{1}{2}\int \frac{(M_b - Hz)^2}{E\Theta} ds, \tag{118}$$

worin die Integration über die ganze Bogenlänge auszudehnen ist.

Wir bilden den Differentialquotienten dieses Ausdrucks nach der statisch unbestimmten Grösse H und setzen ihn gleich Null. Dies liefert

$$\frac{\partial A}{\partial H} = -\int \frac{M_b - Hz}{E\Theta} z\, ds = -\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds + H\int \frac{z^2}{E\Theta} ds = 0,$$

und durch Auflösen der Gleichung nach der Unbekannten H finden wir

$$H = \frac{\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds}. \tag{119}$$

Der Elasticitätsmodul E kann fast in allen Fällen, die überhaupt vorkommen, als constant über die ganze Bogenlänge angesehen werden. Für den besonderen Fall, dass ausserdem auch das Trägheitsmoment des Querschnitts überall dieselbe Grösse hat, vereinfacht sich Gl. (119) zu

$$H = \frac{\int M_b z\, ds}{\int z^2 ds}. \tag{120}$$

Die Integrale in diesen Formeln können immer ohne Schwierigkeit berechnet werden, sei es durch gewöhnliche Integration, sei es durch eine mechanische Quadratur. Im Wesentlichen ist also die Aufgabe hiermit als gelöst zu betrachten.

Wir wollen diese Formeln jetzt auf ein einfaches Beispiel anwenden. Die Bogenmittellinie sei ein Parabelbogen, dessen Axe die Spannweite senkrecht halbirt und die Belastung sei über die ganze Spannweite gleichförmig vertheilt, d. h. so,

dass zu Bogenabschnitten von gleicher Horizontalprojection gleiche Lasten gehören. Dieser Fall hat übrigens eine allgemeinere Bedeutung, als es nach dem Wortlaute der Aufstellung scheinen könnte. Jeder flache Bogen von symmetrischer Gestalt kommt nämlich dem Parabelbogen nahe, z. B. auch ein flacher Kreisbogen. Näherungsweise kann daher jeder flache Bogen als ein Parabelbogen aufgefasst werden und man macht davon bei solchen Berechnungen mit Vorliebe Gebrauch, weil sich die Ausführung der Rechnung beim Parabelbogen am einfachsten gestaltet.

Bei gleichförmiger Belastung ist das Biegungsmoment M_b eines Balkens im Abstande x vom linken Auflager

$$M_b = \frac{ql}{2}x - \frac{qx^2}{2}$$

und die Momentenfläche ist selbst eine Parabel, die bei geeigneter Wahl des Maassstabes, in dem M_b aufgetragen wird, zum Zusammenfallen mit der Bogenmittellinie gebracht werden kann. In der Mitte geht M_b in $\frac{ql^2}{8}$ und z in die Pfeilhöhe h des Bogens über, daher kann auch überall

$$M_b = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{z}{h}$$

gesetzt werden. Führt man dies in Gl. (120) ein, so erhält man

$$H = \frac{ql^2}{8h}. \tag{121}$$

da sich der Nenner gegen den ihm gleichen Factor des Zählers weghebt.

Mit diesen Werthen von M_b und H wird die Formänderungsarbeit A, wie aus Gl. (118) hervorgeht, zu Null. Wenn überhaupt der Werth Null für die Formänderungsarbeit bei passender Wahl der statisch unbestimmten Grösse möglich ist, entspricht er immer einem Minimum, da A niemals negativ werden kann. Wir hätten daher auch schon auf Grund dieser einfachen Ueberlegung den Werth von H bestimmen können. Zugleich werden wir aber hierdurch aufmerksam darauf, dass die Gl. (120) oder (119) nicht den genauen Werth von H

liefern können, denn in der That wird eine kleine Formänderung beim Aufbringen von Lasten auf einen elastischen Körper immer eintreten und es wird also A nicht genau gleich Null sein können.

Der Grund für diesen Widerspruch liegt darin, dass wir bei der Berechnung von A nur auf die Arbeitsleistung durch die Biegungsmomente Rücksicht genommen haben. Um zu genaueren Resultaten zu gelangen, muss vor Allem auf die Arbeitsleistung der Normalkraft N Rücksicht genommen werden. Die Arbeit der Schubspannungen kann dagegen, wenn man auf Kleinigkeiten nicht zu achten braucht, immer noch vernachlässigt werden, und zwar mit viel grösserem Recht als beim Balkenträger, weil beim Bogen die Schubkräfte an sich viel geringer ausfallen als beim Balken. Wenn man will, kann man indessen auch dieses Glied, gerade so wie es früher beim Balken gezeigt wurde, in Ansatz bringen; da es praktisch ganz bedeutungslos ist, sehe ich aber hier davon ab.

Eine über den Querschnitt F gleichförmig vertheilte Normalspannung σ von der Grösse

$$\sigma = \frac{N}{F}$$

leistet beim Zusammendrücken des Bogenelementes ds eine Arbeit, die auf die Volumeneinheit bezogen nach Gl. (41)

$$\mathsf{A} = \frac{\sigma^2}{2E}$$

gesetzt werden kann. Multiplicirt man dies mit dem Volumen Fds des Bogenelementes, so findet man

$$dA = \frac{\sigma^2 F}{2E} ds = \frac{N^2}{2EF} ds.$$

Nachdem diese Formänderung vollzogen ist, denken wir uns das Biegungsmoment zur Wirksamkeit gebracht. Dabei dreht sich der eine Querschnitt relativ zum andern und zwar nach der von mir zu Grunde gelegten Annahme über die Spannungsvertheilung um eine durch den Schwerpunkt gehende Axe. Dabei verschieben sich auch die Angriffspunkte der schon

vorher angebrachten Normalspannungen $\sigma = \frac{N}{F}$ von Neuem und wir müssen zunächst berechnen, wie gross die bei dieser Drehung von ihnen geleistete Arbeit ist. Für ein Flächenelement dF im Abstande y von der Schwerlinie ist die Verschiebung des Angriffspunktes der an ihm von Anfang an wirkenden Normalspannung gleich

$$y \Delta d\varphi$$

und die gesammte Arbeitsleistung dieser Normalspannungen daher gleich

$$\int \sigma dF y \Delta d\varphi = \frac{N \Delta d\varphi}{F} \int y dF.$$

Nach der Eigenschaft der Schwerlinien ist aber das letzte Integral gleich Null. Im Ganzen genommen leisten daher die schon vorher in gleichförmiger Vertheilung aufgebrachten Normalspannungen während der Drehung keine Arbeit; es bleiben also nur die Arbeitsleistungen der durch das Biegungsmoment selbst hervorgerufenen Normalspannungen bei dieser Bewegung übrig und diese sind ebenso gross, als wenn zu Beginn ihres Auftretens das Trägerelement spannungslos gewesen wäre.

Auch umgekehrt könnte man zeigen, dass die vom Biegungsmoment für sich hervorgerufenen Spannungen keine Arbeit mehr leisten, wenn nach ihnen die Normalkraft N angebracht wird. Jedenfalls kann also die durch das Zusammenwirken von M und N geleistete Formänderungsarbeit gleich der Summe der beiden Ausdrücke gesetzt werden, die für M und N für sich gefunden wurden. An Stelle von Gl. (118) schreiben wir daher jetzt

$$A = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{E\Theta} ds + \frac{1}{2} \int \frac{N^2}{EF} ds.$$

Wenn wir jetzt dieselbe Rechnung wiederholen, die zu Gl. (119) führte, erhalten wir

$$\frac{\partial A}{\partial H} = -\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds + H \int \frac{z^2}{E\Theta} ds + \int \frac{N}{EF} \cdot \frac{\partial N}{\partial H} ds = 0.$$

Hier ist noch N als Function von H auszudrücken, was leicht geschehen kann. Um langwierige Formeln zu vermeiden, von denen man später doch keinen Gebrauch macht, weise ich darauf hin, dass bei einem sehr flachen Bogen, für den diese Rechnung hauptsächlich von Wichtigkeit ist, weil bei ihm der Horizontalschub H und daher N besonders gross ausfällt, nahezu $N = H$ gesetzt werden kann. Mit dieser Vereinfachung erhält man

$$\frac{\partial N}{\partial H} = 1$$

und die Auflösung der vorigen Gleichung liefert

$$H = \frac{\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds + \int \frac{ds}{EF}}. \tag{122}$$

Wenn neben E auch Θ und F als constant angesehen werden können, vereinfacht sich dies noch weiter zu

$$H = \frac{\int M_b z\, ds}{\int (z^2 + t^2)\, ds}. \tag{123}$$

Unter t ist der Trägheitshalbmesser des Querschnitts, unter t^2 also $\frac{\Theta}{F}$ zu verstehen. Der Vergleich dieser Formel mit Gl. (120) zeigt uns nun auch, welchen Einfluss die Berücksichtigung der Normalspannungen neben den Biegungsmomenten auf den Werth von H ausübt. So lange t klein gegen den Durchschnittswerth der Ordinaten z ist, unterscheiden sich die beiden Werthe von H nach (120) und nach (123) nur unerheblich voneinander. Dieser Fall liegt gewöhnlich vor und man kann dann unbedenklich die einfachere Formel zur Berechnung des Horizontalschubs verwenden.

§ 33. **Zweites Verfahren zur Berechnung des Horizontalschubs.**

Die Wichtigkeit dieser Untersuchungen für die praktischen Anwendungen macht es wünschenswerth, noch einen zweiten, von dem vorigen völlig verschiedenen Weg zur Lösung derselben Aufgabe zu kennen.

Ich denke mir den Bogen platt auf den Boden gelegt, das linke Ende festgehalten und ein Element von der Länge ds zum neuen Krümmungsradius verbogen, während alle übrigen Theile des Bogens inzwischen ihre Gestalt behalten sollen. Der rechte Theil des Bogens dreht sich dann gegen den festgehaltenen linken um den Winkel $\Delta d\varphi$ und jeder zu ihm gehörige Punkt beschreibt einen kleinen Kreisbogen von diesem Centriwinkel um den Mittelpunkt von ds. Der Radius des Kreisbogens, den das erste Bogenende beschreibt,

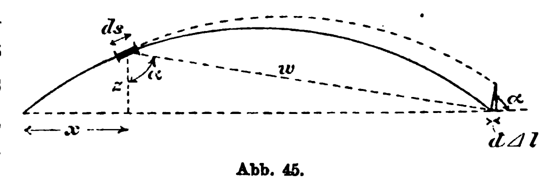


Abb. 45.

ist in Abb. 45, in der die neue Lage des rechten Bogenstücks durch eine punktirte Linie (natürlich sehr stark übertrieben) eingetragen ist, mit w bezeichnet. Die Länge des Kreisbogens ist daher gleich $w \Delta d\varphi$ zu setzen. Um nun zu erkennen, um wie viel sich die Sehne des ganzen Bogens durch die an ds vorgenommene Verbiegung vergrössert hat, denke ich mir nachträglich den ganzen Bogen ohne Formänderung um den linken Endpunkt so lange gedreht, bis der rechte Endpunkt wieder auf die frühere horizontale Linie fällt. Die beiden nacheinander erfolgten kleinen Wege des rechten Endpunktes bilden die Hypotenuse und die eine Kathete eines unendlich kleinen Dreiecks, dessen zweite Kathete die gesuchte Sehnenverlängerung $d\Delta l$ angibt. In diesem Dreieck ist ein Winkel gleich dem Winkel α, den der Radius w mit der vertikalen Richtung einschliesst. Man hat also

$$d\Delta l = w \Delta d\varphi \cos\alpha = z \Delta d\varphi.$$

Dieselbe Betrachtung gilt auch für die Verbiegung jedes anderen Bogenelementes und die dabei auftretenden Aenderungen der Bogensehne oder der Spannweite l addiren sich zu einander algebraisch. Die ganze elastische Spannweitenänderung ist daher

$$\Delta l = \int z \Delta d\varphi = \int \frac{Mz}{E\Theta} ds. \tag{124}$$

Hierbei ist nur der Einfluss der Biegungsmomente berücksichtigt. Als verhältnissmässig unbedeutendes Correctionsglied kann man nachträglich noch die durch die Normalkräfte N bewirkte Spannweitenänderung hinzufügen. Bei flachen Bögen genügt es, diese etwa gleich

$$\frac{lH}{EF}$$

zu setzen. Dieses Glied ist natürlich negativ, da ein Horizontalschub den Bogen verkürzt; dagegen ist Δl in Gl. (124) positiv, wenn M positiv ist, denn ein Biegungsmoment, das wir positiv nehmen, biegt einen Balken nach unten hin convex und vermindert bei dem Bogen die ursprüngliche Krümmung, streckt also den Bogen grad und vergrössert dabei die Bogensehne.

Bei den Formänderungen, die der Bogen in Wirklichkeit ausführt, bleibt die Spannweite unverändert; wir haben also dafür die Bedingungsgleichung

$$\int \frac{Mz}{E\Theta}\, ds - \frac{lH}{EF} = 0.$$

Setzt man hier noch den Werth von M aus Gl. (117) ein und löst nach H auf, so wird man wieder auf die früheren Formeln für H geführt, nämlich auf Gl. (119), wenn man das zweite Glied vernachlässigt, oder mit dessen Berücksichtigung auf Gl. (122). Dass hier die Spannweite l an Stelle der Bogenlänge $\int ds$ steht, kommt nur von der willkürlichen, hier etwas abweichenden Schätzung des Correctionsgliedes her, auf die es nicht ankommt.

Man kann die Sache auch so auffassen, dass der Bogen zuerst am rechten Ende auf ein horizontales Rollenlager gesetzt sei. Als Biegungsmoment bleibt dann nur M_b und die Bogensehne verlängert sich dabei um

$$\Delta l = \int \frac{M_b z}{E\Theta}\, ds.$$

Dann denkt man sich nachträglich eine Horizontalkraft H an dem beweglichen Auflager angebracht, die so gross gewählt

wird, dass dieses wieder um Δl zurückgeführt und der Bogen dadurch in seine definitive Gestalt gebracht wird. Die Horizontalkraft H bringt negative Biegungsmomente von der Grösse Hz hervor und zur Berechnung des dadurch bewirkten Δl kann Gl. (124) ebenfalls in der Form

$$\Delta l = -\int \frac{Hz^2}{E\Theta} ds$$

benutzt werden. Wenn es für nöthig gehalten wird, kann dazu die Verkürzung durch die axiale Belastung gefügt werden. Durch Gleichsetzen der Werthe von Δl kommt man wieder auf die früheren Resultate.

Diese Betrachtungsweise hat vor der Benutzung des Satzes von der Formänderungsarbeit den Vorzug, dass sie anschaulicher ist und einen unmittelbaren Einblick in den physikalischen Sinn gewährt, der den einzelnen in der Rechnung vorkommenden Gliedern beizulegen ist. Bei der Methode von Castigliano verfährt man mehr summarisch, man verzichtet auf einen Ueberblick über die Bedeutung der einzelnen Glieder, erlangt aber andererseits dadurch den Vortheil, dass man ganz von selbst zu dem richtigen Resultate geführt wird, ohne sich über den Vorgang in allen Einzelheiten Rechenschaft geben zu müssen. Jedes Verfahren hat also seine Vorzüge und man thut daher gut, sich mit beiden vertraut zu machen und nicht das eine einseitig vor dem anderen zu bevorzugen.

§ 34. Einfluss von Temperaturänderungen.

Bei einem statisch bestimmten Träger sind Temperaturänderungen ohne Einfluss auf die Spannungen. Denn die Auflagerkräfte können bei ihm auf Grund der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden und sie sind daher immer gleich Null, wenn keine Lasten an dem Träger angreifen, gleichgültig welche Temperaturänderungen der Träger erfahren mag. Beim Fehlen aller äusseren Kräfte müssen daher auch innerhalb jedes Querschnitts alle etwa vorkommenden Spannungen unter sich ein Gleichgewichtssystem mit-

einander bilden und dies führt nach der Voraussetzung der linearen Spannungsvertheilung zu dem Schlusse, dass sie überall gleich Null sind.

Bei ungleichförmiger Erwärmung eines Körpers kann es freilich vorkommen, dass eine von der linearen abweichende Spannungsvertheilung auftritt und der Schluss, dass die Spannungen beim Fehlen äusserer Kräfte überall verschwinden müssten, ist dann nicht mehr zulässig. Dahin gehören auch die sogenannten Gussspannungen, die in Gussstücken vorkommen, die sich nach dem Gusse ungleichmässig abgekühlt haben, so dass einzelne Theile schon erstarrten, während andere noch flüssig waren. Unter Umständen erreichen diese Gussspannungen, ohne dass irgend eine Belastung von dem Gussstücke aufgenommen würde, eine Höhe, die bis nahe an die Festigkeitsgrenze heranreicht, so dass eine geringfügige äussere Veranlassung genügt, den Bruch herbeizuführen. Durch nochmaliges Ausglühen können sie beseitigt oder wenigstens vermindert werden; auch eine häufig wiederholte Beanspruchung wirkt, wie neuere Versuche gelehrt haben, in ähnlichem Sinne.

Von solchen Fällen soll aber hier nicht die Rede sein. Wir nehmen vielmehr an, dass der Körper im ursprünglichen Zustande frei von solchen Spannungen war und dass auch nachher seine Temperatur sich überall gleichmässig ändert und der Ausdehnungscoefficient überall dieselbe Grösse hat. Wenn keine äusseren Kräfte an dem Körper wirken, ist dann der Körper bei Wärmeschwankungen ähnlich veränderlich, d. h. in jedem Augenblicke ist seine Gestalt der ursprünglichen geometrisch ähnlich. Damit fällt auch jede Veranlassung für ein Auftreten von Spannungen fort.

Ein statisch unbestimmter Träger kann aber durch den Zwang der Auflagerbedingungen, die ihm vorgeschrieben sind, daran verhindert werden, sich gleichmässig auszudehnen. Diese Verhinderung kann nur von Auflagerkräften ausgehen, die unabhängig von der Belastung auftreten. Die statisch unbestimmten Grössen, die bei der Berechnung solcher Träger vorkommen, hängen dann nicht nur, wie bisher angenommen

wurde, von den Belastungen, sondern auch von den Temperaturschwankungen ab.

In diesem Falle befindet sich auch der Bogen mit zwei Gelenken. Wenn er erwärmt wird, kann er sich nicht geometrisch ähnlich ausdehnen, da die Bogensehne unveränderlich ist. Es wird also ein Horizontalschub entstehen, der sich der Vergrösserung der Spannweite widersetzt. Diese Auflagerkraft hat Biegungsmomente u. s. w. und damit Spannungen zur Folge, die zu den durch die Belastung hervorgerufenen hinzutreten. Diese Spannungen sind gewöhnlich so beträchtlich, dass sie bei der Festigkeitsberechnung nicht ausser Acht gelassen werden dürfen.

Zunächst muss man sich darüber klar werden, zwischen welchen Grenzen etwa Temperaturschwankungen zu erwarten sind. Bei Brückenträgern, die im Freien aufgestellt sind, nimmt man gewöhnlich an, dass die Temperatur nach oben oder unten um ungefähr 40° C. von der dem spannungslosen Zustande entsprechenden abweichen kann. Wenn der Träger statisch bestimmt wäre, würde sich, falls er aus Eisen besteht, jede Dimension um $\frac{1}{2000}$ ändern. Bei einem Bogen mit zwei Gelenken von 50 m Spannweite hätte man also mit einer Spannweitenänderung von Δl von 25 mm zu rechnen. Um diese wieder rückgängig zu machen, muss man einen Horizontalschub H anbringen, dessen Grösse aus den Untersuchungen des vorigen Paragraphen ohne Weiteres folgt. Ersetzen wir allgemein die Dehnung um $\frac{1}{2000}$ durch den Buchstaben η und berücksichtigen wir bei der durch H bewirkten Formänderung nur den Einfluss der Biegungsmomente, so folgt aus der Gleichung

$$\eta l = \int \frac{Hz^2}{E\Theta} ds$$

der durch die Temperaturänderung hervorgerufene Horizontalschub zu

$$H = \frac{\eta l}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds}. \tag{125}$$

Aehnlich ist natürlich auch der Einfluss eines etwaigen Nachgebens der Widerlager zu beurtheilen.

Uebrigens können die Werthe der durch Temperaturschwankungen hervorgerufenen statisch unbestimmten Auflagerkräfte auch nach der Methode von Castigliano leicht berechnet werden. Denkt man sich nämlich den Zwang an den Auflagerstellen, der die Uebertragung dieser statisch unbestimmten Kräfte vermittelt, beseitigt, so ist der Träger statisch bestimmt und er kann sich bei Temperaturänderungen geometrisch ähnlich verändern. Dabei wird sich der Angriffspunkt einer dieser Auflagercomponenten, die etwa mit U bezeichnet werden mag, in deren Richtung um eine Strecke u verschieben, die wie bei dem vorher betrachteten Beispiele leicht berechnet werden kann, wenn η gegeben ist. Hierauf bringe man die Lasten und die statisch unbestimmten Kräfte U an, letztere in solcher Grösse, dass die durch die vorausgehende Temperaturänderung hervorgerufenen Verschiebungen u wieder verschwinden. Nach Gl. (93) ist dann

$$\frac{\partial A}{\partial U} = - u \tag{126}$$

zu setzen. Diese Gleichung tritt hier an Stelle der Gleichung

$$\frac{\partial A}{\partial U} = 0,$$

die wir früher unter der Voraussetzung, dass keine Temperaturschwankungen vorkämen, zur Berechnung der U benutzten. Mit Gl. (126) und den entsprechenden für die übrigen statisch unbestimmten Grössen ist aber nun genau so zu verfahren, wie früher; die Auflösung liefert die Unbekannten U. Uebrigens kann unter U auch ein unbekanntes Kräftepaar (ein Einspannmoment) verstanden werden; dann bedeutet u die Winkeldrehung der Angriffsstelle, wenn der Träger statisch bestimmt gemacht wurde. Auch diese lässt sich in jedem Falle ohne Weiteres für eine gegebene Temperaturänderung ermitteln.

Diese allgemeine Betrachtung sei gleichfalls an dem Beispiele des Bogens mit zwei Gelenken näher erläutert. Es genügt, wenn wir den Horizontalschub für den Fall berechnen,

dass gar keine Lasten angreifen. Mit $U = H$ und $u = -\eta l$ schreibt sich Gl. (126)

$$\frac{\partial A}{\partial H} = \eta l.$$

Für A nehmen wir den in Gl. (118) angegebenen Werth, nachdem darin $M_b = 0$ gesetzt ist. Wir erhalten

$$\frac{\partial A}{\partial H} = H \int \frac{z^2}{E\Theta} ds = \eta l,$$

woraus für H wieder derselbe Werth wie in Gl. (125) gefunden wird.

§ 35. Der beiderseits eingespannte Bogen.

Dieser ist dreifach statisch unbestimmt: Wir wählen als Unbekannten U die vertikale Auflagercomponente B, den Horizontalschub H und das Einspannmoment M_0, alle drei für das linke Auflager. Von der Berücksichtigung des Einflusses der Normalkräfte auf die Formänderung wollen wir der Einfachheit halber absehen. Für das Biegungsmoment M im Querschnitte x erhalten wir, wenn wir im Uebrigen die früheren Bezeichnungen beibehalten,

$$M = M_0 + Bx - Hz - \sum_0^x P(x - p),$$

also z. B. für eine gleichförmige Belastung des Bogens

$$M = M_0 + Bx - Hz - \frac{qx^2}{2}.$$

Wir bilden jetzt

$$A = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{E\Theta} ds$$

und setzen die drei partiellen Differentialquotienten nach M_0, B und H gleich Null. Dies liefert

$$\frac{\partial A}{\partial M_0} = \int \frac{M}{E\Theta} \frac{\partial M}{\partial M_0} ds = \int \frac{M}{E\Theta} ds = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial B} = \int \frac{M}{E\Theta} \frac{\partial M}{\partial B} ds = \int \frac{Mx}{E\Theta} ds = 0,$$

$$\frac{\partial A}{\partial H} = \int \frac{M}{E\Theta} \frac{\partial M}{\partial H} ds = -\int \frac{Mz}{E\Theta} ds = 0.$$

Nach Einsetzen von M können diese drei Gleichungen ohne Weiteres nach den drei Unbekannten aufgelöst werden, so dass in dieser Lösung nur noch Integrale vorkommen, die mindestens auf mechanischem Wege stets leicht berechnet werden können.

Um zu untersuchen, welche Werthe von M_0, B, H einer Temperaturänderung entsprechen, beachte man, dass beim Freigeben des linken Bogenendes (falls beide Auflager in gleicher Höhe liegen) nur der Angriffspunkt von H eine Verschiebung in der Kraftrichtung erfährt. Man hat daher hierfür die drei Gleichungen

$$\int \frac{M}{E\Theta} ds = 0, \quad \int \frac{Mx}{E\Theta} ds = 0, \quad \int \frac{Mz}{E\Theta} ds = -\eta l,$$

in denen für M der Werth

$$M = M_0 + Bx - Hz$$

einzusetzen ist. Nachdem dies geschehen ist, können die drei Gleichungen wiederum leicht nach M_0, B und H aufgelöst werden.

Als beiderseits eingespannter elastischer Bogenträger ist ein Tonnengewölbe aufzufassen, das aus einem Material aufgeführt ist, von dem man annehmen kann, dass es wenigstens näherungsweise dem Hooke'schen Gesetze gehorcht. Die Lehre von den Gewölben behandle ich in der graphischen Statik und ich begnüge mich daher mit diesen kurzen Andeutungen.

§ 36. Berechnung eines Rings oder einer Röhre auf Druck oder Zug in einer Durchmesserebene.

In Abb. 46 (S. 219) ist ein Körper von ringförmiger Gestalt dargestellt, der zwischen zwei Platten in der Richtung des senkrechten Durchmessers mit der Kraft P zusammengedrückt wird. Auf diese Art wird z. B. ein zur Entwässerung in einen Strassenkörper eingelegtes Thonrohr beansprucht, wenn ein Wagen darüber wegfährt. An Stelle des Druckes kann auch ein Zug treten, ohne dass sich die Sache wesent-

lich änderte. In dieser Lage befindet sich ein Kettenglied von kreisrunder Gestalt bei einer Belastung der Kette. Alle Formänderungen und alle Spannungen sind gleich gross, aber von entgegengesetztem Wirkungssinne, als wenn der Ring mit einer ebenso grossen Kraft zusammengedrückt würde. Es genügt daher, wenn wir immer nur von diesem Falle reden; der andere ist dadurch zugleich mit erledigt.

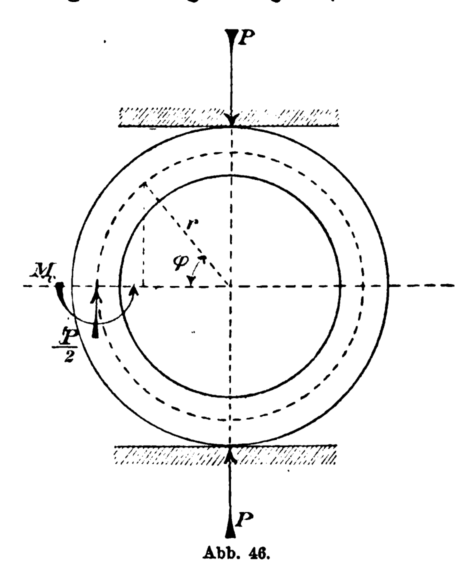


Abb. 46.

Es genügt, die Formänderung eines einzigen Quadranten zu betrachten, da die drei übrigen alle in der gleichen Lage sind; ich wähle dazu den in der Abbildung nach links oben hin gelegenen. Wenn ich diesen Quadranten aus dem ganzen Ring loslöse, muss ich an den beiden Schnittstellen äussere Kräfte anbringen, die die vorher dort übertragenen Spannungen ersetzen. In der horizontalen Schnittfläche kann ich mir alle dort übertragenen Spannungen zu einer durch den Schwerpunkt des Querschnitts gehenden Resultirenden und einem resultirenden Kräftepaare zusammengesetzt denken. Die Resultirende muss aus Symmetriegründen rechtwinklig zum Querschnitte stehen. Die untere und die obere Ringhälfte, die dort aneinander stossen, befinden sich nämlich in genau gleichen Umständen; der zwischen ihnen übertragene Druck und Gegendruck muss daher gegen die eine ebenso liegen, wie gegen die andere und das ist nur möglich, wenn der Winkel ein rechter ist. Aus dem Gleichgewichte der einen Ringhälfte für sich betrachtet, folgt ferner, dass der in jeder horizontalen Schnittfläche übertragene Druck gleich

$\frac{P}{2}$ ist. Das unbekannte Moment der Spannungen im Anfangsquerschnitte sei mit M_0 bezeichnet.

Für irgend einen Querschnitt des Quadranten, dessen Ebene mit der horizontalen Richtung den Winkel φ bildet, hat man das Biegungsmoment, also das Moment der links vom Querschnitt liegenden äusseren Kräfte, die am Quadranten wirken

$$M = M_0 + \frac{P}{2}(r - r\cos\varphi),$$

denn das Anfangsmoment M_0 behält für jeden neuen Momentenpunkt den ursprünglichen Werth. Auch die Normalkraft N für den Querschnitt φ lässt sich leicht angeben; man hat dafür

$$N = \frac{P}{2}\cos\varphi.$$

Zunächst soll aber nur auf den Einfluss der Biegungsmomente auf die Formänderung geachtet werden, da dieser, wie gewöhnlich bei solchen Aufgaben, erheblich überwiegt, so dass es in der Regel genügt, ihn bei der Durchführung der Rechnung ausschliesslich zu beachten.

Die Bedingung, der die Formänderung hier unterworfen ist, besteht darin, dass die beiden Schnittflächen des Quadranten immer senkrecht zueinander bleiben müssen. Allgemein gehört nämlich der ganze Umfang der Mittellinie zu einem Centriwinkel von 360^0 und dieser Winkel kann sich nicht ändern, so lange die Mittellinie fortfährt, eine in sich zurückkehrende Curve zu bilden, so lange also kein Bruch erfolgt. Da nun hier der Ring in vier sich ganz gleich verhaltende Quadranten zerfällt, kann sich auch der zu einem dieser Quadranten gehörige Centriwinkel nicht ändern. Die Bedingungsgleichung, die zur Ermittelung der einzigen unbekannten Grösse M_0 führt, lautet daher ganz einfach

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta d\varphi = 0.$$

Man braucht nur für $\Delta d\varphi$ seinen Werth

$$\Delta d\varphi = \frac{M\,ds}{E\Theta} = \frac{\left(M_0 + \frac{Pr}{2} - \frac{Pr}{2}\cos\varphi\right) r\,d\varphi}{E\Theta}$$

einzusetzen und zu integriren. Da E und Θ constant sind, kann man diese Factoren streichen, ebenso den constanten Factor r im Zähler; es bleibt also

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(M_0 + \frac{Pr}{2} - \frac{Pr}{2}\cos\varphi\right) d\varphi = M_0\frac{\pi}{2} + \frac{Pr\pi}{4} - \frac{Pr}{2} = 0$$

und durch Auflösen erhält man

$$M_0 = -\frac{\pi - 2}{2\pi} Pr = -0{,}182\, Pr.$$

Am Ende des horizontalen Durchmessers ist das Biegungsmoment demnach negativ, d. h. es bringt eine stärkere Krümmung hervor. Dies war auch schon auf Grund der oberflächlichsten Betrachtung zu erwarten und wir können auf Grund derselben Betrachtung des ganzen Vorgangs sofort voraussagen, dass das Moment im Scheitel positiv werden muss, also eine Verminderung der Krümmung an dieser Stelle bewirkt. Auch in Abb. 46 ist übrigens der Drehpfeil von M_0 für den betrachteten Quadranten in Voraussicht dieses Resultates schon entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne eingetragen worden.

Das andere Glied in dem Ausdrucke für M ist bei jedem weiteren Querschnitte des Quadranten positiv; demnach ist M_0 zugleich das grösste Biegungsmoment von negativem Vorzeichen. Das grösste positive Moment muss dagegen im Scheitel eintreten. Mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$ geht M, das wir dann mit $M_{\frac{\pi}{2}}$ bezeichnen, über in

$$M_{\frac{\pi}{2}} = \frac{Pr}{\pi} = 0{,}318\, Pr.$$

Im Scheitel tritt also zugleich das absolut grösste Moment und damit die grösste Beanspruchung des Materials auf. Die Spannung σ lässt sich daraus sofort berechnen. Wenn der ringförmige Körper z. B. ein Rohr von der überall gleichen Wandstärke δ und der Länge l ist, bildet der Querschnitt

ein Rechteck vom Widerstandsmomente $\frac{l\delta^2}{6}$ und für σ erhält man

$$\sigma = \frac{6Pr}{\pi l \delta^2}. \tag{127}$$

Wenn der Einfluss der Normalkraft N auf die Formänderung nicht zu vernachlässigen ist, hat man nach Gl. (110)

$$\Delta d\varphi = \frac{N}{EF} d\varphi + \frac{Mr\,d\varphi}{E\Theta}$$

oder nach Einsetzen der Werthe von N und M

$$\Delta d\varphi = \left\{\frac{P}{2EF}\cos\varphi + \frac{M_0 r}{E\Theta} + \frac{P}{2E\Theta}(r - r\cos\varphi)r\right\} d\varphi.$$

Integrirt man dies zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ und setzt das Integral gleich Null, so erhält man

$$\frac{P}{2EF} + \frac{M_0 r}{E\Theta}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{Pr^2}{2E\Theta}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{Pr^2}{2E\Theta} = 0$$

und hieraus durch Auflösen nach M_0

$$M_0 = -\left(Pr\frac{\pi - 2}{2\pi} + \frac{Pt^2}{\pi r}\right),$$

wenn man mit t den Trägheitsradius des Querschnitts bezeichnet. Speciell für den rechteckigen Querschnitt des Rohres ist $t^2 = \frac{\delta^2}{12}$ und hiermit

$$M_0 = - Pr\left(\frac{\pi - 2}{2\pi} + \frac{\delta^2}{12r^2\pi}\right).$$

Das zur Berücksichtigung des Einflusses der Normalspannungen gegen früher hinzugetretene letzte Glied der Klammer ist nur dann von merklicher Grösse, wenn die Wandstärke der Röhre ziemlich gross gegen den lichten Durchmesser ist

Für das Moment im Scheitel findet man

$$M_{\frac{\pi}{2}} = M_0 + \frac{Pr}{2} = \frac{Pr}{\pi}\left(1 - \frac{\delta^2}{12r^2}\right). \tag{128}$$

Auf das Moment im Scheitel kommt es bei der Festigkeitsberechnung an. Dieses wird etwas geringer, als wir es bei der vorausgehenden einfacheren Betrachtung fanden, d. h. das Rohr kann etwas mehr Druck aushalten, als es nach Gl. (127)

scheinen könnte. Diese Gleichung ist vielmehr ebenfalls, wenn man genauer rechnen will, durch

$$\sigma = \frac{6 Pr}{\pi l \delta^2}\left(1 - \frac{\delta^2}{12 r^2}\right). \tag{129}$$

zu ersetzen. Mit $\delta = \frac{r}{5}$ macht indessen das Correctionsglied nur $^1/_3\%$ aus und ist daher zu vernachlässigen. Erst bei ganz dickwandigen Röhren kommt es in Betracht.

Wir wollen jetzt noch berechnen, um wie viel sich der horizontale Durchmesser der Röhre bei der Belastung vergrössert. Dazu können wir uns der in § 33 für die Vergrösserung Δl der Spannweite eines Bogenträgers abgeleiteten Formeln bedienen. Nach Gl. (124) war

$$\Delta l = \int \frac{Mz}{E\Theta} ds.$$

Da l hier schon in einem anderen Sinne (als Länge des Rohrs) gebraucht ist, schreibe ich Δd für die Vergrösserung des Durchmessers d. An Stelle von M ist im linken Quadranten $M = M_0 + \frac{P}{2}(r - r\cos\varphi)$ und für z ist $z = r\sin\varphi$ zu setzen. Die Integration wird nur über den linken Quadranten ausgedehnt und dann das Doppelte des Resultats genommen, da der Quadrant rechts ebenso viel zu Δd beiträgt. Diese Spaltung des Integrals ist nöthig, weil der für M angegebene Ausdruck in dieser Form nur für den linken Quadranten gültig ist. Für Θ setze ich noch $\Theta = \frac{l\delta^3}{12}$, um die Betrachtung für ein Rohr (oder überhaupt für einen rechteckigen Querschnitt) vollständig durchzuführen. Man findet nach Ausführung der Integration

$$\Delta d = \frac{Pr^3}{E\Theta} \cdot \frac{4-\pi}{2\pi} = 1{,}639 \frac{Pr^3}{El\delta^3}. \tag{130}$$

Natürlich hätte man alle diese Berechnungen auch auf Grund des Satzes von der kleinsten Formänderungsarbeit durchführen können. Ich will hier noch zeigen, wie dieser Satz selbst noch in einem viel allgemeineren Falle zur Lösung der Auf-

gabe benutzt werden kann. Abb. 47 gibt den ringförmigen Körper unter dem Einflusse beliebig längs des Umfangs vertheilter Druckkräfte (an deren Stelle auch Zugkräfte treten können) an. Von diesen äusseren Kräften wird nur verlangt, dass sie sich an dem Ringe im Gleichgewichte halten sollen. Man soll die dadurch hervorgerufenen Spannungen berechnen.

Um die Aufgabe zu lösen, führe man irgend einen Querschnitt *mm* durch den Ring. Die in diesem Schnitte übertragenen Spannungen kann man zusammensetzen zu einer Normalkraft N_0, einer Schubkraft T_0 und einem Anfangsmomente M_0. Wenn diese drei Grössen für den Anfangsquerschnitt bekannt wären, könnte man für irgend einen anderen Querschnitt, der mit dem ersten einen Winkel φ bildet, die entsprechenden Grössen N, T, M sofort angeben und daraus liessen sich alle Spannungen berechnen. Die Aufgabe ist also dreifach statisch unbestimmt oder mit anderen Worten: der in dieser Aufgabe vorkommende Ring bildet nur einen besonderen Fall des in § 35 besprochenen beiderseits eingespannten Bogens. Die beiden Bogenenden fallen hier miteinander zusammen. In der That kann nun auch die Aufgabe, die drei Unbekannten $N_0\, T_0\, M_0$ zu berechnen, genau so gelöst werden, wie es dort gezeigt wurde. Man stellt zuerst den Ausdruck für die Formänderungsarbeit A auf, wobei es in der Regel genügen wird, nur auf den Einfluss der Biegungsmomente M zu achten. Dann setzt man die drei Differentialquotienten von A nach N_0, T_0 und M_0 gleich Null und löst diese Gleichungen nach den Unbekannten auf. Denn die Bedingung, dass der Ring im Querschnitte *mm* in Wirklichkeit zusammenhängt, kommt darauf hinaus, dass sich der Angriffspunkt von N_0 und T_0 nicht verschieben und dass sich die Angriffsstelle von

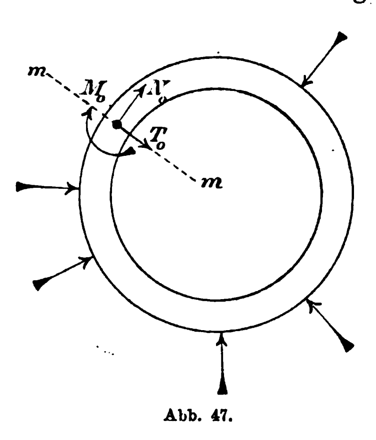


Abb. 47.

M_0 auch nicht drehen kann, wenn man sich das jenseits des Querschnitts gelegene Ende des aufgeschnittenen Rings festgehalten denkt. Diesen Verschiebungen und Drehungen sind aber die Differentialquotienten von A nach N_0 T_0 M_0 nach dem Satze von Castigliano gleich und die Differentialquotienten von A sind daher gleich Null zu setzen.

Man bemerkt hier wieder, wie der Satz von der kleinsten Formänderungsarbeit ohne vieles Nachdenken ganz mechanisch von selbst zu der richtigen Lösung führt.

Die Glieder von Ketten sind gewöhnlich von länglicher Gestalt. Wenn man die Mittellinie als eine Ellipse betrachtet, kann man die Berechnung auf ganz ähnliche Art durchführen, wie es im Eingange des Paragraphen für den kreisförmigen Ring gezeigt wurde. Bei der Ausführung der Integration kommt man aber in diesem Falle auf elliptische Integrale Es ist daher besser, wenn man in solchen Fällen zum Ersatze der Integration durch eine Summirung endlicher Theile, also zu einer mechanischen Quadratur seine Zuflucht nimmt. Abgesehen von der dadurch veranlassten etwas langwierigeren Rechnung macht die Lösung der Aufgabe aber auch in diesem Falle gar keine Schwierigkeiten von grundsätzlicher Art.

§ 37. Berechnung der ebenen Spiralfedern.

Wenn die Feder (vgl. Abb. 48) aufgezogen, d. h. wenn die in der Mitte liegende Spindel gedreht wird, während das äussere Ende der Feder festgehalten ist, verbiegt sich jedes Längenelement ds der Mittellinie zu einem kleineren Krümmungshalbmesser. Die ganze Drehung $\Delta\varphi$ der Spindel ist gleich der Summe der elastischen Winkeländerungen $\Delta d\varphi$ der aufeinander folgenden Querschnitte jedes Elementes ds. Zugleich tritt

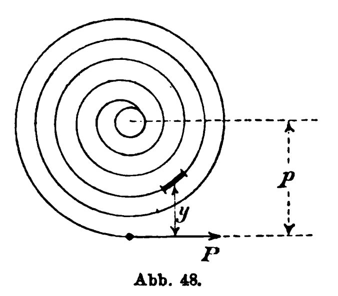


Abb. 48.

an dem äusseren Ende eine Kraft P auf, mit der die Feder an der Befestigungsstelle zurückgehalten wird. Die Richtung

dieser Kraft P ist senkrecht zu dem nach der Befestigungsstelle von der Mitte aus gezogenen Radiusvector anzunehmen, denn eine in der Richtung dieses Radiusvectors angebrachte äussere Kraft hätte eine Entfernung ihres Angriffspunktes von der Spindel zur Folge, die hier nicht möglich ist, da beide Federenden in demselben Gestelle unverschieblich gelagert sind.

Für ein Element ds, das den senkrechten Abstand y von der Richtungslinie der Kraft P hat, ist das Biegungsmoment

$$M = Py,$$

denn wenn man die Feder an dieser Stelle durchschneidet, ist P die einzige äussere Kraft, die an dem nach aussen hin gelegenen Theile angreift. Das Vorzeichen von M ist für alle Längenelemente dasselbe. Bei der in der Abbildung angenommenen Richtung von P wäre es eigentlich nach den üblichen Festsetzungen negativ zu nehmen; es genügt aber hier, wenn wir nur mit den Absolutbeträgen rechnen, da ein Zweifel über den Sinn, in dem die auftretenden Formänderungen zu nehmen sind, ganz ausgeschlossen ist. Nach Gl. (112) erhalten wir:

$$\Delta\, d\varphi = \frac{Py}{E\Theta}\, ds,$$

und wenn wir dies über die ganze Ausdehnung der Mittellinie integriren und constanten Querschnitt voraussetzen:

$$\Delta\varphi = \frac{P}{E\Theta}\int y\, ds. \tag{130^a}$$

Das hier vorkommende Integral hat übrigens eine einfache Bedeutung: es gibt das statische Moment der Mittellinie in Bezug auf die Richtungslinie der Kraft P an. Dafür können wir auch das Product aus der Länge der Mittellinie und dem Abstande des Schwerpunktes setzen. Offenbar fällt nun der Schwerpunkt der Mittellinie ziemlich genau mit der Mitte der Spindel zusammen und wir haben daher auch, wenn p die Entfernung des äusseren Federendes von der Spindelmitte angibt,

$$\Delta\varphi = \frac{Pp}{E\Theta}\, l. \tag{131}$$

Bei der Anwendung solcher Federn hat man die Absicht, mechanische Energie von einem durch die besonderen Um-

stände des Falles bedingten Betrage in Gestalt von Formänderungsarbeit aufzuspeichern. Die Berechnung der Formänderungsarbeit A ist daher hier von besonderer Wichtigkeit. Am einfachsten stellt man zu diesem Zwecke fest, wie viel mechanische Arbeit beim Aufziehen der Feder, also bei der Umdrehung der Spindel geleistet wird. Dazu beachte man, dass die an der Spindel angreifenden äusseren Kräfte mit der Kraft P am äusseren Ende ein Gleichgewichtssystem bilden müssen. Die Kräfte an der Spindel lassen sich daher zu einer Einzelkraft P, die durch die Spindelmitte geht, und einem Kräftepaare vom Momente Pp zusammensetzen. Die Einzelkraft wird von der Lagerung der Spindel aufgenommen, das Moment nur dann, wenn eine Hemmung in das auf der Spindel sitzende Sperrrad eingreift. Beim Aufziehen der Feder muss aber ein Kräftepaar M angebracht werden, das die Drehung der Spindel erzwingt. Die Arbeitsleistung eines Kräftepaars bei einer Drehung ist gleich dem Producte aus dem Momente und dem in Bogenmaass ausgedrückten Drehungswinkel. Hier ist noch der Factor $\frac{1}{2}$ beizufügen, weil es auf den Mittelwerth des Momentes während des Aufziehens ankommt. Man hat daher

$$A = \frac{1}{2} M \Delta \varphi = \frac{(Pp)^2}{2 E \Theta} l. \tag{132}$$

Dieser Ausdruck kann noch etwas umgeformt werden. Man sucht nämlich die Leistung der Feder möglichst auszunutzen, d. h. so viel Arbeit als möglich in ihr aufzuspeichern. Die Grenze dafür ist durch die zulässige Beanspruchung des Materials gegeben. Diese wählt man bei den Federn, die meistens aus bestem Stahle hergestellt werden, aus demselben Grunde gewöhnlich sehr hoch, viel höher als es der Sicherheit wegen bei anderen Constructionen zu geschehen pflegt. Jedenfalls darf man aber nicht über die Elasticitätsgrenze oder die damit in der Regel zusammenfallende Proportionalitätsgrenze des Materials gehen. Bezeichnen wir die hiernach als zulässig anzusehende grösste Biegungsspannung mit σ, so ist

$$\sigma = \frac{2Pp}{\Theta} e,$$

denn das grösste Biegungsmoment tritt in der äussersten Windung diametral gegenüber der Befestigungsstelle auf und der Hebelarm der Kraft P kann dort gleich $2p$ gesetzt werden. Mit Hülfe dieser Gleichung kann das grösste Moment Pp, das an der Spindel angreifen darf, in σ ausgedrückt und dieser Werth in Gl. (132) eingeführt werden. Man findet

$$A = \frac{\sigma^2 \Theta}{8 e^2 E} l. \tag{133}$$

Wenn der Querschnitt der Feder, der hier stets als constant vorausgesetzt wurde, gegeben ist, kann dies noch weiter ausgerechnet werden. Für einen rechteckigen Querschnitt von den Seiten b und h, wird $\Theta = \frac{bh^3}{12}$ und $e = \frac{h}{2}$, also

$$A = \frac{\sigma^2 bhl}{24E} = \frac{\sigma^2}{24E} \cdot V. \tag{134}$$

In der letzten Formel bedeutet $V = bhl$ das Volumen der Feder und man erkennt daraus, dass die Formänderungsarbeit nur von dem Volumen, also dem Materialaufwande abhängt und nicht davon, wie sich das Volumen aus den drei Factoren b, h und l zusammensetzt.

Aufgaben.

26. Aufgabe. Der Querschnitt eines gekrümmten Stabes sei ein Rechteck von 2 cm Breite und 4 cm Höhe (diese Seite in der Richtung des Krümmungshalbmessers gemessen) und der Krümmungshalbmesser der Mittellinie sei gleich 5 cm. Um wie viel unterscheidet sich die nach der Bernouilli'schen Annahme berechnete grösste Spannung, die durch ein Biegungsmoment M hervorgerufen wird von der nach der einfachen Formel $\sigma = \frac{M}{\Theta} y$ gefundenen?

Lösung. Nach Gl. (115) hat man für die Spannung σ nach der Bernouilli'schen Annahme einen Ausdruck von der Form

$$\sigma = c \cdot \frac{y}{r+y},$$

worin jetzt c eine constante (d. h. von y unabhängige) Grösse ist, die wir berechnen werden. Die Abstände y sind von der Null-

linie NN aus gerechnet, deren Lage zunächst ermittelt werden muss. Dafür dient uns die Gleichung

$$\int \sigma \, dF = 0 \quad \text{oder} \quad \int \frac{y}{r+y} dF = 0,$$

die ausspricht, dass die Spannungen zu einem Biegungsmomente gehören. Mit Rücksicht auf die in Abb. 49 eingeschriebenen Bezeichnungen ist $y + r = u$ und $dF = b\,du$ zu setzen. Daher geht die vorige Gleichung über in

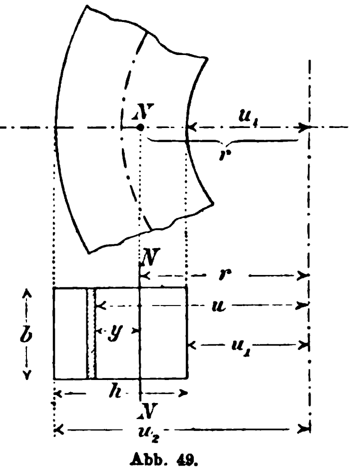


Abb. 49.

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{u-r}{u} du = h - r \lg \frac{u_2}{u_1} = 0,$$

aus der $r = h : \lg \frac{u_2}{u_1}$ folgt. Setzt man die im vorliegenden Beispiele gewählten Zahlenwerthe ein, so findet man

$$r = 4 : \lg \frac{7}{3} = 4{,}72 \text{ cm}.$$

Die Nulllinie NN liegt also um 0,28 cm von der Mitte entfernt.

Um jetzt noch c zu berechnen, schreibe ich die Momentengleichung an:

$$M = \int \sigma \, dF y = c \int \frac{y^2}{r+y} dF = cb \int_{u_1}^{u_2} \frac{(u-r)^2}{u} du.$$

Für das Integral erhält man:

$$\int_{u_1}^{u_2} \frac{(u-r)^2}{u} du = \int_{u_1}^{u_2} u\,du - 2r \int_{u_1}^{u_2} du + r^2 \int_{u_1}^{u_2} \frac{du}{u} = \frac{u_2{}^2}{2} - \frac{u_1{}^2}{2} - 2rh$$

$$+ r^2 \lg \frac{u_2}{u_1} = h\left(\frac{u_2 + u_1}{2} - r\right).$$

Demnach ist

$$c = \frac{M}{bh\left(\frac{u_2 + u_1}{2} - r\right)}.$$

Die Spannung an der Innenkante $(u = u_1)$ sei mit σ_I, die an der Aussenkante mit σ_{II} bezeichnet; man hat dann

$$\sigma_{\rm I} = c\,\frac{u_1 - r}{u_1} = -\frac{M}{8(5-4{,}72)} \cdot \frac{1{,}72}{3} = -0{,}256\,M,$$

$$\sigma_{\rm II} = c\,\frac{u_2 - r}{u_2} = \frac{M}{8(5-4{,}72)} \cdot \frac{2{,}28}{7} = 0{,}145\,M,$$

wobei als Längeneinheit 1 cm zu Grunde gelegt ist. Die Vorzeichen der Spannungen $\sigma_{\rm I}$ und $\sigma_{\rm II}$ richten sich natürlich nach dem Drehsinn des Biegungsmoments M und kommen hier nicht weiter in Betracht. Die grösste Spannung tritt an der Innenkante auf. Nach der von mir für genauer gehaltenen einfachen Formel $\sigma = \frac{M}{\Theta} y$ werden die Spannungen an beiden Kanten gleich gross und zwar

$$\sigma_{\rm I} = \sigma_{\rm II} = \frac{6\,M}{b h^2} = \frac{6\,M}{2 \cdot 16} = 0{,}187\,M.$$

Der Unterschied der grössten Kantenspannung nach beiden Annahmen beträgt daher 0,069 M oder 37 % von dem nach der einfachen Formel berechneten Werthe. Bei den Haken liegen die Verhältnisse ähnlich; dort kommt aber zu der Beanspruchung durch das Biegungsmoment noch eine Normalkraft und dadurch werden die Unterschiede etwas herabgemindert.

27. Aufgabe. Ein Flusseisenstab hat quadratischen Querschnitt von 6 cm Seite und eine gekrümmte Mittellinie von 1,20 m Spannweite und 20 cm Pfeil. Er wird als elastischer Bogenträger aufgestellt und trägt eine Einzellast in der Mitte von 3000 kg. Wie gross ist der Horizontalschub und wie gross die Beanspruchung des Materials?

Lösung. Für ein Coordinatensystem der XZ, dessen Ursprung mit dem linken Auflager zusammenfällt und dessen X-Axe horizontal gerichtet ist, lautet die Gleichung einer Parabel von der Spannweite l und dem Pfeile f:

$$z = \frac{4f}{l^2}(lx - x^2).$$

Von der Mittellinie des Stabs ist zwar nicht gesagt, dass sie einen Parabelbogen bilde; man weiss vielmehr nur, wie gross Spannweite und Pfeil ist. In solchen Fällen legt man aber immer die für die Rechnung bequemste Annahme über die genauere Gestalt der Mittellinie zu Grunde. Für das Biegungsmoment M_b eines Balkens in Folge der Einzellast P in der Mitte hat man $M_b = \frac{P}{2} x$ und nach Gl. (120) findet man den Horizontalschub H

$$H = \frac{\int M_b z\,dx}{\int z^2\,dx}.$$

Hierbei ist an Stelle von ds in Gl. (120) das Differential dx gesetzt. Auch dies ist eine zur bequemeren Ausrechnung dienende, praktisch zulässige Vernachlässigung, mit der man sich bekannt machen muss. Zur Rechtfertigung dafür erwähne ich zunächst, dass sich bei einem flachen Bogen ds überhaupt nicht viel von dx und dass sich die Bogenlänge nicht viel von der Länge der Sehne unterscheidet. Hier ist aber nicht nur im Zähler, sondern auch im Nenner an Stelle von ds der kleinere Factor dx getreten und man sieht ein, dass der Fehler, der dadurch im Werthe von H begangen wird, noch weiter herabgemindert wird. Wenn M_b überall proportional mit z wäre, würde H von der Vertauschung des Differentials ds mit dx überhaupt nicht berührt. In anderen Fällen ist aber der Fehler höchstens etwa von der Ordnung des Unterschiedes zwischen Bogen und Sehne und dieser fällt bei einem flachen Bogen innerhalb der Genauigkeitsgrenzen, die man bei Festigkeitsberechnungen überhaupt anstrebt, nicht in's Gewicht.

Beim Einsetzen der Werthe von M_b und z findet man

$$\int M_b z\,dx = 2\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{P}{2} x \frac{4f}{l^2}(lx - x^2)\,dx = \frac{5}{48} P f l^2.$$

Das Integral musste in zwei Theile gespalten und ein Theil nur über die linke Bogenhälfte ausgedehnt werden, weil der Ausdruck für M nur für diese Bogenhälfte gilt. Das Integral im Nenner von H kann dagegen sofort von 0 bis l ausgedehnt werden. Man findet

$$\int_0^l z^2\,dx = \frac{16 f^2}{l^4}\int_0^l (l^2x^2 - 2lx^3 + x^4)\,dx = \frac{8}{15} f^2 l.$$

Für H erhält man demnach:

$$H = \frac{\frac{5}{48} P f l^2}{\frac{8}{15} f^2 l} = \frac{25}{128} P \frac{l}{f} = 3520 \text{ kg}.$$

Das Biegungsmoment M ist:

$$M = \frac{P}{2} x - Hz = 1500x - 3520z.$$

Um das Maximum zu finden, differentiiren wir nach x:

$$\frac{dM}{dx} = 1500 - 3520\frac{dz}{dx} = 1500 - 3520\frac{4f}{l^2}(l - 2x).$$

Dies wird zu Null für $x = 22$ cm und die Ordinate z wird an dieser Stelle $z = 12$ cm, das Vorzeichen des Moments an dieser Stelle ist negativ. Wir haben also $M_{min} = -9200$ cm kg. Daneben kommt aber auch das Biegungsmoment im Bogenscheitel in Betracht, das kein analytisches Maximum ist, aber wegen der bis zum Bogenscheitel begrenzten Gültigkeit des Ausdrucks für M trotzdem den absolut grössten Werth annimmt. Man hat nämlich

$$M_{\frac{l}{2}} = 1500 \cdot 60 - 3520 \cdot 20 = + 19\,600 \text{ cmkg}.$$

An der gefährlichst beanspruchten Stelle wird daher

$$\sigma = \frac{6\,M}{bh^2} = \frac{6 \cdot 19\,600}{6^3} = 544 \text{ atm}.$$

Dazu kommt noch die sich gleichförmig über den Querschnitt vertheilende Druckspannung durch die axiale Belastung von der Grösse H, also $\frac{3520}{36} = 98$ atm. Die grösste Druckspannung, die das Material aufzunehmen hat, wird also gleich $544 + 98 = 642$ atm und die grösste Zugspannung gleich $544 - 98 = 446$ atm.

28. Aufgabe. Derselbe Träger wird mit 10 000 kg gleichförmig belastet; wie gross wird der Horizontalschub a) ohne b) mit Berücksichtigung des Einflusses der Normalkraft auf die Formänderungen?

Lösung. Wir brauchen hier nur die Zahlenwerthe in die Formeln von § 32 einzusetzen. Im Falle a) haben wir nach Gl. (121)

$$H = \frac{ql^2}{8h} = \frac{10\,000 \cdot 120}{8 \cdot 20} = 7500 \text{ kg}.$$

Für den Fall b) wenden wir Gl. (123) an. Mit $M_b = \frac{ql^2}{8} \cdot \frac{z}{f}$ wird

$$\int M_b z\,dx = \frac{ql^2}{8f}\int z^2\,dx = \frac{ql^3 f}{15}$$

mit Benutzung eines schon bei der Lösung der vorausgehenden Aufgabe gefundenen Resultats. Für t^2 ist

$$t^2 = \frac{\Theta}{F} = \frac{bh^3}{12bh} = \frac{h^2}{12} = \frac{36}{12} = 3 \text{ cm}^2$$

zu setzen. Nach Gl. (123) hat man daher (nach Vertauschung von ds mit dx)

$$H = \frac{\int M_b z\,dx}{\int z^2\,dx + \int t^2\,dx} = \frac{\frac{ql^3 f}{15}}{\frac{8}{15} f^2 l + t^2 l} = \frac{10\,000 \cdot 120 \cdot 20}{8 \cdot 20^2 + 15 \cdot 3} = 7396 \text{ kg}.$$

Der Unterschied zwischen den Fällen a) und b) ist daher unerheblich.

29. *Aufgabe. Um wie viel vergrössert sich die Spannweite, wenn der in den vorhergehenden Aufgaben angeführte Stab als Balkenträger aufgestellt wird, unter dem Einflusse der in Aufgabe 27 angegebenen Belastung?*

Lösung. Nach Gl. (124) ist, wenn an Stelle von M hier M_b gesetzt und ds mit dx vertauscht wird

$$\Delta l = \int \frac{M_b z}{E\Theta} dx = \frac{5 P f l^2}{48 E\Theta} = \frac{5 \cdot 3000 \cdot 20 \cdot 120^2}{48 \cdot 22 \cdot 10^5 \cdot 108} = 0{,}38 \text{ cm}.$$

Dabei ist für das Integral der schon in der Lösung von Aufg. 27 gefundene Werth und für den Elasticitätsmodul E des Flusseisens $22 \cdot 10^5$ atm eingesetzt. — Wenn die Widerlager um 1 mm nachgeben, wird dadurch in jedem Belastungsfalle der Horizontalschub um $\frac{3520}{3{,}8} = 926$ kg vermindert.

30. *Aufgabe. Nach welchem Gesetze muss die Stärke eines vorher auf einen grösseren Durchmesser abgedrehten Kolbenringes von der Schlitzstelle aus nach beiden Seiten hin zunehmen, wenn der Ring nach dem Einpassen in den Cylinder überall mit demselben specifischen Drucke p in radialer Richtung an der Cylinderwand anliegen soll?*

Lösung. Man betrachte einen Querschnitt im Winkelabstande φ von der Schlitzstelle (vgl. Abb. 50). Die äusseren Kräfte am einen Stabtheile geben eine Resultirende, die ebenso gross und ebenso gelegen ist, als wenn sich der Druck p auf die Sehne s vertheilte. Dies folgt nämlich aus einer hydrostatischen Betrachtung, von der man bei solchen Untersuchungen oft Gebrauch macht. Ein Wasserkörper, der den Raum des Segmentes ausfüllte, wäre im Gleichgewichte, wenn von allen Seiten her der Druck p auf ihn wirkte. Daraus folgt sofort, dass die Resultirende des Drucks am Bogenumfang gleich der Resultirenden des Drucks längs der Sehne ist. Wenn wir die Breite des Rings (senkrecht zur Ebene von Abb. 50) mit b bezeichnen, ist diese Resultirende gleich pbs und das Biegungsmoment im Querschnitte φ

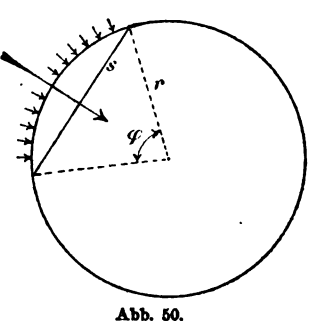


Abb. 50.

$$M = pb \frac{s^2}{2} = 2 pbr^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Vorher sei der Ring auf einen um Δr grösseren Radius abgedreht gewesen; durch die elastische Formänderung muss sich der Radius überall auf r vermindern, wenn der Ring nachher überall satt anliegen soll. Nach Gl. (111) haben wir daher

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r + \Delta r} = \frac{M}{E\Theta} = \frac{12}{Eh^3} \cdot 2pr^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Für die linke Seite kann man, da Δr klein gegen r ist, kürzer $\frac{\Delta r}{r^2}$ setzen. Die Gleichung kann dann nach der unbekannten, veränderlichen Stärke h des Kolbenrings aufgelöst werden und gibt

$$h = c \sqrt[3]{\sin^2 \frac{\varphi}{2}},$$

wenn unter der c der für den ganzen Ring constante Werth

$$c = \sqrt[3]{\frac{24pr^4}{E \cdot \Delta r}}$$

verstanden wird. Die erste von beiden Gleichungen gibt das allgemeine Gesetz an, nach dem h mit φ zunehmen muss; c dagegen ist die grösste Stärke, die der Ring an der der Schlitzstelle gegenüber liegenden Stelle erhält. Die letzte Gleichung kann daher auch umgekehrt dazu benutzt werden, die Stärke des Drucks p, mit dem der Ring an der Cylinderwand aufliegt, zu berechnen, wenn c und Δr gegeben sind.

Für $\varphi = 0$ und für $\varphi = 360^0 = 2\pi$ gibt die Formel $h = 0$, d. h. der Ring müsste dort in einer Schneide endigen. Davon sieht man bei der praktischen Ausführung ab; dagegen ist es allgemein gebräuchlich, die Stärke des Rings sonst in ungefährer Uebereinstimmung mit der abgeleiteten Formel nach der Mitte hin zunehmen zu lassen.

Bei der Berechnung ist überall h als klein gegen r vorausgesetzt worden, so dass r als Radius der Mittellinie genommen werden konnte. Mit Rücksicht auf den Zweck der Rechnung war diese Vernachlässigung zulässig. Man hätte natürlich auch für r den genaueren Werth $r - \frac{h}{2}$ setzen können; man glaube aber nicht, dass dies in Wirklichkeit eine Verbesserung wäre. Es handelt sich bei solchen Untersuchungen immer darum, die Hauptzüge einer Erscheinung in möglichst einfach gebauten Formeln wiederzugeben und auf Kleinigkeiten zu verzichten. Freilich will diese Kunst, an der rechten Stelle die angebrachte Vernachlässigung einzuführen, geübt sein, damit man nicht einmal ein Glied unterdrückt, das von grösserer, vielleicht sogar von ausschlaggebender

Bedeutung ist. Nur die klare Uebersicht über alle Bedingungen der Aufgabe und die vollständige Beherrschung des Gebiets, die man durch längere Uebung gewinnt, können hier vor gelegentlichen Missgriffen schützen.

31. Aufgabe. Ein U-förmiger Bügel von constantem Querschnitt wird mit Hülfe einer zwischen den Schenkeln angebrachten Schraube in der Höhe a auseinander gebogen (vgl. Abb. 51). Die über a hinaus liegenden Theile der Schenkel bleiben hierbei gradlinig und zwar dreht sich jeder Theil beim Auseinanderbiegen um einen festen Punkt O. Man soll dessen Lage ermitteln.

Lösung. Der Körper ist als ein Bogen aufzufassen, dessen Mittellinie aus drei Seiten eines Rechtecks zusammengesetzt wird. Wir berechnen zunächst, um wie viel sich die Spannweite unter dem Einflusse eines Horizontalschubs oder Horizontalzugs verändert und dann, um welchen Winkel sich die oberen Theile der Schenkel drehen; wenn beide Werthe bekannt sind, kann daraus leicht die Lage des Drehpunktes ermittelt werden. Vorausgesetzt wird, dass der Bügel während der Formänderung so festgehalten wird, dass die Symmetrieaxe ihre Lage beibehält; auf die Bewegungen, die der Bügel daneben etwa noch im Ganzen ausführen könnte, kommt es natürlich nicht an.

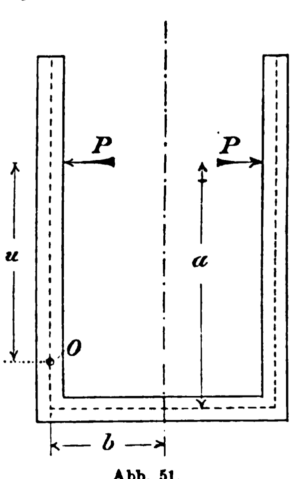


Abb. 51.

Zur Berechnung von Δl verwenden wir Gl. (124):

$$\Delta l = \int \frac{Mz}{E\Theta} ds.$$

Die Integration ist über die eine Hälfte der Bogenmittellinie auszudehnen und dabei in zwei Theile zu trennen, von denen der eine sich auf die horizontale Strecke und der andere sich auf die vertikale Strecke der Mittellinie bezieht. In der ersten Strecke ist z überall gleich a, in der zweiten ist $ds = dz$ und daher

$$\Delta l = \int_0^b \frac{Pa \cdot a}{E\Theta} ds + \int_0^a \frac{Pz \cdot z}{E\Theta} dz = \frac{Pa^2}{E\Theta}\left(b + \frac{a}{3}\right).$$

Die Drehung $\Delta\varphi$ des oberen Theiles des Schenkels ist gleich der Summe aller elastischen Winkeländerungen $\Delta d\varphi$ benachbarter

Querschnitte, die zwischen dem Bogenanfang und der Mitte liegen, also nach Gl. (112)

$$\Delta\varphi = \int\frac{M ds}{E\Theta} = \int_0^b \frac{Pa\,ds}{E\Theta} + \int_0^a \frac{Pz}{E\Theta} dz = \frac{Pa}{E\Theta}\left(b + \frac{a}{2}\right).$$

In seine neue Lage kann der obere Theil des Schenkels auch dadurch gebracht werden, dass man ihn um einen auf der ursprünglichen Lage der Schenkelmittellinie gelegenen Punkt um den Winkel $\Delta\varphi$ dreht, wenn dieser Punkt im Abstande u von der Angriffsstelle der Kraft H nach abwärts liegt. Man braucht den Abstand u nur so zu wählen, dass der Angriffspunkt von H bei der Drehung einen Weg Δl zurücklegt. Daraus folgt die Bedingungsgleichung

$$u\Delta\varphi = \Delta l, \text{ also } u = \frac{6b + 2a}{6b + 3a} \cdot a.$$

Da u unabhängig von P ist, folgt, dass sich der überstehende Theil des Schenkels in der That fortwährend um denselben Punkt dreht, dessen Lage zugleich ermittelt ist. — Rechnungen dieser Art sind zuweilen nöthig, um sich über die Art der elastischen Bewegungen, die in Messinstrumenten oder auch in Maschinen auftreten und dabei leicht einen störenden Einfluss ausüben, rasch Rechenschaft geben zu können.

Sechster Abschnitt.

Stäbe auf nachgiebiger Unterlage.

---

§ 38. Grundlegende Annahmen.

Bei der Berechnung des Eisenbahnoberbaues steht man vor der Aufgabe, die Biegungsmomente, Scheerkräfte und Spannungen in einem Stabe zu berechnen, der zwar seiner ganzen Länge nach gestützt ist, so jedoch, dass die Stützen selbst unter einer Belastung nachgeben. Aehnliche Fälle kommen zwar auch sonst noch bei den Anwendungen der Mechanik öfters vor; wir wollen aber, um eine deutliche Vorstellung von dem Gegenstande der Untersuchung zu gewinnen, hier zunächst immer nur an die Formänderungen und die Beanspruchungen denken, die eine gewöhnliche Eisenbahnquerschwelle erfährt, wenn die beiden auf ihr befestigten Schienen einen gegebenen Druck auf sie übertragen.

Dass sich die Schwelle etwas einsenkt, wenn ein Eisenbahnzug über das Geleis fährt, lehrt schon eine einfache Beobachtung, die man bei jedem Spaziergange längs einer von einem Zuge befahrenen Eisenbahnstrecke machen kann. Man nimmt dabei zunächst wahr, dass die Schiene selbst sich senkt. Dies kommt zum Theil daher, dass die Schwelle der Quere nach zusammengedrückt wird; indessen nur zum kleineren Theile, denn beim Nachrechnen erkennt man, dass die elastische Verkürzung der Schwellenhöhe nicht ausreichen kann, um die mit blossem Auge sehr deutlich wahrnehmbare Senkung der auf ihr ruhenden Schiene zu erklären. Die Schwelle muss sich

daher tiefer in die Kiesbettung des Eisenbahnkörpers eindrücken und zwar muss die Formänderung des Bettungskörpers eine ziemlich vollkommen elastische sein, da die Schwelle nach der Entlastung jedesmal in ihre frühere Lage zurückkehrt. Man wird im Zusammenhange mit dieser Beobachtung auch zu der Frage geführt, nach welchem Gesetze sich die Last der Länge nach auf die Kiesbettung vertheilt und sieht sofort ein, dass eine Beantwortung der Frage nur auf Grund einer näheren Untersuchung der eintretenden elastischen Formänderungen sowohl der Schwelle als des Bettungskörpers möglich ist. Natürlich hängt diese Lastvertheilung auch davon ab, auf welche Art die Schwelle schon im unbelasteten Zustande eingebettet ist; wenn irgendwo eine Lücke oder eine lockere Stelle in der Kiesbettung vorkäme, könnte an dieser Stelle überhaupt keine Lastübertragung stattfinden. Wir setzen aber als selbstverständlich voraus, dass die Schwelle überall gut unterstopft sei, so dass sie satt auf dem Kies- oder Schotterbette aufruht und dass also in dieser Hinsicht der ganzen Schwellenlänge nach die Vorbedingungen überall die gleichen sind.

Auf den ersten Blick mag es befremdlich erscheinen, dass ein Körper von der Art eines Sand- oder Kieshaufens im Stande sein könne, ziemlich vollkommen elastische Formänderungen auszuführen. Aber auch andere Erfahrungen bestätigen den Schluss, den wir aus der Beobachtung an dem Eisenbahngeleise gezogen haben. In der That weiss man ja, dass ein in solcher Weise zusammengesetzter Erdboden Schallschwingungen fortzupflanzen vermag, dass er also elastische Bewegungen — solche sind die Schallbewegungen — ausführen kann. Ich habe mich aber auch noch durch einen unmittelbaren Versuch von der Elasticität des gewöhnlichen Erdbodens überzeugt. Dazu liess ich in dem Hofe meines Laboratoriums zwei Pfähle einrammen, die 3 m voneinander entfernt sind und eine Eisenschiene tragen, die etwa 70 cm über dem Boden liegt. Unterhalb der Schiene wurden kleine Holzpflöcke eingeschlagen, die fest im Boden sitzen und dessen Bewegungen

mitmachen. Es handelte sich nun darum, die Verschiebungen dieser Holzpflöcke gegen die darüber in fester Lage verharrende Eisenschiene zu messen. Zu diesem Zwecke wurde ein Spiegelgeräth an der Schiene befestigt und von dem Holzpflocke aus wurde eine Stange in die Höhe geführt, deren unteres Ende sich um Spitzen in einer Messingfassung drehen konnte, die an dem Holzpflock befestigt war, während das passend zugeschnittene obere Ende auf dem Umfange des Hartgummiröllchens des Spiegelgeräths aufruhte; für einen angemessenen Druck an der Auflagerstelle sorgt ein kleines Uebergewicht. Eine Verschiebung des Holzpflocks nach abwärts verräth sich nun durch eine Drehung des Spiegels, die mit einem Fernrohre beobachtet wird. Bei meinen Versuchen entsprach eine Verschiebung des Maassstabbildes im Spiegel gegen das Fadenkreuz des Fernrohrs um einen Theilstrich einer Senkung des Holzpflocks um 0,835 Tausendstel Millimeter und auf Zehntel mm der Maassstabtheilung konnte bei der Ablesung geschätzt werden. Man las also die Bodensenkung, die der Holzpflock mitmachte, im Fernrohre in rund 1200facher Vergrösserung am Maassstabe ab und die Genauigkeit der Messung stellte sich auf etwa $\frac{1}{10\,000}$ mm.

Ein Beobachter, der durch das Fernrohr sieht, während eine andere Person in der Nähe des Holzpflocks auf und ab geht, sieht deutlich, wie sich der Boden bei der Annäherung des Spaziergängers senkt und bei der Entfernung wieder hebt. Bis zur angegebenen Genauigkeitsgrenze hin sind diese Bewegungen als vollkommen elastische zu betrachten. Um eine genauere Messung durchzuführen, liess ich ein gusseisernes Gewichtsstück von 100 kg in verschiedenen Entfernungen vom Holzpflocke wiederholt aufstellen und wieder wegnehmen und maass die zugehörigen elastischen Senkungen des Holzpflocks. Ich fand für die

Entfernung in cm	=	20	40	60	80
die Senkung in $\frac{1}{1000}$ mm	=	18,3	4,1	1,4	0,6.

Eine andere Messung zeigte, dass die elastischen Bewegungen ungefähr proportional der Belastung wachsen, so lange wenigstens als es sich, wie bei allen diesen Versuchen, nur um verhältnissmässig geringe Lasten handelte. Eine Ergänzung der Versuchseinrichtung, die eine Erprobung mit Lasten bis zu etwa 1000 kg gestatten soll, ist in Aussicht genommen; vorläufig kann ich aber darüber nichts berichten.

Diese Beobachtungen sind noch allerneuesten Datums; zur Begründung irgend einer theoretischen Betrachtung konnten sie daher noch nicht verwendet werden. Sie zeigten im Gegentheile, dass eine früher schon von Boussinesq gegebene Lösung der allgemeinen Elasticitätsgleichungen, von denen in einem späteren Abschnitte die Rede sein wird, hier sicher nicht anwendbar ist.

Vielmehr hat man sich bei den Berechnungen des Eisenbahnoberbaues durch eine weit einfachere Annahme geholfen, die für die Ableitung ungefähr richtiger Resultate hinreichend genau zu sein scheint. Man nimmt nämlich an, dass die Einsenkung der Bettung unter dem Drucke der Schwelle an jeder Stelle nur dem gerade dort wirkenden specifischen Drucke proportional sei. Genau richtig ist dies natürlich keineswegs; man sieht aber aus den vorher mitgetheilten Zahlen, wie schnell die Einsenkung mit der Entfernung von der Angriffsstelle der Belastung abnimmt. In der That wird also die Tiefe der Einsenkung in erster Linie von den in der nächsten Nachbarschaft übertragenen Druckkräften abhängen und nur wenig von den weiter entfernten beeinflusst sein. Es ist daher vollständig gerechtfertigt, wenn man zunächst nur einmal jenen Umstand in Betracht zieht, der der ausschlaggebende zu sein scheint, und die sich daraus ergebenden Folgerungen ableitet. Wünschenswerth ist nachher freilich die Prüfung der Uebereinstimmung dieser Folgerungen mit der Wirklichkeit durch einen unmittelbaren Versuch. Zimmermann hat solche Versuche vornehmen lassen; leider sind diese aber bisher vereinzelt geblieben, während bei der Wichtigkeit der Sache ergänzende Versuche recht nöthig wären.

§ 39. Die Eisenbahnquerschwelle mit constantem Querschnitt.

Der auf die Längeneinheit von der Schwelle auf die Bettung übertragene Druck sei mit p, der Druck für das Längenelement dx der Schwelle also mit $p\,dx$ bezeichnet. Für einen Querschnitt im Abstande x vom linken Ende der Schwelle hat man, falls x kleiner als a ist, für die Scheerkraft V und das Biegungsmoment M die Ausdrücke

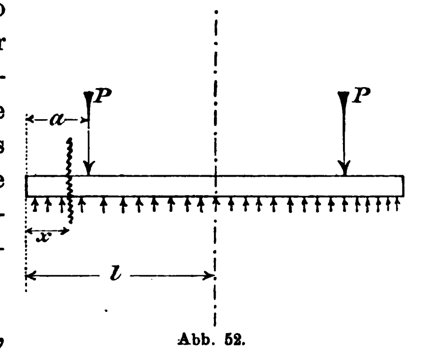


Abb. 52.

$$V = \int_0^x p\,dx; \quad M = \int_0^x p\,du(x-u),$$

wenn u hier ebenfalls eine Abscisse ist, die man von 0 bis x wachsen lässt. Die Benutzung dieser Integrale ist aber unbequem und es ist daher besser, die Differentialquotienten von V und M nach x in der unbekannten Function p, auf deren Ermittelung es ankommt, auszudrücken. Man hat zunächst $dV = p\,dx$, ein Ansatz, der unmittelbar aus der Bedeutung von p hervorgeht, und hiermit

$$\frac{dV}{dx} = p. \tag{135}$$

Schon früher fanden wir, dass die Scheerkraft V als Differentialquotient des Biegungsmoments M angesehen werden kann (Gl. 72) und wir finden daher auch

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = p. \tag{136}$$

Dieselben Ausdrücke hätten sich auch durch Differentiation der vorher für V und M aufgestellten Formeln ableiten lassen; sie sind aber allgemeiner als jene, denn sie gelten nicht nur für den ersten, von 0 bis a reichenden Abschnitt der Schwelle, sondern, wie aus ihrer Ableitung hervorgeht, auch für die folgenden. Die Biegungsmomente bedingen, dass sich die Mittel-

linie des Stabes krümmt. Bezeichnen wir die Einsenkung, die ein Punkt der Mittellinie mit der Abscisse x erfährt, mit y, so ist $y = f(x)$ die Gleichung der elastischen Linie des Stabs. Die Einsenkungen y sind also einerseits an den Zusammenhang mit den Biegungsmomenten gebunden, der durch die Differentialgleichung der elastischen Linie ausgesprochen wird, und andererseits sind sie nach unserer grundlegenden Annahme der unbekannten Function p direct proportional. Der Vergleich beider Beziehungen miteinander führt zur Lösung der Aufgabe.

Die Differentialgleichung der elastischen Linie (Gl. 78)

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = -M$$

liefert, wenn man sie zweimal nach x differentiirt, mit Rücksicht auf Gl. (136)

$$E\Theta \frac{d^4 y}{dx^4} = -p. \tag{137}$$

Die von uns gewählte Annahme über den Zusammenhang zwischen der elastischen Einsenkung y und dem Drucke p für die Längeneinheit der Schwelle kann in der Gleichung

$$p = ky \tag{138}$$

ausgesprochen werden, in der k eine von den elastischen Eigenschaften der Bettung abhängige Constante ist, die wir als die „Bettungsziffer" bezeichnen wollen. Gl. (137) geht damit über in

$$E\Theta \frac{d^4 y}{dx^4} = -ky. \tag{139}$$

Man kennt die allgemeine, also mit vier willkürlichen Constanten behaftete, Lösung dieser Differentialgleichung vierter Ordnung. Sie lautet

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + \\ + C_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x, \tag{140}$$

worin die C die willkürlichen Constanten sind, während mit α zur Abkürzung der Absolutbetrag von

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4 E\Theta}} \tag{141}$$

bezeichnet ist. Dass die Lösung die Differentialgleichung (139) befriedigt, erkennt man durch Einsetzen in diese Gleichung,

und dass sie zugleich die allgemeinste Lösung ist, folgt daraus, dass sie vier unbestimmte Constanten enthält.

Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, die Constanten mit Hülfe der Grenzbedingungen, die bei der Aufgabe vorgeschrieben sind, zu bestimmen. Dabei ist zu beachten, dass die ganze elastische Linie der Schwelle in drei gesonderte Aeste zerfällt, von denen der erste von 0 bis a reicht, der zweite zwischen die beiden Schienen fällt und der dritte das über die rechte Schiene hinausragende Stück der Schwelle umfasst. Der Symmetrie wegen genügt es indessen, wenn wir hier nur den ersten Ast und die bis zur Symmetrieaxe reichende Hälfte des zweiten Astes in's Auge fassen.

Für alle Aeste gilt im Allgemeinen die Lösung (140); die Constanten C sind aber den verschiedenen Anfangsbedingungen entsprechend bei den einzelnen Aesten verschieden. Wir haben also hier im Ganzen acht bisher unbestimmt gebliebene Constanten den Grenzbedingungen entsprechend zu wählen. Dazu stehen uns auch in der That acht Bedingungsgleichungen zur Verfügung. Zunächst wissen wir, dass für $x = 0$ sowohl M als V verschwinden. Mit M ist aber überall $\frac{d^2y}{dx^2}$ und mit V ist $\frac{d^3y}{dx^3}$ proportional; beide Differentialquotienten sind also für $x = 0$ gleich Null zu setzen. Der besseren Uebersicht wegen stelle ich hier die drei ersten Differentialquotienten von y nach Gl. (140) zusammen. Man findet:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \alpha\ \{ & C_1 (e^{\alpha x} \cos \alpha x - e^{\alpha x} \sin \alpha x) + C_2 (e^{\alpha x} \sin \alpha x + e^{\alpha x} \cos \alpha x) \\ & + C_3 (-e^{-\alpha x} \cos \alpha x - e^{-\alpha x} \sin \alpha x) \\ & + C_4 (-e^{-\alpha x} \sin \alpha x + e^{-\alpha x} \cos \alpha x) \},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2} = \alpha^2 \{ & -2C_1 e^{\alpha x} \sin \alpha x + 2C_2 e^{\alpha x} \cos \alpha x + 2C_3 e^{-\alpha x} \sin \alpha x \\ & - 2C_4 e^{-\alpha x} \cos \alpha x \},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^3y}{dx^3} = \alpha^3 \{ & -2C_1 (e^{\alpha x} \sin \alpha x + e^{\alpha x} \cos \alpha x) \\ & + 2C_2 (e^{\alpha x} \cos \alpha x - e^{\alpha x} \sin \alpha x) \\ & + 2C_3 (-e^{-\alpha x} \sin \alpha x + e^{-\alpha x} \cos \alpha x) \\ & + 2C_4 (e^{-\alpha x} \cos \alpha x + e^{-\alpha x} \sin \alpha x) \}.\end{aligned}$$

Die Bedingung, dass $\frac{d^2 y}{dx^2}$ für $x = 0$ verschwinden soll, liefert daher die Gleichung

$$C_4 = C_2 \tag{142}$$

und aus $\frac{d^3 y}{dx^3} = 0$ für $x = 0$ folgt

$$C_1 = C_2 + C_3 + C_4. \tag{143}$$

Zur Abkürzung führen wir ferner die Bezeichnungen ein

$$e^{\alpha a} \cos \alpha a = m_1; \quad e^{\alpha a} \sin \alpha a = m_2; \quad e^{-\alpha a} \cos \alpha a = m_3;$$
$$e^{-\alpha a} \sin \alpha a = m_4$$

und die vier Constanten, die in der Gleichung des zweiten Astes der elastischen Linie auftreten, werden der Reihe nach C_5 bis C_8 geschrieben. Nun müssen sich beide Aeste so aneinander schliessen, dass sie für $x = a$ gleiches y und auch gleiches $\frac{dy}{dx}$ geben, denn ein Knick der elastischen Linie kann an dieser Stelle nicht auftreten. Aber auch $\frac{d^2 y}{dx^2}$ muss an der Anschlussstelle für beide Aeste gleich sein, da sich das Biegungsmoment M nicht sprungweise ändert. Damit erhalten wir die drei Bedingungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&C_1 m_1 + C_2 m_2 + C_3 m_3 + C_4 m_4 = C_5 m_1 + C_6 m_2 + C_7 m_3 \\
&\qquad + C_8 m_4, \\
&C_1 (m_1 - m_2) + C_2 (m_1 + m_2) - C_3 (m_3 + m_4) \\
&\qquad + C_4 (m_3 - m_4) = C_5 (m_1 - m_2) + C_6 (m_1 + m_2) \\
&\qquad - C_7 (m_3 + m_4) + C_8 (m_3 - m_4), \\
&- C_1 m_2 + C_2 m_1 + C_3 m_4 - C_4 m_3 = - C_5 m_2 \\
&\qquad + C_6 m_1 + C_7 m_4 - C_8 m_3.
\end{aligned}\right\} \tag{144}$$

Der dritte Differentialquotient von y ist dagegen an der Anschlussstelle für beide Aeste von verschiedener Grösse, denn man hat

$$V = \frac{dM}{dx} = - E\Theta \frac{d^3 y}{dx^3}$$

und die Scheerkraft V erleidet an der Uebergangsstelle eine plötzliche Aenderung um den Betrag $- P$. Wenn man also für den Augenblick die Ordinate des ersten Astes mit y_I, die

des zweiten mit y_{II} bezeichnet, so besteht an der Uebergangsstelle die Beziehung

$$\left[\frac{d^3 y_{II}}{dx^3} - \frac{d^3 y_I}{dx^3}\right]_{x=a} = \frac{P}{E\Theta}$$

oder, wenn man die Werthe der Differentialquotienten einsetzt,

$$(C_1 - C_5)(m_1 + m_2) + (C_6 - C_2)(m_1 - m_2) + (C_7 - C_3)(m_3 - m_4) + (C_8 - C_4)(m_3 + m_4) = \frac{P}{2\alpha^3 E\Theta}. \qquad (145)$$

Endlich seien die Werthe, die man erhält, wenn man in den Ausdrücken für $m_1\, m_2 \cdots$ die Abscisse a durch die Abscisse l (entsprechend der Schwellenmitte) ersetzt, mit $n_1\, n_2$ u. s. f. bezeichnet. In der Symmetrieaxe muss zunächst $\frac{dy}{dx} = 0$ werden, ferner aber auch $\frac{d^3 y}{dx^3}$, weil hier $V = 0$ ist. Man hat also noch die beiden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} C_5(n_1 - n_2) + C_6(n_1 + n_2) - C_7(n_3 + n_4) + C_8(n_3 - n_4) = 0 \\ -C_5(n_1 + n_2) + C_6(n_1 - n_2) + C_7(n_3 - n_4) + C_8(n_3 + n_4) = 0 \end{aligned}\right\}. \qquad (146)$$

Alle in den acht Bedingungsgleichungen (142) bis (146) vorkommenden Grössen sind bis auf die Unbekannten C in einem concreten Falle numerisch gegebene Werthe; man kann daher diese Gleichungen ersten Grades ohne Weiteres nach den acht Unbekannten auflösen und kennt dann nach Gl. (140) die Gestalt der beiden Aeste der elastischen Linie. Auch das Gesetz der Druckvertheilung ist damit nach Gl. (138) gegeben.

Wenn man eine solche Untersuchung zu praktischen Zwecken durchführt, wird man die Mühe, acht Gleichungen ersten Grades nach den Unbekannten aufzulösen, nicht sonderlich scheuen, denn die Rechnung braucht nur einmal oder nur wenige Male wiederholt zu werden, um einen klaren Ueberblick über das Verhalten der Querschwelle unter verschiedenen Umständen zu verschaffen. Man wird sich also namentlich Rechenschaft darüber geben können, wie lang man die Schwelle zweckmässiger Weise beiderseits über die Schienen vorstehen lassen soll, wie stark sie zu machen ist u. s. f. Da die Querschwelle im Eisenbahnbau ein Constructionselement bildet, das

sich so ungemein häufig in derselben Form wiederholt, liegt nichts daran, wenn sich ein Rechner einmal einige Tage damit abmühen muss, sofern man nur irgend einen Vortheil von einer klaren Einsicht in die Kraftvertheilung erhoffen darf. Hier aber noch weiter auf die Frage einzugehen, hätte keinen Zweck, nachdem alle principiellen Schwierigkeiten aus dem Wege geräumt sind, so dass sich der Leser jetzt selbst ohne fernere Anleitung weiter helfen kann.

§ 40. Lösung der vorigen Aufgabe auf graphischem Wege.

An Stelle der durch Gl. (137) oder Gl. (139) ausgesprochenen Bedingung, kann man das Gesetz, dem die elastische Linie der Schwelle unterworfen ist, auch geometrisch zum Ausdruck bringen. Die elastische Linie eines vorher graden Stabes kann nämlich, wie in der graphischen Statik gezeigt wird, als ein zweites Seilpolygon gefunden werden, das zu der gegebenen Belastungsfläche gehört. Die durch jene Differentialgleichungen zum Ausdruck gebrachte Bedingung kommt dann darauf hinaus, dass das zweite Seilpolygon und die Belastungsfläche verhältnissgleiche Ordinaten haben müssen. Geometrisch gesprochen, handelt es sich also um die Lösung der Aufgabe, eine solche Gestalt der Belastungsfläche (also der Function p) ausfindig zu machen, die bei passender Wahl des Maassstabes mit ihrem eigenen zweiten Seilpolygon zusammenfällt.

Wenn man nun auch keine directe Methode für die graphische Lösung dieser Aufgabe angeben kann, so kann diese doch sehr leicht auf indirectem Wege, nämlich durch Probiren (nach der „regulsa falsi“) gefunden werden. Man sucht sich nämlich zunächst ein ungefähres Bild von der zu erwartenden Druckvertheilung zu verschaffen. Dazu reicht schon aus, dass der Druck unterhalb der Schiene jedenfalls am grössten sein wird und dass er von da aus sowohl nach der Schwellenmitte als nach aussen hin allmählich abnimmt. Dem entsprechend zeichnet man zur Probe eine Belastungsfläche (d. h. eine graphische Darstellung der Druckvertheilung p) hin, die sonst

ganz willkürlich gewählt werden darf. Dann probirt man, ob man mit dieser Vermuthung das Rechte getroffen hat, d. h. man construirt das zweite Seilpolygon dazu und trägt dessen Schlusslinie horizontal in solcher Höhe ein, dass die Ordinaten an den Enden zu den grössten Ordinaten in demselben Verhältnisse stehen wie bei der Belastungsfläche. Wenn dann auch alle anderen Ordinaten mit jenen der Belastungsfläche verhältnissgleich sind, ist dies ein Beweis für die richtige Annahme der Druckvertheilung. Im Allgemeinen wird man aber zunächst eine starke Abweichung in der Gestalt beider Curven finden. Dann ändert man die zuerst gezeichnete Belastungsfläche so ab, dass sich die Lastvertheilung jetzt mehr der Gestalt der gefundenen elastischen Linie nähert und wiederholt das Verfahren für diese zweite Annahme. Die Uebereinstimmung zwischen Belastungsfläche und zugehöriger elastischer Linie wird jetzt besser werden und nach mehrmaliger Wiederholung findet man mit hinreichender Genauigkeit die wirkliche Druckvertheilung.

Dieses graphische Verfahren hat den Vortheil, dass es auch dann noch bequem anwendbar bleibt, wenn der Querschnitt nicht constant ist (z. B. bei eisernen Querschwellen), da man auch für diesen Fall die Gestalt der zu einer angenommenen Belastungsfläche gehörigen elastischen Linie ohne Schwierigkeit auf graphischem Wege ermitteln kann. — Eine Unterscheidung zwischen den einzelnen Aesten der elastischen Linie braucht hier natürlich nicht gemacht zu werden, da es bei dem graphischen Verfahren ganz gleichgültig ist, wenn irgendwo ein Sprung in dem Werthe des dritten Differentialquotienten von y auftritt.

§ 41. Aufgaben ähnlicher Art.

An den Bedingungen, denen der Stab unterworfen ist, wird nicht viel geändert, wenn er nicht gleichmässig seiner ganzen Länge nach, sondern in einzelnen Punkten unterstützt ist, die in kleinen, unter sich gleichen Abständen aufeinander

folgen. Voraussetzung ist nur, dass jede dieser Stützen unter demselben Drucke um gleich viel nachgibt. Solche Fälle kommen öfters vor. Man denke sich z. B. eine Brückenconstruction, die aus einer Anzahl ziemlich dicht nebeneinander liegender Hauptträger gebildet wird, auf die sich die der ganzen Brückenbreite nach durchlaufenden Querträger stützen. Die Vertheilung des Druckes vom Querträger, wenn dieser irgend eine Einzellast (oder auch mehrere) trägt, auf die einzelnen Hauptträger befolgt dann ungefähr dasselbe Gesetz, das durch die in § 39 gegebene Lösung dargestellt wird.

Ein anderer Fall wird durch Abb. 53 angegeben. Durch einen Holzbalken ist ein Loch gebohrt, durch das ein Schraubenbolzen gut passend gesteckt ist. Aussen greifen zwei Eisenlaschen an, die durch den Bolzen mit dem Balken verbunden sind und die durch dessen Vermittelung eine Belastung auf den Balken übertragen. Unter dem Einflusse der Belastung biegt sich der Bolzen etwas; dieser Biegung widersetzt sich das Holz und es tritt nun ein Druck des Holzes gegen den Bolzen auf, der in der Mitte nach abwärts und an den Seiten nach aufwärts gerichtet ist. Man kann auch hier näherungsweise den Druck proportional der Zusammendrückung setzen, die das Holz an der betreffenden Stelle erfährt. Von dem Falle der Eisenbahnschwelle in der Bettung weicht der hier vorliegende nur insofern ab, als dort nur Druckkräfte in einer Richtung, hier aber auch solche in der entgegengesetzten Richtung übertragen werden können. Gl. (140) gibt aber auch in diesem Falle ohne Weiteres die allgemeine Gestalt der elastischen Linie und damit das allgemeine Gesetz der Druckübertragung an. Die Constanten C bestimmen sich aus den Bedingungen, dass an beiden Enden $\frac{d^2y}{dx^2}$ gleich Null und $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{P}{E\Theta}$ bezw. gleich $-\frac{P}{E\Theta}$ werden muss.

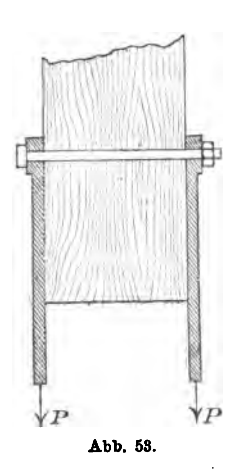


Abb. 53.

Wenn auf einen Mauerkörper an einer Stelle eine grössere Last, z. B. der Auflagerdruck eines Brückenträgers übertragen werden soll, muss man die zunächst ziemlich concentrirt auftretende Belastung mit Hülfe einer grossen Eisenplatte über eine Mauerwerksfläche vertheilen, die so gross ist, dass die Festigkeit der Steine nirgends überschritten wird. Auch zur Abschätzung des Druckvertheilungsgesetzes in diesem Falle geben die vorausgehenden Betrachtungen einen Anhaltspunkt. Man möchte in diesem Falle eine möglichst gleichmässige Druckvertheilung herbeiführen. Dazu gehört natürlich in erster Linie eine möglichst genaue, satte Auflagerung der Platte, also die Erfüllung der Voraussetzung, von der die hier durchgeführten Betrachtungen ausgingen. Ausserdem wird man aber die Druckvertheilung um so mehr der gleichförmigen nähern können, je stärker man das Trägheitsmoment des Querschnitts der Platte namentlich nach der Mitte hin wählt. Ein Fall dieser Art wird in einer der folgenden Aufgaben behandelt.

Aufgaben.

32. Aufgabe. Eine Schiene, die hinreichend lang ist, um sie als unendlich lang betrachten zu können, ist ihrer ganzen Länge nach satt auf den Erdboden aufgelegt und wird in der Mitte durch eine Einzellast P belastet. Nach welchem Gesetze vertheilt sich der Druck auf den Boden?

Lösung. Wir legen hier besser das Coordinatensystem so, dass die Abscissen x von der belasteten Stelle aus nach rechts hin zählen. Dadurch wird an der Gültigkeit der Gl. (135) und (136) und der daraus folgenden nichts geändert. Folglich bleibt auch Gl. (140) unmittelbar anwendbar und es handelt sich nur noch um die Bestimmung der Integrationsconstanten aus den Grenzbedingungen. Für $x = \infty$ muss y verschwinden, daher müssen die Constanten C_1 und C_2 hier gleich Null gesetzt werden. Für $x = 0$ wird ferner der Symmetrie wegen $\frac{dy}{dx} = 0$ und daraus folgt $C_3 = C_4$. Zunächst bleibt also als Gleichung der Curve

$$y = C_3 e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x)$$

und für die Druckvertheilung hat man nach Gl. (138)

$$p = k C_3 \, e^{-\alpha x} (\cos \alpha x + \sin \alpha x).$$

Das Gesetz, nach dem sich der Druck der Länge nach vertheilt, ist hiermit schon gegeben. Man erkennt zunächst, dass p auch negativ wird, nämlich sobald x bis über den Werth

$$x = \frac{3\pi}{4\alpha}$$

angewachsen ist und weiterhin wieder. An der Stelle $x = \frac{3\pi}{4\alpha}$ ist der Factor $e^{-\alpha x}$ auf 0,094 des Werthes 1 an der Stelle $x = 0$ gesunken und er nimmt dann weiterhin schnell ab. Wir wollen annehmen, dass das Gewicht der Schiene hinreiche, um an den Stellen, wo p nach der Formel negativ wird, ein Abheben der Schiene von dem Boden zu verhindern oder auch, dass die Schiene an dem Boden befestigt ist. Wir können dann die vorher abgeleitete Gleichung überall als gültig betrachten. Der unbekannte constante Factor kC_3, der noch darin vorkommt, hat die Bedeutung des Druckes p_0 an der Stelle $x = 0$. Um diesen zu ermitteln, beachten wir, dass

$$\int_0^\infty p\,dx = \frac{P}{2}$$

sein muss. Die andere Hälfte der Last P kommt nämlich auf die nach links gelegene Schienenhälfte. Setzt man p in diese Gleichung ein und integrirt, so wird

$$\int_0^\infty p\,dx = p_0 \int_0^\infty e^{-\alpha x}(\cos\alpha x + \sin\alpha x)\,dx = p_0\left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}\cos\alpha x\right]_0^\infty = \frac{p_0}{\alpha}.$$

Demnach wird

$$p_0 = \frac{\alpha P}{2},$$

während α durch Gl. (141) bestimmt ist. Damit kennt man den Druck an jeder Stelle, vorausgesetzt, dass die Bettungsziffer k, das Trägheitsmoment des Schienenquerschnitts, der Elasticitätsmodul E und die Last P gegeben sind.

33. *Aufgabe. Eine Stange aus Flusseisen von 80 cm Länge und quadratischem Querschnitt von 6 cm Seite liegt satt auf dem Erdboden auf und trägt in der Mitte eine Last von 1000 kg. Wie gross ist der Druck, den die Stange in der Mitte und an den Enden auf den Erdboden ausübt und wie gross ist die Beanspruchung des Eisens, wenn der Boden unter einer specifischen Belastung von 1 kg pro 1 qcm eine elastische Einsenkung von 0,25 mm erfährt?*

Lösung. Für den linken Ast der elastischen Linie benutzen

wir wieder Gl. (140); den Ursprung des Coordinatensystems lassen wir mit dem linken Ende der Stange zusammenfallen. Wir können dann ohne Weiteres die in den Gl. (142) und (143) ausgesprochenen Grenzbedingungen benutzen. Dazu kommt, dass für $x = a = 40$ cm der Symmetrie wegen $\frac{dy}{dx} = 0$ sein muss. Dies liefert die Bedingungsgleichung

$$C_1 (m_1 - m_2) + C_2 (m_1 + m_2) - C_3 (m_3 + m_4) + C_4 (m_3 - m_4) = 0.$$

Hiermit lassen sich die übrigen Constanten C in einer davon ausdrücken. Um dies auch numerisch sofort ausführen zu können, berechnen wir zunächst α nach Gl. (141). Man hat hier

$$\Theta = \frac{bh^3}{12} = \frac{6^4}{12} = 108 \text{ cm}^4$$

und für Flusseisen setzen wir $E = 22 \cdot 10^5 \frac{kg}{cm^2}$. Die Constante k ist durch Gl. (138) eingeführt; ihre Dimension ist hiernach die einer specifischen Spannung. Denken wir uns auf 1 cm Länge der Stange einen specifischen Druck von 1 kg/cm² übertragen, so wird $p = \frac{6 \text{ kg}}{\text{cm}}$ und die zugehörige Einsenkung y nach den Angaben der Aufgabe gleich 0,25 mm, daher ist $k = \frac{p}{y} = 240 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$. Für α hat man daher

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{240 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}}{4 \cdot 22 \cdot 10^5 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2} \cdot 108 \text{ cm}^4}} = 0{,}0224 \cdot \text{cm}^{-1}.$$

Für αa ergibt sich hieraus $\alpha a = 0{,}896$, ferner

$$e^{\alpha a} = 2{,}450, \quad e^{-\alpha a} = 0{,}408, \quad \cos \alpha a = 0{,}625, \quad \sin \alpha a = 0{,}781$$

und daher auch

$$m_1 = 1{,}530, \quad m_2 = 1{,}912, \quad m_3 = 0{,}255, \quad m_4 = 0{,}319.$$

Die Gleichungen zwischen den Constanten C lauten also jetzt

$$C_2 = C_4; \quad C_1 = C_3 + 2C_4;$$

$$-0{,}382\, C_1 + 3{,}442\, C_2 - 0{,}574\, C_3 - 0{,}064\, C_4 = 0,$$

aus denen folgt:

$$C_1 = 4{,}73\, C_4; \quad C_2 = C_4; \quad C_3 = 2{,}73\, C_4.$$

Die Gleichung der elastischen Linie schreibt sich daher jetzt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{E\Theta} = -c$$

anschreiben, in der c eine Constante ist, die unbestimmt bleiben muss, weil keine Angabe über den Proportionalitätsfactor von M und Θ gemacht ist. Durch Integration folgt

$$y = -c\frac{x^2}{2} + K_1 x + K_2.$$

Für $x = a$ muss $\frac{dy}{dx} = 0$ sein und daraus folgt $K_1 = ca$. Man findet also

$$p = ky = kK_2 + \frac{ck}{2}(2ax - x^2).$$

Das Druckvertheilungsgesetz ist also hier genau parabolisch; für den Druck am Ende und in der Mitte hat man

$$p_0 = kK_2; \quad p_a = kK_2 + \frac{cka^2}{2}$$

und daher auch

$$p = p_0 + \frac{p_a - p_0}{a^2}(2ax - x^2),$$

wie bei der vorigen Aufgabe; daher ist auch wie dort

$$\frac{p_0 + 2p_a}{3}a = \frac{P}{2}$$

und hieraus folgt

$$p_0 = \frac{P}{2a} - \frac{cka^2}{3}; \qquad K_2 = \frac{P}{2ak} - \frac{ca^2}{3}.$$

Wenn c und k gegeben sind, kennt man hiermit die genaue Gestalt der elastischen Linie. Für das Biegungsmoment im Abstande x vom Ende folgt:

$$M = \int_0^x (x - u)p\,du = \frac{p_0 x^2}{2} + (p_a - p_0)\frac{4ax^3 - x^4}{12a^2}$$

und hieraus Θ mit Hülfe der Beziehung $\Theta = \frac{M}{Ec}$. Mit Θ ist auch die Höhe des Querschnitts als Function von x bestimmt.

Siebenter Abschnitt.

Die Festigkeit von ebenen Platten, die am ganzen Umfange unterstützt sind.

---

§ 42. Genauere Theorie der kreisförmigen Platte mit symmetrischer Belastung.

Als Belastung nehme ich hier entweder eine Einzellast in der Mitte oder einen gleichförmig über die ganze Fläche vertheilten Druck an, obschon die Aufgabe in ganz gleicher Weise auch für eine andere Lastvertheilung gelöst werden kann, wenn diese nur symmetrisch ist, d. h. wenn sie in gleichen Abständen von der Mitte ringsum gleich ist. Für andere Lastvertheilungen wird die Rechnung zu verwickelt; man ist dann in der Praxis auf eine Schätzung angewiesen. Glücklicherweise kommen aber die Fälle der symmetrischen Lastvertheilung weitaus am häufigsten vor.

Ferner setze ich voraus, dass auch die Stützung der Platte am Rande überall in der gleichen Weise erfolgt und zwar entweder so, dass die Platte am Rande eingeklemmt ist, oder so, dass sie frei aufliegt. Der letzte Fall ist im Gegensatze zur Biegungstheorie des Balkens schwieriger zu behandeln, als der andere. Bei der frei aufliegenden Platte betheiligen sich nämlich auch die über den Auflagerkreis hinausreichenden Theile der Platte an der Kraftübertragung und es ist daher keineswegs gleichgültig, um wie viel die Platte übersteht. Ich werde indessen annehmen, dass sie nur wenig übersteht, so

dass die Spannungen in dem überstehenden Theile unberücksichtigt bleiben können.

Von vornherein ist klar, dass die Untersuchung in einer gewissen Verwandtschaft mit der Biegungstheorie des Balkens steht nnd in der That lehnt sich die Betrachtung im grossen Ganzen an die dort durchgeführte an. An die Stelle der elastischen Linie tritt hier die elastische Fläche, in die die Mittelebene der Platte (so soll die in der halben Plattendicke parallel zu den Grenzflächen gezogene Ebene genannt werden) durch die Formänderung übergeführt wird. Wie früher beim Balken nehmen wir an, dass die Ordinaten y der elastischen Fläche, von der ursprünglichen Lage der Mittelebene an gerechnet, klein bleiben. Der Symmetrie wegen hängt y nur von dem Abstande x von der Symmetrieaxe (d. h. von der im Mittelpunkte der Mittelebene zu dieser errichteten Senkrechten) ab; die elastische Fläche ist also eine Umdrehungsfläche. Dann sollen auch die etwa parallel zur Mittelebene auftretenden elastischen Verschiebungen von Punkten der Mittelebene gegenüber den Ordinaten y vernachlässigt werden, wie es schon beim Balken geschehen ist.

Auch eine Voraussetzung über die besondere Art der Formänderung, die der Bernouilli'schen Annahme, dass die Querschnitte des Balkens bei der Biegung eben bleiben, entspricht, ist hier erforderlich. Wir setzen als hinreichend genau zutreffend voraus, dass alle Punkte der Platte, die vorher auf einer zur Mittelebene senkrecht gezogenen Graden lagen, auch nach der Formänderung noch auf einer Graden liegen, die der Symmetrie wegen die Symmetrieaxe der Platte schneiden muss (wenn sie nicht parallel zu ihr bleibt). Ein ringförmig um die Symmetrieaxe gezogener cylindrischer Schnitt, der etwa dem Querschnitte beim Balken entspricht, soll also durch die Formänderung nur in eine Kegelfläche übergehen können.

Nach diesen Festsetzungen müssen wir, wie es früher beim Balken geschehen ist, zunächst einen Ausdruck für die specifischen Längenänderungen aufstellen, die bei der Formänderung eintreten, und daraus einen Schluss über die Spannungsver-

theilung ziehen. In einem Punkte, der den Abstand x von der Symmetrieaxe und den Abstand z von der Mittelebene hat (vgl. Abb. 54) treten Dehnungen in tangentialer und in radialer Richtung auf, die wir mit ε_t und ε_r bezeichnen. Der durch den Punkt gehende Kreis vom Radius x hat sich nämlich wegen der Neigung φ, die die Normale zur elastischen Fläche gegen die Symmetrieaxe angenommen hat, um den Betrag $z\varphi$

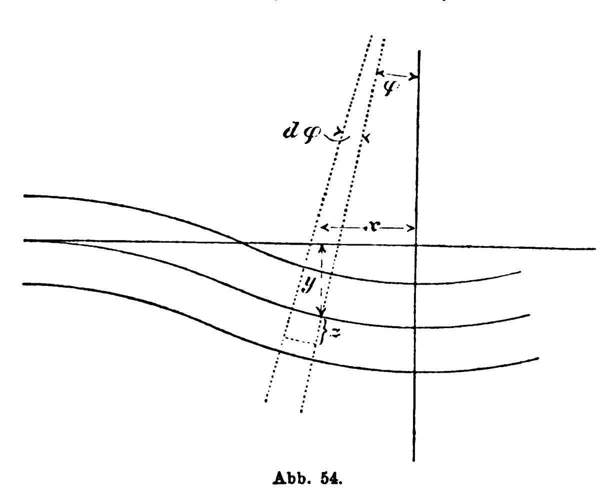


Abb. 54.

vergrössert. Der Neigungswinkel φ wird als hinreichend klein vorausgesetzt, um den Bogen an Stelle des Sinus nehmen zu können. In demselben Verhältnisse wie der Radius wächst auch der Umfang eines Kreises und hierdurch kommt die specifische Dehnung ε_t in tangentialer Richtung zu Stande. Man hat daher

$$\varepsilon_t = \frac{z\varphi}{x}. \tag{147}$$

Um die Dehnung in radialer Richtung zu ermitteln, ziehe ich im Abstande dx eine zweite Normale zur elastischen Fläche. Der Winkel zwischen beiden Normalen ist mit $d\varphi$ zu bezeichnen. Die durch den Punkt z gehende Faser ist zwischen beiden Normalen um $zd\varphi$ länger geworden, als die Faser in der Mittelebene, die unverändert blieb. Die specifische Deh-

nung ε_r folgt daraus durch Division mit der ursprünglichen Länge dx, also

$$\varepsilon_r = \frac{z\,d\varphi}{dx}. \tag{148}$$

Dieser letzte Ausdruck entspricht genau dem früher für den Balken festgestellten; dagegen kommt bei der Platte die Dehnung ε_t hinzu, die beim Balken gleichgültig blieb. Es treten daher hier neben den Spannungen in radialer Richtung σ_r (entsprechend den Biegungsspannungen des Balkens) auch noch solche in tangentialer Richtung σ_t auf, die mit den Dehnungen nach dem Elasticitätsgesetze durch die Gleichungen

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_r\right); \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \frac{1}{m}\sigma_t\right)$$

zusammenhängen. Durch Auflösen dieser Gleichungen nach σ_t und σ_r erhält man

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2-1}(m\varepsilon_t + \varepsilon_r); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2-1}(m\varepsilon_r + \varepsilon_t), \tag{149}$$

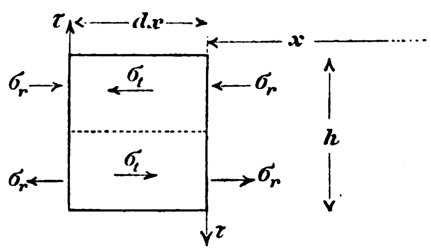
oder nach Einführung der Werthe für die Dehnungen aus den Gleichungen (147) und (148)

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2-1}z\left(m\frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx}\right); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2-1}z\left(m\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}\right). \tag{150}$$

Die Spannungsvertheilung längs einer Normalen, sowohl die von σ_r als die von σ_t, befolgt daher ein lineares Gesetz; die Spannungen sind den Abständen von der Mittelebene proportional.

Nachdem diese Ausdrücke für die Spannungen ermittelt sind, müssen wir das Gleichgewicht eines Plattenelementes untersuchen. Zu diesem Zwecke denke ich mir durch die Symmetrieaxe zwei Meridianebenen gelegt, die einen beliebigen unendlich kleinen Winkel $d\alpha$ miteinander bilden; von der Formänderung bleibt dieser unberührt. Zwischen beiden Ebenen lege ich ferner zwei cylindrische Schnitte mit den Radien x und $x + dx$. Hierdurch wird das in Abb. 55 in Aufriss und Grundriss gezeichnete Plattenelement abgegrenzt. An den vier Schnittflächen treten zunächst die Spannungen σ_r und σ_t auf, die sich an jeder Schnittfläche zu einem Kräftepaare zusammen-

setzen lassen. Ausserdem kommen aber an den cylindrischen Schnittflächen noch die Schubspannungen τ vor, durch die die Last im mittleren Theile der Platte nach dem Auflager übertragen wird. Wir haben eine Gleichung aufzustellen, durch die die Bedingung für das Gleichgewicht aller dieser Kräfte an dem Plattenelemente zum Ausdrucke gebracht wird.



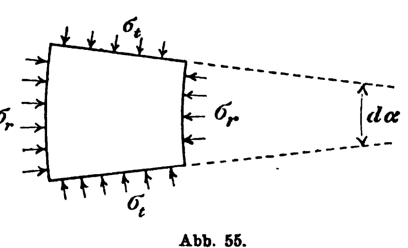


Abb. 55.

Zunächst fasse ich die Spannungen σ_t in's Auge. Zu jedem Flächenelemente dF des einen Meridianschnitts gehört ein Flächenelement des anderen, in dem die Spannung σ_t ebenso gross und entgegengesetzt gerichtet ist. Die Richtungslinie beider Kräfte $\sigma_t dF$ schneiden sich in der Symmetriebene des Plattenelementes und ich will mir beide an diesem Angriffspunkte zu einer Resultirenden vereinigt denken. Diese fällt selbst in die Symmetrieebene und sie hat die Grösse $\sigma_t dF \cdot d\alpha$. In der Symmetrieebene lassen sich alle die Kräfte, die zu den verschiedenen Flächenelementen dF eines Meridianschnitts gehören, zu einem resultirenden Kräftepaare vereinigen, dessen Moment leicht festgestellt werden kann. Für einen auf der Mittelebene gelegenen Momentenpunkt hat nämlich die Kraft $\sigma_t dF d\alpha$ das Moment $\sigma_t z dF d\alpha$ und im Ganzen ist daher, mit Berücksichtigung von Gl. (150)

$$\text{Mom. der } \sigma_t = d\alpha \int \sigma_t z dF = d\alpha \frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx}\right)\int z^2 dF.$$

Das hier noch vorkommende Integral ist das Trägheitsmoment der Meridianschnittfläche und daher

$$\int z^2 dF = dx \frac{h^3}{12}.$$

Damit erhalten wir schliesslich

$$\text{Mom. der } \sigma_t = \frac{mE}{m^2-1} \cdot \frac{h^3}{12}\left(m\frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx}\right) dx\, d\alpha. \tag{151}$$

Hier muss noch eine Bemerkung über das Vorzeichen beigefügt werden. Die Ordinaten z rechnete ich nach abwärts positiv. Wenn φ und $\frac{d\varphi}{dx}$ positiv sind, treten im unteren Theile Zugspannungen σ_t auf und die Resultirende solcher Zugspannungen in beiden Meridianschnitten hat in der Symmetrieebene des Plattenelementes den Pfeil nach der Plattenmitte hin gerichtet, wie er in Abb. 55 eingetragen ist. Oben, d. h. bei negativem z, kehren sich die Richtungen um und das aus den Spannungen σ_t resultirenden Kräftepaar sucht das Plattenelement entgegengesetzt dem Uhrzeigersinn zu drehen. Daher ist der in Gl. (151) festgestellte Werth des Moments später mit negativem Vorzeichen in die Momentengleichung einzuführen.

Jetzt komme ich zu den Spannungen σ_r. In der Schnittfläche, die zum Radius x gehört, bilden die Spannungen σ_r ein Kräftepaar, dessen Moment sich mit Rücksicht auf Gl. (150) zu

$$\int \sigma_r dF z = \frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}\right)\int z^2 dF$$

berechnet. Das Integral ist das Trägheitsmoment eines Rechtecks von der Breite $x d\alpha$ und der Höhe h; der vorige Ausdruck geht daher über in

$$\frac{mE}{m^2-1} \cdot \frac{h^3}{12}\left(mx\frac{d\varphi}{dx} + \varphi\right) d\alpha.$$

Dazu kommt das Kräftepaar der Spannungen σ_r an der gegenüber liegenden Schnittfläche, das den entgegengesetzten Drehsinn hat. Es kommt also nur auf den Unterschied zwischen beiden Momenten an. Dieser Unterschied ist das Differential des vorausgehenden Ausdrucks, das einem Anwachsen des Ab-

standes x um dx entspricht. Durch Ausführung der Differentiation finden wir

$$\text{Mom. aller } \sigma_r = \frac{mE}{m^2-1} \cdot \frac{h^3}{12}\left(mx\frac{d^2\varphi}{dx^2} + m\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}\right)dx\,d\alpha. \quad (152)$$

In Bezug auf das Vorzeichen ist zu bemerken, dass bei positivem φ und $\frac{d\varphi}{dx}$ die Spannungen σ_r in der unteren Hälfte Zugspannungen sind und dass das Kräftepaar im Schnitte x daher entgegengesetzt dem Uhrzeigersinne dreht. Im Schnitte $x + dx$ dreht es also im Uhrzeigersinne. Wenn das vorher berechnete Differential positiv ist, gibt es demnach ein im positiven Sinne drehendes Moment an, d. h. Mom. aller σ_r ist ohne Vorzeichenwechsel in die Momentengleichung einzuführen.

Endlich führen auch noch die Schubspannungen zu einem Kräftepaare, dessen Moment berechnet werden muss. Hier müssen wir nun eine nähere Bestimmung darüber treffen, für welche Belastung die Rechnung weiter durchgeführt werden soll, während alle vorausgehenden Betrachtungen bei jeder symmetrisch vertheilten Belastung in Gültigkeit bleiben. Wir wollen jetzt annehmen, dass die Belastung in einem gleichförmig über die Fläche der Platte vertheilten Drucke p auf die Flächeneinheit bestehe. Dieser Fall liegt z. B. vor, wenn ein Cylinderdeckel einem Flüssigkeitsdrucke ausgesetzt ist. — Zur Berechnung der übertragenen Scheerkraft denken wir uns einen ringförmigen Schnitt mit dem Halbmesser x geführt. Der dadurch nach Innen hin abgegrenzte Theil der Platte trägt dann eine Belastung von der Grösse

$$\pi x^2 p$$

und ihr muss durch die Scheerkräfte im Ringschnitte das Gleichgewicht gehalten werden. Auf den zwischen die beiden Meridianschnitte mit dem Centriwinkel $d\alpha$ fallenden Theil des Ringschnittes kommt davon der Bruchtheil $\frac{d\alpha}{2\pi}$, so dass also an dem Plattenelemente im Schnitte x die Scheerkraft

$$\frac{x^2 p}{2}\,d\alpha$$

übertragen wird. Im Schnitte $x + dx$ ist die übertragene Scheerkraft um ein Differential grösser, so dass der Unterschied der auf das Plattenelement selbst kommenden Belastung entspricht. Bei Feststellung des Momentes kommt es aber auf diesen von höherer Ordnung unendlich kleinen Unterschied nicht an und wir haben

$$\text{Mom. der } \tau = \frac{x^2 p}{2} d\alpha\, dx. \tag{153}$$

Das Vorzeichen dieses Momentes ist, wie schon ein Blick auf Abb. 55 lehrt, positiv.

Das Gleichgewicht des Plattenelementes gegen Drehung erfordert, dass die algebraische Summe aller dieser Momente gleich Null ist, also

$$\text{Mom. der } \sigma_t + \text{Mom. aller } \sigma_r + \text{Mom. der } \tau = 0,$$

oder wenn wir die dafür berechneten Werthe einführen und zugleich auf die Bemerkungen über die Vorzeichen achten,

$$-\frac{mE}{m^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(m\frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{mE}{m^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(mx\frac{d^2\varphi}{dx^2} + m\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{px^2}{2} = 0.$$

Die gemeinsamen Faktoren $d\alpha$ und dx sind hier schon fortgehoben. Die Gleichung vereinfacht sich weiter zu

$$\frac{m^2 E}{m^2-1}\frac{h^3}{12}\left(x\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x}\right) + \frac{px^2}{2} = 0.$$

Zur Abkürzung beim Anschreiben der folgenden Formeln setzen wir

$$N = \frac{6(m^2-1)}{m^2 E h^3} p, \tag{154}$$

so dass also N einen constanten Werth bezeichnet, der als gegeben zu betrachten ist. Die vorige Gleichung geht dann über in

$$x^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + x\frac{d\varphi}{dx} - \varphi + Nx^3 = 0. \tag{155}$$

Man kennt die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung; sie lautet

$$\varphi = -\frac{N}{8}x^3 + Bx + \frac{C}{x}, \tag{156}$$

worin B und C die beiden willkürlichen Integrationsconstanten sind. Durch Einsetzen des angegebenen Ausdrucks in Gl. (155) überzeugt man sich leicht, dass er diese Gleichung befriedigt, und dass er die allgemeinste Lösung bildet folgt daraus, dass er zwei unbestimmte Constanten umfasst.

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten aus den Grenzbedingungen dient zunächst die Bemerkung, dass φ für $x = 0$ verschwinden muss. Daher ist $C = 0$ zu setzen. Die Constante B hängt von der Bedingung ab, der die Platte am Rande unterworfen ist. Wir wollen zunächst annehmen, dass die Platte eingespannt sei, dass also die elastische Fläche längs des Kreises $x = r$ von der horizontalen Ebene, mit der die Mittellinie ursprünglich zusammenfiel, berührt wird. Dann muss φ auch für $x = r$ verschwinden und aus

$$0 = -\frac{N}{8}r^3 + Br$$

folgt $B = \frac{N}{8}r^2$. Wir kennen jetzt φ vollständig, nämlich

$$\varphi = \frac{N}{8}\left(r^2x - x^3\right) = \frac{3(m^2-1)}{4m^2Eh^3}p\,(r^2x - x^3). \tag{157}$$

Nach den Gl. (147) und (148) findet man hiermit auch die elastischen Dehnungen und damit die Beanspruchung des Materials. Durch Einsetzen erhält man

$$\varepsilon_t = \frac{N}{8}(r^2 - x^2)z; \quad \varepsilon_r = \frac{N}{8}(r^2 - 3x^2)z. \tag{158}$$

In der Mitte der Platte, also für $x = 0$, werden ε_r und ε_t einander gleich und zwar gleich $\frac{N}{8}r^2z$. Dies war auch von vornherein zu erwarten, denn dieselbe Dehnung, die für einen Meridianschnitt als ε_t zu bezeichnen ist, d. h. die zu dieser Meridianebene senkrecht steht, gilt hier für einen anderen Meridianschnitt, der in der Richtung der Dehnung gelegt ist, als ε_r. Nach aussen zu (bei wachsendem x) nehmen sowohl ε_t als ε_r ab; am Rande wird ε_t zu Null und $\varepsilon_r = -\frac{N}{4}r^2z$, also dem Absolutbetrage nach doppelt so gross als in der Mitte. Am Rande tritt also die grösste Beanspruchung des Materials auf;

man hat zu erwarten, dass der Bruch der Platte durch die Bildung eines ringförmigen Risses längs des Auflagers eingeleitet wird. Die reducirte Spannung, die als Maass für die Beanspruchung des Materials zu betrachten ist, erhält man aus ε_r, nachdem darin $x = r$ und $z = \frac{h}{2}$ gesetzt ist, durch Multiplication mit dem Elasticitätsmodul E, also

$$\sigma_{\text{red}} = E\frac{Nr^2}{4} \cdot \frac{h}{2} = \frac{3(m^2-1)}{4m^2} \cdot \frac{r^2}{h^2}p = 0{,}68p\frac{r^2}{h^2} \text{ für } m = \frac{10}{3} \cdot \quad (159)$$

Die Spannungen σ_t und σ_r kann man nach den Gl. (149) oder (150) ebenfalls sofort anschreiben, nachdem φ, bezw. die Dehnungen ε_t und ε_r ermittelt sind. Es hat aber kaum einen Zweck, da die ganze Untersuchung nur auf die Ermittelung der Beanspruchung des Materials hinausläuft und diese durch σ_{red} schon angegeben wird.

Nur die Frage nach der Gestalt der elastischen Fläche bleibt jetzt noch zu beantworten. Dazu bemerke ich, dass φ zugleich den Neigungswinkel angibt, den die Tangente an die Meridianlinie der elastischen Fläche mit der Richtung der X-Axe bildet. Mit Rücksicht auf die aus Abb. 54 einzusehenden Festsetzungen über die positiven Richtungen hat man daher

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tg}\varphi.$$

Da der Winkel φ klein ist, kann an Stelle der Tangente auch der Winkel selbst gesetzt werden; mit Rücksicht auf Gl. (157) hat man daher

$$\frac{dy}{dx} = \frac{N}{8}(r^3 - r^2 x). \quad (160)$$

Durch Integration erhält man daraus

$$y = \frac{N}{8}\left(\frac{x^4}{4} - r^2\frac{x^2}{2}\right) + C$$

und die Integrationsconstante C bestimmt sich aus der Bedingung, dass für $x = r$ die Einsenkung y zu Null werden muss. Dies liefert

$$C = \frac{Nr^4}{32}$$

und daher schliesslich

$$y = \frac{N}{32}(x^4 - 2r^2x^2 + r^4) = \frac{N}{32}(x^2 - r^2)^2 \tag{161}$$

Von besonderem Interesse ist die Einsenkung, die die Platte in der Mitte erfährt, also die Ordinate y für $x = 0$. Wir wollen sie, wie früher beim Balken, den Biegungsfeil f nennen und erhalten

$$f = \frac{Nr^4}{32}.$$

Nach Einsetzen des Werthes von N aus Gl. (154) und mit $m = \frac{10}{3}$ geht dies über in

$$f = \frac{3(m^2 - 1)}{16m^2Eh^3}pr^4 = 0{,}17\frac{pr^4}{Eh^3}. \tag{162}$$

§ 43. **Fortsetzung für den Fall einer Einzellast P in der Mitte.**

Die Entwickelungen des vorigen Paragraphen bleiben gültig bis nach Gl. (152). Die Scheerkraft, die in einem ringförmigen Schnitte übertragen wird, ist aber hier gleich P und auf den zu dem Plattenelemente gehörigen Theil dieses Schnittes kommt davon $P\frac{d\alpha}{2\pi}$. Für das Moment des aus den Scheerspannungen gebildeten Kräftepaars hat man daher

$$\text{Mom. der } \tau = \frac{P}{2\pi}d\alpha\, dx \tag{163}$$

an Stelle von Gl. (153). Die Momentengleichung, die die Bedingung für das Gleichgewicht des Plattenelementes gegen Drehen ausspricht, lautet daher hier

$$-\frac{mE}{m^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(m\frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{mE}{m^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(mx\frac{d^2\varphi}{dx^2} + m\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}\right) + \frac{P}{2\pi} = 0,$$

woraus man, wie früher, nach Einführung der abkürzenden Bezeichnung

$$Q = \frac{6(m^2-1)P}{\pi m^2 Eh^3} \tag{164}$$

für φ die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$x^2 \frac{d^2 \varphi}{d x^2} + x \frac{d \varphi}{d x} - \varphi + Q x = 0 \tag{165}$$

erhält. Auch die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist bekannt; sie lautet

$$\varphi = -\frac{Q}{2} x \lg x + B x + \frac{C}{x}, \tag{166}$$

wie man sich durch Einsetzen leicht überzeugt. Die Integrationsconstante C muss wieder gleich Null gesetzt werden, damit φ in der Mitte zu Null wird und für B erhält man, falls die Platte am Rande eingespannt ist, aus der Bedingung $\varphi = 0$ für $x = r$

$$B = \frac{Q}{2} \lg r.$$

Damit geht Gl. (166) über in

$$\varphi = \frac{Q}{2} x \lg \frac{r}{x}. \tag{167}$$

Aus den Gl. (147) und (148) erhält man für die specifischen Dehnungen

$$\varepsilon_t = \frac{Q}{2} z \lg \frac{r}{x}; \quad \varepsilon_r = \frac{Q}{2} z \left(\lg \frac{r}{x} - 1\right). \tag{168}$$

Für $x = 0$ werden diese Ausdrücke unendlich gross, d. h. die Platte müsste zerbrechen, wenn es möglich wäre, den Druck P in einem einzigen Punkte zu concentriren, wie es bei Ableitung der Formeln vorausgesetzt war. In Wirklichkeit wird sich aber die Belastung immer auf einer kleinen Fläche vertheilen und die Gl. (168) sind daher zur Berechnung der Beanspruchung des Materials in der Mitte unbrauchbar. Für das Verhalten der Platte am Rande ist es dagegen gleichgültig, ob die Last genau oder nur angenähert in der Mitte concentrirt ist; wir können also die Formeln zur Berechnung der Beanspruchung am Umfange benutzen. Mit $x = r$ erhalten wir $\varepsilon_t = 0$ und $\varepsilon_r = -\frac{Q}{2} z$, also ist dort mit $z = \frac{h}{2}$ und $m = \frac{10}{3}$

$$\sigma_{red} = \frac{3(m^2 - 1)}{2 \pi m^2} \frac{P}{h^2} = 0{,}43 \frac{P}{h^2}. \tag{169}$$

Die Beanspruchung am Rande ist also ganz unabhängig vom Radius der Platte.

Um über die thatsächlich in der Mitte zu erwartende Beanspruchung des Materials in's Klare zu kommen, nehmen wir an, dass sich die Last P über einen kleinen Kreis vom Halbmesser a gleichförmig vertheile. Die Meridianlinie der elastischen Fläche setzt sich aus zwei Aesten zusammen, von denen der eine von $x = 0$ bis $x = a$ reicht und der Gl. (156) entspricht, während für den anderen von $x = a$ bis $x = r$ Gl. (166) gilt. Für den ersten Ast hat man also

$$\varphi = -\frac{N}{8}x^3 + Bx$$

und für den zweisten Ast, wenn man jetzt die Integrationsconstanten mit anderen Buchstaben bezeichnet,

$$\varphi = -\frac{Q}{2}x\lg x + Dx + \frac{F}{x}.$$

Beide Aeste müssen sich ohne Knick aneinanderschliessen; zwischen den Constanten B, D, F besteht daher die erste der beiden Gleichungen

$$-\frac{N}{8}a^3 + Ba = -\frac{Q}{2}a\lg a + Da + \frac{F}{a},$$

$$-\frac{3N}{8}a^2 + B = -\frac{Q}{2}\lg a - \frac{Q}{2} + D - \frac{F}{a^2}.$$

Die zweite Gleichung folgt daraus, dass zu beiden Seiten des ringförmigen Schnittes $x = a$ die Spannung σ_r nach dem Gesetze der Action und Reaction von gleicher Grösse sein muss. Dazu gehört aber nach Gl. (150), dass auch $\frac{dy}{dx}$ an der Anschlussstelle für beide Aeste gleich gross ist.

Man erhält durch Auflösen nach F und D

$$F = \frac{a^2}{8}(Na^2 - 2Q),$$

$$D = B - \frac{Na^2}{4} + \frac{Q}{4} + \frac{Q}{2}\lg a.$$

Dann muss noch beim zweiten Aste $\varphi = 0$ sein für $x = r$, also

$$0 = -\frac{Q}{2}r\lg r + Dr + \frac{F}{r}.$$

Setzt man hier die Werthe von F und D ein und löst dann die Gleichung nach B auf, so erhält man

$$B = \frac{Q}{2} \lg \frac{r}{a} + \frac{Na^2}{4} + \frac{a^2}{8r^2}(2Q - Na^2) - \frac{Q}{4}.$$

Nun ist noch auf die Beziehung zu achten, die hier zwischen N und Q besteht. Der Ausdruck N in Gl. (154) geht hier, weil $p = \frac{P}{\pi a^2}$ zu setzen ist, über in

$$N = \frac{6(m^2 - 1)}{m^2 E h^3} \cdot \frac{P}{\pi a^2}$$

und der Vergleich mit dem Ausdrucke Q in Gl. (164), der hier keine Aenderung erleidet, zeigt, dass

$$Na^2 = Q$$

ist. Für die Integrationsconstante B hat man daher auch

$$B = \frac{Q}{8}\left(4 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2}\right) \tag{170}$$

und schliesslich für den ersten Ast (von $x = 0$ bis $x = a$)

$$\varphi = \frac{Q}{8} x \left(4 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{x^2}{a^2}\right). \tag{171}$$

Damit sind wir in den Stand gesetzt, auch die Dehnungen und die Beanspruchung des Materials in dem kleinen Mittelstück anzugeben. Nach den Gl. (147) und (148) wird nämlich

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_t &= \frac{Q}{8} z \left(4 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{x^2}{a^2}\right) \\ \varepsilon_r &= \frac{Q}{8} z \left(4 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2} - \frac{3x^2}{a^2}\right). \end{aligned}\right\} \tag{172}$$

Beide Dehnungen nehmen den grössten und zwischen beiden übereinstimmenden Werth an der Stelle $x = 0$ an. Die reducirte Spannung in der Mitte ist daher

$$\sigma_{red} = \frac{EQ}{8} z \left(4 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2}\right)$$

oder nach Einführung des Werthes von Q und mit $z = \frac{h}{2}$

$$\sigma_{red} = \frac{3(m^2 - 1)}{8\pi m^2} \frac{P}{h^2} \left(4 \lg \frac{r}{a} + \frac{a^2}{r^2}\right).$$

Das letzte Glied in der Klammer kann gegen das erste vernachlässigt werden, wenn a in der That klein gegen r ist; hiermit und nach Einführung von $m = \frac{10}{3}$ wird

$$\sigma_{red} = 0{,}43 \frac{P}{h^2} \lg \frac{r}{a}. \tag{173}$$

Mit der Spannung am Rande würde dies übereinstimmen, wenn $r = 2{,}718 \cdot\cdot a$ wäre; wenn a kleiner ist, wird aber das Material am meisten in der Mitte beansprucht. Für $a = 0{,}1\,r$ z. B. wird

$$\sigma_{red} = 1{,}00 \frac{P}{h^2}$$

und für $a = 0{,}01\,r$

$$\sigma_{red} = 1{,}98 \frac{P}{h^2}.$$

Man sieht daraus, dass die Beanspruchung allerdings erheblich zunimmt, wenn sich die Last mehr concentrirt, dass aber ein Unendlichwerden, wie es nach den Gl. (168) zu erwarten gewesen wäre, in Wirklichkeit nicht zu befürchten ist. Auf besondere Zuverlässigkeit können übrigens die zuletzt angeschriebenen Formeln keinen Anspruch machen, weil in der Nähe der Lastangriffsstelle noch locale Wirkungen und infolgedessen Abweichungen von den sonst hinreichend genau zutreffenden Annahmen über die Formänderung und die Spannungsvertheilung hinzutreten, die in der Theorie nicht berücksichtigt sind. Die Formeln sollen vielmehr nur ein ungefähres Bild von der Beanspruchung geben, die man etwa zu erwarten hat.

Schliesslich sei noch die Gestalt der elastischen Fläche und der Biegungspfeil für diesen Belastungsfall ermittelt. Dabei ist es nicht nöthig, den inneren Ast der Meridianlinie besonders zu berücksichtigen, da das Gesetz der Meridianlinie längs dieses kleinen Abschnitts nicht von merklichem Einflusse auf den Biegungspfeil sein kann. Aus Gl. (167) schliessen wir, wie im vorigen Paragraphen

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{Q}{2} x \lg \frac{r}{x}. \tag{174}$$

Durch Integration folgt daraus

$$y = -\frac{Qx^2}{4} \lg r + \frac{Qx^2}{4} \lg x - \frac{Qx^2}{8} + C. \tag{175}$$

Die Integrationsconstante bestimmt sich durch die Bedingung, dass y am Rande verschwinden muss. Daraus folgt

$$C = \frac{Qr^2}{8}$$

und man hat

$$y = Q\frac{r^2 - x^2}{8} - \frac{Qx^2}{4}\lg\frac{r}{x}. \tag{176}$$

Diese Gleichung lassen wir aus dem vorher angegebenen Grunde bis zur Mitte hin gelten. Für $x = 0$ nimmt das zweite Glied der rechten Seite die unbestimmte Form $0 \cdot \infty$ an; der richtige Werth ist aber, wie man leicht einsieht, Null, denn ein Logarithmus wächst viel langsamer als der Numerus, zu dem er gehört. Darum wird schon $x \lg x$ zu Null für $x = 0$ und $x^2 \lg x$ umsomehr. Für den Biegungspfeil f erhalten wir demnach aus Gl. (176)

$$f = \frac{Qr^2}{8} = \frac{3(m^2 - 1)}{4\pi m^2} \cdot \frac{Pr^2}{Eh^3} = 0{,}22\frac{Pr^2}{Eh^3}. \tag{177}$$

wenn $m = \frac{10}{3}$ gesetzt wird. Der Vergleich von Gl. (177) mit Gl. (162) lehrt, dass der Biegungspfeil viermal so gross wird, wenn die Last P in der Mitte concentrirt ist, als wenn sie sich gleichmässig über die ganze Fläche der Platte vertheilt.

§ 44. Fortsetzung für den Fall, dass die Platte am Rande frei aufliegt.

Für den Fall einer gleichförmig vertheilten Belastung bleiben hier alle Betrachtungen von § 42 bis nach Gl. (156) gültig. Die Integrationsconstante C von Gl. (156) ist auch hier gleich Null zu setzen; dagegen nimmt die Integrationsconstante B in

$$\varphi = -\frac{N}{8}x^3 + Bx \tag{178}$$

einen anderen Werth an als dort. Vorausgesetzt, dass die Platte am Rande nur knapp übersteht, muss dort σ_r zu Null werden und diese Bedingung gestattet uns, B zu ermitteln. Im anderen Falle, wenn die Platte um ein grösseres Stück über

den Auflagerkreis hinausreicht, muss noch der äussere Ast der Meridiancurve der elastischen Fläche näher untersucht und zuletzt die Bedingung eingeführt werden, dass am Rande der Platte die Spannungen in radialer Richtung zu Null werden. Dass σ_r hier verschwindet, folgt daraus, dass der ringförmige Schnitt hier die Grenze des Körpers bildet und dass der Voraussetzung zufolge äussere Kräfte an dieser Stelle nicht einwirken.

Die hier angedeutete Rechnung bietet nun zwar an und für sich keine besonderen Schwierigkeiten; vielmehr kann das Gesetz des äusseren Meridianastes leicht aus den Formeln für den inneren Ast entnommen werden, wenn man darin $N = 0$ setzt. Immerhin erfordert aber die Durchführung einige Zeit, da man ausser B in Gl. (178) auch noch zwei Integrationsconstanten für den äusseren Ast aus den Grenzbedingungen ermitteln muss. (Zu diesen Grenzbedingungen gehört natürlich auch der stetige Uebergang aus dem inneren Aste in den äusseren.) Ich sehe deshalb von dieser umständlicheren Betrachtung ab und nehme an, dass σ_r schon für $x = r$ (oder schon unmittelbar nach $x = r$) verschwinden muss, weil die Platte dort zu Ende ist und keine Auflagerkräfte an der ringförmigen Schnittfläche übertragen werden.

Für σ_r hat man nach Gl. (150)

$$\sigma_r = \frac{mE}{m^2 - 1} z \left(m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}\right).$$

Der Klammerwerth muss also für $x = r$ verschwinden. Nun ist nach Gl. (178)

$$m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x} = -(3m + 1)\frac{Nx^2}{8} + (m + 1)B.$$

Für $x = r$ hat man daher die Bedingungsgleichung

$$B = \frac{3m + 1}{m + 1} \frac{Nr^2}{8}. \tag{179}$$

womit die Constante B ermittelt ist. Hiermit geht Gl. (178) über in

$$\varphi = \frac{N}{8}\left(\frac{3m + 1}{m + 1} r^2 x - x^3\right). \tag{180}$$

Für die Dehnungen ε_r und ε_t erhält man

$$\varepsilon_t = \frac{N}{8} z \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 - x^2 \right); \quad \varepsilon_r = \frac{N}{8} z \left(\frac{3m+1}{m+1} \cdot r^2 - 3x^2 \right). \quad (181)$$

Die grösste Dehnung tritt in der Mitte auf; man hat dort

$$\varepsilon_r = \varepsilon_t = \frac{N}{8} z \frac{3m+1}{m+1} r^2$$

und daraus folgt für die reducirte Spannung, wenn man den Werth von N aus Gl. (154) einführt, $z = \frac{h}{2}$ und schliesslich noch $m = \frac{10}{3}$ setzt

$$\sigma_{\text{red}} = \frac{3(m^2-1)(3m+1)}{8m^2(m+1)} \cdot \frac{r^2}{h^2} p = 0{,}87 \frac{r^2}{h^2} p. \quad (182)$$

Im Gegensatze zu der Platte mit eingeklemmtem Rande wird hier das Material in der Mitte am meisten angestrengt; der Bruch wird also von hier aus beginnen. Die Beanspruchung wird hier im Verhältnisse $87:68 = 1{,}28$ grösser an der ungünstigsten Stelle als im früheren Falle.

Um noch den Biegungspfeil zu berechnen, setze ich wieder

$$\frac{dy}{dx} = -\varphi = \frac{N}{8}\left(x^3 - \frac{3m+1}{m+1} r^2 x \right), \quad (183)$$

woraus durch Integration folgt

$$y = \frac{N}{8}\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3m+1}{m+1} \cdot \frac{r^2 x^2}{2} \right) + C. \quad (184)$$

Für $x = r$ muss y verschwinden; daraus erhält man die Integrationsconstante C

$$C = \frac{N}{8}\left(\frac{3m+1}{m+1} \cdot \frac{r^4}{2} - \frac{r^4}{4} \right).$$

Wenn in Gl. (184) $x = 0$ gesetzt wird, erhält man $y = C$, d. h. die Integrationsconstante C giebt zugleich den Biegungspfeil f an. Setzt man den Werth von N ein und später auch noch $m = \frac{10}{3}$, so wird daher

$$f = \frac{3}{16} \cdot \frac{m^2-1}{m^2 E h^3} \cdot p \cdot \frac{5m+1}{m+1} r^4 = 0{,}70 \frac{p}{E} \cdot \frac{r^4}{h^3}. \quad (185)$$

Der Biegungspfeil wird also hier, wie ein Vergleich mit Gl. (162) lehrt, etwas mehr als viermal so gross, als bei ein-

geklemmtem Rande. Bei Versuchen über das Verhalten kreisförmiger Platten bei gleichförmiger Belastung kann die Wirksamkeit einer Einspannung am Rande am besten dadurch beurtheilt werden, dass man den Biegungspfeil misst und ihn mit den Formeln (162) und (185) vergleicht. Ich selbst habe Versuche mit plattenförmigen Körpern bisher nicht angestellt.

Schliesslich soll auch noch eine frei aufliegende Platte betrachtet werden, die eine Einzellast in der Mitte trägt. Dabei will ich mich aber auf die Ermittelung der Gestalt der elastischen Fläche und die Berechnung des Biegungspfeiles beschränken, da im anderen Falle die etwas weitläufige Untersuchung von § 43 wiederholt werden müsste, ohne dass ein besonderer Gewinn dabei herauskäme.

Dass die Platte am Rande eingespannt sei, setzte ich in § 43 erst nach der Ableitung von Gl. (166) voraus, um die Constante B zu ermitteln. Ich habe also hier auszugehen von der Gl. (166)

$$\varphi = -\frac{Q}{2} x \lg x + Bx,$$

denn C ist auch hier gleich Null zu setzen. Wie im Eingange dieses Paragraphen haben wir zur Bestimmung von B die Bedingung zu benutzen, dass für $x = r$ der Ausdruck

$$m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x}$$

verschwinden muss. Setzt man den hier gültigen Werth von φ ein, so erhält man

$$m \frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x} = -(m+1)\frac{Q}{2}\lg x + (m+1)B - m\frac{Q}{2}$$

und die Grenzbedingung liefert

$$B = \frac{Q}{2}\lg r + \frac{m}{m+1}\cdot\frac{Q}{2}.$$

Damit wird nun

$$\varphi = \frac{Q}{2} x \lg\frac{r}{x} + \frac{m}{m+1}\cdot\frac{Q}{2} x. \tag{186}$$

Das Negative davon ist gleich $\frac{dy}{dx}$ zu setzen und die Integration liefert

$$y = -\frac{Q}{2}\left\{\frac{x^2}{2}\lg\frac{r}{x} + \frac{x^2}{4} + \frac{m}{m+1}\frac{x^2}{2}\right\} + C. \qquad (187)$$

Für $x = r$ muss y wieder zu Null werden; daraus folgt für die Integrationsconstante C

$$C = \frac{Q}{2}\left(\frac{r^2}{4} + \frac{m}{m+1}\frac{r^2}{2}\right).$$

Dies ist zugleich der Werth von y für $x = 0$; also der Biegungspfeil. Nach Einsetzen von Q aus Gl. (164) und mit $m = \frac{10}{3}$ erhält man daher

$$f = \frac{3(m-1)(3m+1)}{4\pi m^2} \cdot \frac{Pr^2}{Eh^3} = 0{,}55\,\frac{Pr^2}{Eh^3}. \qquad (188)$$

Der Biegungspfeil wird also bei dieser Belastung für die frei aufliegende Platte, wie ein Vergleich mit Gl. (177) lehrt, etwa $2^1/_2$ mal so gross, als bei unwandelbar fest eingespanntem Rande.

§ 45. Bach'sche Näherungstheorie für kreisförmige Platten.

Die vorausgehenden Untersuchungen stehen in dem Rufe, dass sie schon etwas zu viel mathematische Schwierigkeiten enthielten, als dass sich der Ingenieur damit befassen könnte. Ich hoffe indessen, dass meine Darlegung gezeigt haben wird, dass dieser Ruf unbegründet ist; von mathematischen Sätzen wird ausser den ersten Anfangsgründen der Analysis nur das Einfachste aus der Lehre von der Integration der Differentialgleichungen vorausgesetzt. Die Aufstellung der Differentialgleichungen für φ erfordert allerdings einen gewissen Ueberblick über die Art, wie man Kräfte im Raume an dem Plattenelemente zusammensetzen kann; diese Schwierigkeit ist aber keine eigentlich mathematische, wenigstens keine analytische, sie bezieht sich nur auf die räumliche Auffassung und einer solchen Schwierigkeit muss der Techniker, der auf der Höhe stehen will, immer Herr werden können, während die völlige Beherrschung des eigentlich mathematischen Apparates im Vergleiche dazu von geringerer Bedeutung für ihn ist. Ich halte es daher für ganz ungerechtfertigt, dass diese Unter-

suchungen in der neueren technischen Literatur stark vernachlässigt wurden. Viel mag dazu allerdings beigetragen haben, dass ältere Darstellungen der Theorie wegen der allzu abstracten Fassung, die womöglich alle Fragen, die sich überhaupt stellen lassen, mit einem Schlage erledigen wollte, schwer verständlich für den Anfänger blieben. Dies gilt namentlich von der Grashof'schen Darstellung, die in den deutschen technischen Kreisen die bekannteste ist und die in dieser Hinsicht recht abschreckend gewirkt zu haben scheint. Zugleich will ich indessen hinzufügen, dass ich es auch selbst für zulässig halte, wenn der Techniker auf alle schwierigeren Probleme, als die hier behandelten, von vornherein verzichtet, da der Erfolg nicht im rechten Verhältnisse zu der aufgewendeten Mühe steht. Für die vorausgegangenen Betrachtungen lasse ich dies aber nicht gelten. Man darf diese Mühe schon nicht scheuen, um sich in den Stand zu setzen, bei den einfachsten und am häufigsten vorkommenden Fällen, z. B. den Biegungspfeil zu berechnen, was nur auf diesem Wege möglich ist. In schwierigeren Fällen hat man dann wenigstens einen Anhaltspunkt für die Vornahme einer Abschätzung.

Ueberdies ist als Zweck aller solcher Untersuchungen auch keineswegs allein die Ableitung einiger Formeln zu erblicken, mit denen man späterhin etwas anfangen kann, sondern weit mehr noch die Schulung, die dadurch gewonnen wird, dass man sich volle Klarheit über alle Einzelheiten verschafft, die bei dem betreffenden Falle in Frage kommen. Eine solche Schulung befähigt dazu, auch in verwickelteren Fällen das Kräftespiel in allgemeinen Umrissen zu verfolgen und gibt die rechte Grundlage ab für das, was man den praktischen Blick nennt. Dieser bildet die beste und reifste Frucht der gehörigen geistigen Durchdringung eines Gegenstandes und so ist es auch jedenfalls zu verstehen, wenn neuerdings von hervorragender Seite der Satz hingestellt wurde, dass es für den Ingenieur viel wichtiger ist, richtig schätzen, als richtig rechnen zu können. Man muss nur hinzufügen, dass das Schätzen viel schwieriger ist, als das Rechnen nach bekannten Regeln und

dass es nur dadurch gelernt werden kann, dass man eine Anzahl einfacher Fälle gehörig durchgerechnet hat.

Die Wichtigkeit der Sache, um die es sich hier handelt, zu der in neuerer Zeit innerhalb weiter Kreise eine Stellung genommen wurde, die ich keineswegs billigen kann, hat mich zu diesen Ausführungen veranlasst. Ich will noch hinzufügen, dass ich nicht weniger als irgend ein anderer Techniker sachlich werthlose Speculationen — die sogenannte graue Theorie — geringschätzig beurtheile, dass mir die Erforschung der Wirklichkeit vielmehr als das einzige erstrebenswerthe Ziel erscheint. Wenn sich aber unter Berufung auf diesen gerechtfertigten Standpunkt Strömungen geltend machen, die auf eine Herabdrückung des ganzen Niveaus der mathematischen Durchbildung unseres technischen Nachwuchses hinzuarbeiten suchen, muss ich mich entschieden dagegen aussprechen. Mögen mir meine Leser und namentlich meine Hörer, die ich selbst in das Gebiet der technischen Mechanik einzuführen die Ehre habe, glauben, dass ich aus eigener Erfahrung weiss, wie werthvoll eine tüchtige mathematische Durchbildung für die Erfassung der Wirklichkeit, für die richtige Beurtheilung unzähliger Fragen ist, die sich jeden Tag, bald da, bald dort in der technischen Praxis aufdrängen und bei denen nur in den seltensten Fällen eine Rechnung, wohl aber eine richtige Abschätzung verlangt wird.

Wenn ich hiernach auch nicht billigen kann, dass man die vorausgegangene genauere Theorie der Biegungsfestigkeit kreisförmiger Platten häufig einfach zur Seite geschoben hat, so steht es doch durchaus im Einklange mit meinem Standpunkte, dass ich die an ihre Stelle gesetzte Näherungstheorie des Herrn v. Bach als eine sehr schätzenswerthe Leistung betrachte und dass ich sie für die praktische Anwendung entschieden empfehle.

Wir wollen uns die Platte in jedem Falle als frei aufliegend vorstellen. Dies rechtfertigt sich dadurch, dass bei dieser Auflagerung, wie wir uns vorher überzeugten, eine grössere Anstrengung des Materials zu Stande kommt, als bei

einer Einspannung am Rande. Da man nun gewöhnlich im Zweifel sein wird, bis zu welchem Grade sich die Einspannung als wirksam erweist, ist es zweckmässig, bei der Berechnung den ungünstigeren Fall zu Grunde zu legen. Man nimmt ja auch in der That bei der Berechnung von Balken, die an den Enden eingespannt sind, sehr häufig keine Rücksicht auf diesen Umstand, weil man unsicher darüber ist, ob die getroffenen Vorkehrungen wirklich ausreichen, um ganz kleine Winkeldrehungen der Stabenden zu verhüten.

Durch die frei aufliegende Platte denke man sich einen Meridianschnitt gezogen und betrachte das Gleichgewicht der in dem Schnitte übertragenen Spannungen mit den an der einen Hälfte der Platte angreifenden äusseren Kräften. Schubspannungen sind der Symmetrie wegen in dem Meridianschnitte nicht zu erwarten und die Normalspannungen sind die in den vorausgehenden Paragraphen mit σ_t bezeichneten. Alle Normalspannungen für die ganze Schnittfläche lassen sich zu einem Kräftepaare zusammenfassen, gerade so wie etwa die Spannungen in dem Querschnitte eines auf Biegung beanspruchten Balkens. Nehmen wir ferner an, dass die Platte eine gleichförmig vertheilte Belastung zu tragen hat, so lässt sich die davon auf die eine Platthälfte entfallende zu einer Resultirenden zusammensetzen, die durch den Schwerpunkt der Halbkreisfläche geht, von der Grösse

$$\frac{\pi r^2}{2} p,$$

wenn die Buchstaben die frühere Bedeutung behalten. Von äusseren Kräften kommen dann noch die längs des Auflagerkreises übertragenen Auflagerkräfte in Betracht. Der vollständigen Symmetrie wegen müssen diese gleichförmig über den ganzen Umfang vertheilt sein. Die an der einen Plattenhälfte angreifenden Auflagerkräfte denken wir uns ebenfalls zu einer Resultirenden vereinigt. Diese geht dann der gleichförmigen Vertheilung wegen durch den Schwerpunkt des Halbkreisbogens und sie ist ebenso gross, aber entgegengesetzt gerichtet wie die von der Platthälfte aufgenommene Belastung.

Alle äusseren Kräfte des einen Plattenstücks sind damit auf ein Kräftepaar zurückgeführt, das mit dem Kräftepaare der Spannungen im Gleichgewichte stehen muss. Das Moment des Kräftepaars der äusseren Kräfte wollen wir, wie früher bei der Untersuchung des Balkens, als das Biegungsmoment M bezeichnen. Es ist gleich dem vorher festgestellten Werthe der Belastung der Plattenhälfte multiplicirt mit dem Abstande der beiden Schwerpunkte, die als Angriffspunkte der beiden Kräfte des Paares dienen.

Der Schwerpunkt eines Halbkreisbogens hat den Abstand $\frac{2r}{\pi}$ und der Schwerpunkt der Halbkreisfläche den Abstand $\frac{4r}{3\pi}$ von dem Durchmesser. Der Abstand beider Schwerpunkte von einander ist daher gleich $\frac{2r}{3\pi}$; mit r ist der Radius der Platte bezeichnet. Demnach ist das Biegungsmoment

$$M = \frac{\pi r^2}{2} p \cdot \frac{2r}{3\pi} = \frac{pr^3}{3}, \tag{189}$$

und ebenso gross muss das Moment der Spannungen σ_t oder wie wir sie hier der Kürze halber nennen wollen, der Spannungen σ sein.

Bis dahin ist die Betrachtung durchaus streng und einwandfrei; man kann sie aber in so untadelhafter Weise nicht zu Ende führen, weil man von vornherein nicht wissen kann, nach welchem Gesetze sich die Spannungen σ mit der Entfernung x von der Plattenmitte ändern. Die früheren Untersuchungen sollen zur Ergänzung dieser Lücke nicht benutzt werden, da die Bach'sche Näherungstheorie ganz selbständig vorgeht. Jedenfalls kann man aber eine untere Grenze für die grösste Kantenspannung finden, die mindestens erreicht werden muss. Man setze nämlich willkürlich voraus, dass die Spannungen σ unabhängig von x seien. Die Vertheilung der Spannungen über den Meridianschnitt gleicht dann vollständig jener, die für den Querschnitt eines auf Biegung beanspruchten Balkens gilt. Daher kann auch zur Ableitung der Kanten-

spannung aus dem Biegungsmomente unmittelbar die für den Balken mit rechteckigem Querschnitte bekannte Formel

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2}$$

benutzt werden. An Stelle von b tritt hier der Durchmesser $2r$ der Platte, während h stehen bleiben kann, da wir mit diesem Buchstaben ohnehin schon die Dicke der Platte bezeichnet hatten. Nach Einsetzen von M aus Gl. (189) folgt daher

$$\sigma = p\frac{r^2}{h^2}. \tag{190}$$

Dies ist nun freilich nur eine untere Grenze für die in Wirklichkeit zu erwartende grösste Spannung σ, denn wenn die Kantenspannungen in verschiedenen Entfernungen von der Mitte verschieden gross sind, müssen sie nothwendig an einigen Stellen grösser, an anderen kleiner sein als der berechnete Durchschnittswerth. Ehe man in die Anwendung von Gl. (190) hinreichendes Vertrauen setzen kann, muss man sich daher auf irgend eine Art ein Urtheil darüber verschaffen, ob der Ueberschuss des grössten Werthes über den Durchschnittswerth nicht so erheblich ist, dass die Berechnung nach Gl. (190) zu ganz groben Fehlern führt. Es ist ganz gerechtfertigt, wenn man dazu Versuche über die Festigkeit solcher Platten zu Hülfe nimmt. Man kann dann etwa so vorgehen, dass man an Stelle von Gl. (190)

$$\sigma = \eta p\frac{r^2}{h^2}$$

schreibt, wo nun η ein Erfahrungscoefficient ist, von dem von vornherein bekannt ist, dass er jedenfalls grösser als 1 sein muss. Herr v. Bach hat in der That die Anwendbarkeit seiner Formel auf dem Wege des Versuches nachgewiesen und es zeigte sich, dass es genügt, η gleich 1 zu setzen, die Abweichung von diesem kleinsten Werthe, der überhaupt in Frage kommen kann, also zu vernachlässigen.

Natürlich bleibt ein solcher Versuch immer nur für solche Bedingungen beweiskräftig, die mit den Bedingungen des Ver-

suches ganz oder nahezu übereinstimmen. Unter anderen Verhältnissen, die nicht besonders geprüft sind, könnten die Abweichungen leicht grösser werden. Es ist daher angenehm, dass wir hier in der Lage sind, die Bach'sche Formel (190) mit der aus der genaueren Theorie abgeleiteten zu vergleichen. In § 44 ist die Spannung σ_t nicht berechnet; wir können dies aber leicht nachträglich thun. Nach den Gl. (150) ist nämlich

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1} z \left(m \frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx} \right)$$

und nach Gl. (180) werden in unserem Falle φ und sein Differentialquotient durch die Ausdrücke

$$\varphi = \frac{N}{8} \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 x - x^3 \right),$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{N}{8} \left(\frac{3m+1}{m+1} r^2 - 3x^2 \right)$$

dargestellt. Setzt man dies ein und macht $x = 0$, um die grösste Spannung σ_t in der Mitte zu erhalten, ebenso $z = \frac{h}{2}$, so findet man

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - 1} \cdot \frac{h}{2} \cdot \frac{N}{8} (3m + 1) r^2.$$

Mit dem Werthe von N aus Gl. (154) und schliesslich mit $m = \frac{10}{3}$ geht dies über in

$$\sigma_t = \frac{3(3m+1)}{8m} p \frac{r^2}{h^2} = 1{,}24\, p \frac{r^2}{h^2}. \tag{191}$$

Damit ist die Grösse der Abweichung des Werthes aus Gl. (190) von der genaueren Formel für die grösste Spannung σ_t festgestellt. Nun kommt aber noch ein anderer Umstand in Betracht. Die Beanspruchung des Materials hängt nämlich gar nicht von der Spannung σ_t allein ab, sondern zugleich von der zu ihr senkrechten Spannung σ_r. In der Mitte sind beide gleich gross und von gleichem Vorzeichen. Wie aus dem zweiten Abschnitte bekannt ist, wird durch dieses Zusammenwirken die Anstrengung in dem Verhältnisse $\frac{m+1}{m}$ vermindert. Deshalb wurde auch schon bei den früheren Unter-

suchungen immer nur die reducirte Spannung σ_{red} berechnet, auf die es bei der Beurtheilung der Bruchgefahr allein ankommt. Herr v. Bach, der bei seinen Betrachtungen alle diese Umstände natürlich wohl erwogen hat, benutzt dagegen die Formel (190), um darnach unmittelbar die Bruchgefahr zu beurtheilen, d. h. er erblickt in dem durch Gl. (190) gegebenen σ sofort einen Näherungswerth für die reducirte Spannung. In der That ist also die Bach'sche Näherungsformel gar nicht mit Gl. (191), sondern mit Gl. (182) in Vergleich zu stellen — und dabei zeigt sich, dass die Anstrengung des Materials noch nicht einmal so gross ist, als sie nach dem Bach'schen Rechnungsverfahren zu sein scheint. Die Anwendung dieses Verfahrens für Berechnungen in der Praxis ist damit vollständig gerechtfertigt.

Freilich sieht man bei der Darstellung, die ich hier von dem Sachverhalte gegeben habe, zunächst nicht recht ein, welcher Vortheil darin liegen soll, an Stelle der genaueren Formel (182) die nicht viel von ihr verschiedene Näherungsformel (190) zu benutzen. Denn die Zahlenrechnung ist in beiden Fällen fast genau dieselbe und zur besseren Begründung der Näherungsformel habe ich mich hier doch wieder auf die genauere Formel berufen. Man muss aber bedenken, dass die Ableitung der Formel (190) für Jedermann verständlich ist, auch wenn er an der Ueberwindung der wirklichen oder vermeintlichen Schwierigkeiten der früheren Paragraphen verzweifelt und dass die Erprobung der Formel auch auf dem Wege des Versuches durchgeführt werden kann, der einwandfreier ist, als die beste theoretische Entwickelung, so lange man die Versuchsergebnisse nur auf Fälle der gleichen Art überträgt. Auf diesen Umstand der leichteren Verständlichkeit möchte ich nun freilich, wie schon vorher erwähnt, kein zu grosses Gewicht legen. Ausschlaggebend für meine Werthschätzung der Näherungstheorie ist vielmehr der Umstand, dass sie auch auf solche Fälle angewendet werden kann, die der genaueren Untersuchung zu grosse Schwierigkeiten bereiten. Nach dem, was wir über die hinreichend genaue Ueber-

einstimmung beider Verfahren in dem einen Falle gefunden haben, werden wir mit mehr Vertrauen auch solche Fälle nach dem Näherungsverfahren behandeln können, die sonst hoffnungslos schwierig wären. Vorbehalten muss man sich dabei natürlich, die Ergebnisse, zu denen man dabei gelangt, gelegentlich immer wieder mit der praktischen Erfahrung zu vergleichen, um sich zu überzeugen, dass man bei der in Anwendung gebrachten Abschätzung keinen wesentlichen Umstand vernachlässigt hat.

Falls die frei aufliegende Platte eine Einzellast P in der Mitte trägt, hat man für das Biegungsmoment

$$M = \frac{P}{2} \cdot \frac{2r}{\pi} = \frac{Pr}{\pi}$$

und die Spannung σ wird nach dem Näherungsverfahren

$$\sigma = \frac{3P}{\pi h^2}. \tag{192}$$

Wir sahen indessen früher, dass die grösste Anstrengung des Materials hier wesentlich davon abhängt, wie die Last P in der Mitte sich innerhalb eines kleinen Bereiches vertheilt. Ein unmittelbarer Vergleich mit früheren Rechnungen ist daher hier nicht wohl durchführbar und leider sind auch Versuche, die zur Prüfung der Formel (192) dienen könnten, nicht bekannt. Man wird daher jedenfalls nur mit Vorsicht davon Gebrauch machen können. Herr v. Bach selbst hat übrigens nur den Fall einer gleichförmig vertheilten Belastung behandelt, was ich zur Vermeidung von Missverständnissen hier ausdrücklich bemerke.

§ 46. Näherungstheorie für elliptische Platten.

Hier wird die Aufgabe schwieriger, weil man nicht von vornherein anzugeben vermag, wie sich der Auflagerdruck längs des Umfangs vertheilt. Um dafür einen Anhaltspunkt zu gewinnen, denke man sich die elliptische Oeffnung durch zwei sich rechtwinklig kreuzende Stäbe von gleichem Querschnitt überdeckt, die in den Richtungen der Hauptaxe der Ellipse gehen und in der Mitte miteinander verbunden sind. Nach

den Untersuchungen des dritten Abschnittes kann man leicht angeben, in welchem Verhältnisse die Auflagerkräfte beider Stäbe zueinander stehen, wenn jeder von ihnen eine gleichförmig vertheilte Belastung von derselben Grösse q auf die Längeneinheit trägt. Bezeichnet man nämlich den Druck, den der grössere Stab von der Länge $2a$ in der Mitte auf den kleineren von der Länge $2b$ überträgt, mit Z, so hat man nach den Gl. (80) und (82) für den Biegungspfeil f des grösseren Stabs

$$f = \frac{5}{24}\frac{qa^4}{E\Theta} - \frac{Za^3}{6E\Theta}$$

und für den kleineren Stab

$$f = \frac{5}{24}\frac{qb^4}{E\Theta} + \frac{Zb^3}{6E\Theta}.$$

Beide Werthe müssen miteinander übereinstimmen, also ist

$$Z = \frac{5(a^4 - b^4)}{4(a^3 + b^3)}q.$$

Für den Auflagerdruck A an den Enden der grossen Axe der Ellipse findet man daher

$$A = qa - \frac{Z}{2} = q \cdot \frac{3a^4 + 8ab^3 + 5b^4}{8(a^3 + b^3)}$$

und ebenso für den Auflagerdruck B an den Enden der kleinen Axe

$$B = qb + \frac{Z}{2} = q \cdot \frac{5a^4 + 8a^3b + 3b^4}{8(a^3 + b^3)}.$$

Das Verhältniss zwischen beiden Auflagerkräften wird demnach

$$\frac{A}{B} = \frac{3a^4 + 8ab^3 + 5b^4}{5a^4 + 8a^3b + 3b^4}. \tag{193}$$

Herr v. Bach findet auf Grund einer Rechnung, die ich nicht als richtig anerkennen kann*), an Stelle hiervon $\left(\frac{b}{a}\right)^3$ und gründet darauf seine weiteren Schlüsse, die darauf

*) Der Fehler liegt in der irrthümlichen Bemerkung, dass $\frac{1}{2}Q = P_a$ bezw. $= P_b$ gesetzt werden könne, Seite 354 oben, Bach, Elasticität und Festigkeit, Berlin 1890. — In der zweiten Auflage des Buches ist die Betrachtung durch eine andere ersetzt, mit der ich mich ebensowenig befreunden kann.

hinauskommen, dass der Druck, den eine elliptische Platte am Umfange überträgt, proportional dem Krümmungshalbmesser zu setzen sei. Der durch Gl. (193) gegebene richtige Werth des Verhältnisses von $A:B$ weicht aber von dem vermeintlichen so erheblich ab, dass alle daran geknüpften Folgerungen hinfällig werden. So ist z. B. für $a = 2b$ nach Gl. (193)

$$\frac{A}{B} = 0{,}47\,,$$

während nach der Bach'schen Formel 0,125 dafür herauskäme. Ich ersetze daher die Bach'sche Betrachtung durch eine andere.

Bei gleichförmiger Vertheilung des Auflagerdrucks längs des Umfangs würde der resultirende Auflagerdruck für eine Plattenhälfte mit dem Schwerpunkt des Ellipsenbogens zusammenfallen. Denkt man sich den Schnitt längs der grossen Axe gezogen, so ist aber in Wirklichkeit der resultirende Auflagerdruck jedenfalls weiter von der Mitte entfernt, da aus der vorausgehenden Betrachtung hinreichend deutlich hervorgeht, dass der Druck von den Enden der grossen Axe nach den Enden der kleinen Axe hin zunehmen muss. Wenn a sehr viel grösser ist als b, die Ellipse also sehr länglich ist, wird der resultirende Auflagerdruck um nicht viel weniger als b von der Mitte entfernt sein. Da man andererseits nachher wieder eine gleichförmige Vertheilung der Normalspannungen längs des Durchmessers annehmen will, ist es meiner Schätzung nach bei solchen langgezogenen Ellipsen zweckmässig, das Biegungsmoment dafür etwas grösser in Rechnung zu stellen, als es in Wirklichkeit anzunehmen ist. Der Schwerpunkt der halben Ellipsenfläche hat den Abstand $\frac{4b}{3\pi}$ von der Mitte; für dieses Biegungsmoment nehme ich daher den sicher etwas zu grossen Werth

$$M = \frac{\pi a b}{2} p \cdot \frac{4b}{3\pi} = \frac{2ab^2}{3} p \tag{194}$$

und erhalte für die zu diesem Schnitt gehörige Spannung, die in der Richtung b geht, den Näherungswerth

$$\sigma_b = 2\frac{b^2}{h^2} p. \tag{195}$$

Wird der Schnitt dagegen in der Richtung der kleinen Axe gelegt, so ist der Hebelarm des Kräftepaars sicher kleiner als der Abstand des Schwerpunkts der halben Ellipsenfläche von dem Schwerpunkt des zugehörigen Bogens. Es ist aber hier schwer, einen Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, wie gross der Hebelarm einzuschätzen ist. Denn aus solchen Betrachtungen wie die vorher mit den gekreuzten Stäben angestellten lässt sich nichts darüber entnehmen, weil bei langgezogenen Ellipsen eine Stützung des längs der grossen Axe angenommenen Streifens nicht nur in der Mitte, sondern auch noch auf grössere Strecken zu beiden Seiten der Mitte in Betracht kommt. Ich stütze mich daher auf die Ergebnisse der von v. Bach angestellten Versuche, bei denen elliptische Platten durch einen Riss, der ungefähr in der Richtung der grossen Axe verlief, zum Bruch gebracht wurde. Hiernach ist also in der That die Spannung σ_b massgebend.

Wenn die Ellipse nicht sehr lang gestreckt ist, liefert Gl. (195) sicher zu ungünstige Werthe, denn wenn die Ellipse in einen Kreis übergeht, wird, wie wir schon wissen, σ nur halb so gross als nach Gl. (195). Man wird darnach die Abschätzung, die natürlich nur als eine ganz grobe Annäherung zu betrachten ist, einzurichten haben. Man könnte etwa für ein beliebiges Axenverhältniss an Stelle von Gl. (195)

$$\sigma = \frac{2a - b}{a} \cdot \frac{b^2}{h^2} p \tag{196}$$

setzen. Für den Kreis und die unendlich lang gestreckte Ellipse, also für die beiden Grenzfälle, bei denen man allein etwas Genaueres nach den angestellten Betrachtungen aussagen kann, würde die Formel wenigstens hinreichend genau zutreffen und für eine ungefähre Schätzung wird sie daher immerhin brauchbar sein.

§ 47. Näherungstheorie für quadratische und rechteckige Platten.

Hier ist man für den Zweck der Abschätzung wieder in etwas günstigerer Lage. Zunächst betrachte ich eine quadratische Platte von der Seite $2a$; die Diagonale $= 2a\sqrt{2}$ sei mit d bezeichnet. Die Belastung ist $= 4pa^2$ und auf jede Seitenfläche kommt daher der Auflagerdruck pa^2. Dieser ist jedenfalls so vertheilt, dass er von der Seitenmitte nach den Ecken hin abnimmt. Wir untersuchen zwei Schnittflächen, eine parallel zu zwei Seiten und die andere in der Richtung der Diagonale. Für den ersten Schnitt haben wir zunächst den Auflagerdruck auf der dem Schnitt gegenüberliegenden Quadratseite in's Auge zu fassen. Er hat die Grösse pa^2 und das Moment pa^3. Dann kommen die Auflagerkräfte an den beiden Halbseiten, die zusammen auch gleich pa^2 sind. Die Resultirende steht sicher um weniger als $\frac{a}{2}$ von der Schnittfläche ab; bezeichnen wir diesen unbekannten Abstand mit x, so ist das Biegungsmoment

$$M = pa^3 + pa^2x - pa^3 = pa^2x$$

und die Biegungsspannung σ nach der gewöhnlichen Formel

$$\sigma = \frac{6M}{2ah^2} = 3p\frac{ax}{h^2}.$$

Da x höchstens gleich $\frac{a}{2}$ sein kann, wird

$$\sigma < \frac{3}{2}\frac{a^2}{h^2}p.$$

Bei dem Schnitt in der Richtung der Diagonale kommen zwei Auflagerkräfte vor, die beide den Abstand $\frac{d}{4}$ von der Schnittfläche haben. Der Angriffspunkt der Belastung fällt mit dem Schwerpunkt des Dreiecks zusammen, das die eine Hälfte des Quadrats bildet; er hat daher den Abstand $\frac{d}{6}$ von der Schnittfläche. Wir können das Biegungsmoment M daher in diesem Falle genau angeben; es ist

$$M = 2pa^2 \cdot \frac{d}{12} = \frac{pa^2 d}{6}$$

und die Biegungsspannung σ wird

$$\sigma = \frac{6M}{dh^2} = p\frac{a^2}{h^2}, \qquad (197)$$

also in diesem Falle ebenso gross als bei einer kreisförmigen Platte von dem Halbmesser a. Der zuletzt gefundene Werth ist kleiner als die obere Grenze für die Spannung in dem Schnitte parallel zu zwei Seiten. So lange man nichts Genaueres über den wirklichen Werth von x anzugeben vermag, befindet man sich daher im Zweifel, ob Gl. (197) den grössten Werth der Beanspruchung angibt oder ob die Beanspruchung für den anderen Schnitt grösser ist. Hier tritt wieder ein Bach'scher Versuch in die Lücke, bei dem eine quadratische Platte längs der Diagonale aufriss. Man kann daher Gl. (197) für die Berechnung anwenden.

Auch für rechteckige Platten wollen wir einen in der Richtung der Diagonale geführten Schnitt als den gefährlichen Bruchquerschnitt betrachten, obschon die hierzu vorliegenden Bach'schen Versuche diese Annahme nicht so gut bestätigen, als im vorigen Falle. Die einzige Rechtfertigung dafür besteht vielmehr darin, dass es sich nur um eine ungefähre Schätzung handelt. Die Rechteckseiten bezeichnen wir mit $2a$ und $2b$, die Diagonale mit d und die zu d gehörige Höhe des Dreiecks, das die eine Hälfte des Rechtecks bildet, mit c. Wie sich nun auch der Auflagerdruck über die Rechteckseiten vertheilen mag, jedenfalls kommt auf die beiden Katheten des Dreiecks der Auflagerdruck $2pab$ und die Resultirende hat den Abstand $\frac{c}{2}$ von der Diagonale. Der Abstand des Dreiecksschwerpunkts ist $\frac{c}{3}$ und daher das Biegungsmoment

$$M = \frac{pabc}{3}.$$

Die Biegungsspannung wird daher

$$\sigma = \frac{6M}{dh^2} = 2p\frac{abc}{dh^2}.$$

Da $cd = 4ab$, und $d^2 = 4a^2 + 4b^2$ ist, geht dies über in

$$\sigma = 2p \frac{a^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{h^2}{h^2} \cdot \tag{198}$$

Aufgaben.

35. Aufgabe. Eine Eisenplatte von so grosser Ausdehnung, dass sie genau genug als eine Kreisscheibe von unendlich grossem Halbmesser betrachtet werden kann, ist satt auf den Erdboden gelegt und wird in der Mitte belastet. Man soll versuchen, die Vertheilung des Drucks auf den Boden zu bestimmen unter der Voraussetzung, dass dieser Druck an jeder Stelle proportional der Einsenkung y ist.

Anmerkung. Diese Aufgabe ist identisch mit einer etwas anders lautenden, die Heinrich Hertz zuerst gelöst hat. Hertz betrachtet nämlich an Stelle der Eisenplatte eine Eisscholle, die auf dem Wasser schwimmt und in der Mitte belastet wird. Auch die Eisscholle biegt sich durch wie die Eisenplatte bei unserer Aufgabe und durch die Tiefe der Einsenkung wird das Anwachsen des Auftriebs bestimmt, den sie von dem Wasser erfährt. Bei der Hertz'schen Aufgabe ist also die Vertheilung des Auflagerdrucks auf das Wasser — wenn man sich zur Abkürzung dieses Ausdrucks bedient — streng proportional der Einsenkung, während die Proportionalität bei unserer Aufgabe nur näherungsweise angenommen werden kann, wie aus den Erörterungen des sechsten Abschnittes hervorgeht. In dieser Form ist aber die Aufgabe von grösserem technischen Interesse und ich habe daher dieser Fassung den Vorzug gegeben. Hertz hat die hier gestellte Aufgabe streng gelöst; er musste aber dazu mathematische Hülfsmittel heranziehen, die ich hier nicht als bekannt voraussetzen darf. Deshalb werde ich mich hier damit begnügen, die Differentialgleichung für die Meridiancurve der elastischen Fläche abzuleiten. Wie diese Gleichung gelöst werden kann, bitte ich den Leser, der sich dafür interessirt und zugleich die erforderlichen mathematischen Vorkenntnisse besitzt, in der Hertz'schen Abhandlung (Gesammelte Werke, Band I, Leipzig 1895, S. 288) nachzulesen. Wenn die Integration nicht zu schwierig wäre, hätte ich die Aufgabe im Texte behandelt, da sie dies ihrer praktischen Bedeutung nach wohl verdient hätte; ganz weglassen wollte ich einen Hinweis auf diese Untersuchung aber auch nicht und ich habe sie daher in dieser Form unter die Uebungsaufgaben versetzt.

Lösung. Wir können die Entwickelungen von § 42 bis nach Gl. (152) ohne Weiteres benutzen. Der jenseits eines ringförmigen Schnittes vom Halbmesser x liegende Theil der Platte möge im Ganzen einen Auflagerdruck von der Grösse V erfahren. In dem zum Centriwinkel $d\alpha$ gehörenden Theile dieses Ringschnitts wird dann die Scheerkraft $\frac{V d\alpha}{2\pi}$ übertragen. An Stelle von Gl. (153) hat man daher für das Moment der Schubspannungen an dem Plattenelemente

$$\text{Mom. der } \tau = \frac{V}{2\pi} d\alpha\, dx.$$

Dadurch geht die in § 42 aufgestellte Momentengleichung über in

$$x\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d\varphi}{dx} - \frac{\varphi}{x} + \frac{6(m^2-1)}{m^2Eh^3}\frac{V}{\pi} = 0.$$

Hier ist V nicht sofort gegeben. Man weiss aber, dass V um den Auflagerdruck eines ringförmigen Flächenelementes abnimmt, wenn man x um dx vergrössert. Also wird

$$\frac{dV}{dx} = -2\pi xyk,$$

worin k eine schon aus dem sechsten Abschnitte bekannte Constante ist. Wir differentiiren die Momentengleichung nach x und setzen den Werth von $\frac{dV}{dx}$ ein. Dadurch erhalten wir

$$x\frac{d^3\varphi}{dx^3} + 2\frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{d\varphi}{dx} + \frac{\varphi}{x^2} - \frac{12(m^2-1)k}{m^2Eh^3}xy = 0.$$

Nun beachte man, dass $\varphi = -\frac{dy}{dx}$ gesetzt werden kann. Dadurch erhalten wir eine Differentialgleichung vierter Ordnung für y. Mit Benutzung der Abkürzung

$$\frac{12(m^2-1)k}{m^2Eh^3} = \alpha^4$$

lässt sie sich schreiben

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{2}{x}\frac{d^3y}{dx^3} - \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x^3}\frac{dy}{dx} + \alpha^4 y = 0.$$

Es handelt sich also jetzt nur noch um rein mathematische Operationen zur weiteren Lösung der Aufgabe, nämlich um die Aufstellung des Integrals dieser Gleichung, dessen vier Constanten den Grenzbedingungen (ganz ähnlich wie früher bei dem Stabe auf nachgiebiger Unterlage) anzupassen sind. Erleichtert wird dies durch die Bemerkung, dass die Glieder auf der linken Seite eine

Bildung zeigen, die bei Untersuchungen der mathematischen Physik öfters wiederkehrt. Bezeichnet man nämlich die Coordinaten eines Punktes der Mittelebene der Platte mit u, v, so dass also

$$x^2 = u^2 + v^2$$

ist, und versteht man unter ∇^2 den sogenannten Laplace'schen Operator, nämlich

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2},$$

so kann die Differentialgleichung auch in der Form

$$\nabla^2(\nabla^2 y) + \alpha^4 y = 0$$

angeschrieben werden und zu deren Lösung war durch frühere Untersuchungen der Weg vorbereitet.

Hertz geht in seiner Abhandlung unmittelbar von der zuletzt angeschriebenen Gleichung aus; die Fortsetzung der Lösung kann bei ihm nachgelesen werden (die Bezeichnungen sind bei ihm etwas abweichend, man wird sich aber darin leicht zurechtfinden). Auch Zahlenrechnungen und Versuchsergebnisse kommen in der Arbeit vor und sie kann daher zur Ableitung von Einzelheiten, die auch technisch von Nutzen sein können, unmittelbar benutzt werden. Dies überlasse ich dem Leser und ich bemerke nur noch, wenn der eine oder andere Kritiker vielleicht finden sollte, dass ich in dieser Aufgabe zu weit gegangen sei, dass Hertz die vorliegende Aufgabe vollständig gelöst hat, nachdem er erst kurze Zeit die Hörsäle unserer Münchener technischen Hochschule, an der er begonnen hatte, Maschinenbau zu studiren, verlassen hatte. Solche Geister von Gottes Gnaden sind freilich selten; wer wollte aber bezweifeln, dass sie sich gelegentlich immer wieder unter unseren Hörern einfinden und wer möchte es verantworten, ihnen einen gelegentlichen Wink darüber vorzuenthalten, was schon an bedeutenden Leistungen vorliegt, wenn diese auch zu schwierig sind, als dass sie in einer regelmässigen Vorlesung behandelt werden könnten? Ich habe eine viel zu grosse Hochachtung vor dem Können, das in unserer studirenden Jugend schlummert, als dass ich mit Jenen übereinzustimmen vermöchte, die ihr nur die leichtverdaulichste Kost vorgesetzt sehen wollen. Dass man solche Dinge, wie die eben behandelte Aufgabe nicht von Jedem verlangen, dass man darnach in keinem Examen fragen wird, ist ja selbstverständlich.

36. Aufgabe. Eine frei aufliegende kreisförmige, gusseiserne Platte von beliebigem Durchmesser hat 2 cm Stärke. Wie gross darf eine auf eine kleine Fläche in der Mitte concentrirte Belastung sein, wenn man eine nach dem Näherungsverfahren in § 45 berechnete Biegungsspannung des Gusseisens von 200 atm als zulässig ansieht?

Lösung. Man braucht nur die Zahlenwerthe in Gl. (192) einzusetzen. Man findet

$$P = \frac{\pi h^2 \sigma}{3} = \frac{\pi}{3} \cdot 2^2 \cdot 200 = 837 \text{ kg}.$$

Auf den ersten Blick erscheint es vielleicht auffällig, dass der Durchmesser der Platte gleichgültig ist, denn bei einem Stabe spielt die Grösse der Spannweite eine Hauptrolle. Bei der Platte ist es aber deshalb anders, weil in demselben Verhältnisse, in dem bei grösserer Oeffnung die Hebelarme wachsen, auch die Breite des Querschnitts zunimmt, über den sich die Biegungsspannungen vertheilen.

Bei gleichförmiger Vertheilung über die ganze Platte dürfte die Last dreimal so gross sein, wie aus dem Vergleiche von Gl. (192) mit Gl. (190) hervorgeht.

Achter Abschnitt.

Die Festigkeit von Gefässen unter innerem oder äusserem Ueberdruck.

---

§ 48. Kugelkessel und cylindrische Kessel unter innerem Ueberdruck.

Die Wandstärke h wird hier als klein gegenüber dem Durchmesser betrachtet, wie es bei den gewöhnlichen genieteten Kesseln der Fall zu sein pflegt. Der Kessel kann dann, wenn er cylindrisch ist, Verbiegungen keinen erheblichen Widerstand entgegensetzen. Dazu ist aber auch kein Anlass gegeben, wenn der Querschnitt kreisförmig ist und so wird und muss er immer ausgeführt werden.

Ich betrachte zunächst den kugelförmigen Kessel. Eine Durchmesserebene zerlegt ihn in zwei Halbkugeln; der innere Halbmesser sei mit r bezeichnet. Als äussere Kräfte treten an der Halbkugel die Druckkräfte der eingeschlossenen Flüssigkeit auf die Kesselwand auf. Diese setze ich zu einer Resultirenden zusammen. Schon bei der Lösung von Aufg. 30 wurde darauf hingewiesen, dass man die Resultirende von hydrostatischen Druckkräften, die gleichmässig über einen Theil einer geschlossenen Fläche vertheilt sind, durch die Resultirende für den Rest dieser geschlossenen Fläche ersetzen kann. Der Rest ist hier die kreisförmige Fläche des Schnitts durch den Innenraum des Kessels. Wenn der Flüssigkeitsdruck, in atm ausgedrückt, mit p bezeichnet wird, bildet demnach die Resulti-

rende der äusseren Kräfte eine Kraft, die durch den Mittelpunkt geht, senkrecht zur Schnittebene steht und die Grösse

$$\pi r^2 p$$

hat. Dabei ist vorausgesetzt, dass der Druck in der That überall gleich gross ist, dass also die Druckunterschiede, die durch das Gewicht der Flüssigkeit in verschiedenen Höhen bedingt sind, vernachlässigt werden können. Bei den praktisch vorkommenden Fällen ist dies immer zulässig.

Mit dieser äusseren Kraft müssen die in der Schnittfläche übertragenen Wandspannungen im Gleichgewichte stehen. Der Symmetrie wegen sind diese Wandspannungen Normalspannungen σ und längs des Umfangs sind sie gleichmässig vertheilt. Aber auch in der Richtung des Radius müssen sich die Spannungen σ nahezu gleichförmig über die Blechdicke vertheilen. Um dies zu erkennen, bedenke man, dass sich der Kessel unter dem Einflusse des inneren Ueberdrucks etwas ausdehnt; der Radius wächst also etwa von r auf $r + \Delta r$. Durch diese elastische Dehnung werden erst die Spannungen σ hervorgerufen. Nun kann sich aber der äussere Kesselradius nicht merklich weniger dehnen, als der innere, denn der etwaige Unterschied würde gleich der elastischen Verkürzung der Wandstärke h sein und diese ist sicher sehr gering, da schon h selbst klein war. Freilich lehrt diese Ueberlegung zugleich, dass bei Wandstärken, die nicht klein im Vergleiche zum Radius r sind, eine gleichförmige Spannungsvertheilung über die ganze Wanddicke nicht zu erwarten ist und dass daher die hier abzuleitenden Formeln immer nur auf dünnwandige Gefässe angewendet werden dürfen.

Für diese aber gestaltet sich die Gleichgewichtsbedingung sehr einfach. Der Schnitt durch die Wand hat den Inhalt $2\pi rh$, wenn man auf den kleinen Unterschied zwischen dem mittleren Radius und dem Innenradius keine Rücksicht nimmt. Daraus folgt

$$2\pi rh\sigma = \pi r^2 p \quad \text{oder} \quad \sigma = \frac{pr}{2h}. \tag{199}$$

Durch einen gegebenen Punkt einer Kugelfläche kann man sehr viele Durchmesserebenen legen und jeder dieser Schnittrichtungen entspricht dieselbe Normalspannung σ. Die Anstrengung des Materials wird daher nicht durch σ, sondern durch die reducirte Spannung σ_{red} bestimmt, die sich zu

$$\sigma_{red} = \frac{m-1}{m}\sigma = \frac{m-1}{m}\frac{pr}{2h} = 0{,}35\,\frac{pr}{h}\left(\text{für } m = \frac{10}{3}\right) \quad (200)$$

berechnet. — Wo Nietungen vorkommen, muss natürlich bei der Berechnung des Kessels auf die dadurch veranlasste Schwächung Rücksicht genommen werden; ebenso auf die etwa in Aussicht zu nehmende Verminderung der Wandstärke durch Rosten u. s. w. Aus diesen Gründen liefern die für die Bemessung der Kesselstärke in der Praxis gebräuchlichen Formeln grössere Werthe, als sie aus Gl. (200) hervorgehen würden.

Von dem cylindrischen Kessel setze ich voraus, dass er nicht zu kurz im Vergleiche zum Durchmesser sei. Die an die Kesselböden stossenden Theile des Mantels sind nämlich mehr oder weniger gegen eine Ausdehnung gestützt und sie nehmen daher geringere Wandspannungen auf als die in der Mitte gelegenen Theile. Dieser Einfluss kann sich aber nur auf eine geringe Strecke hin bemerklich machen, da sich das dünne Blech leicht um so viel abbiegt, als dem Unterschiede zwischen den Dehnungen Δr in der Mitte und am Ende entspricht. Ich betrachte jetzt nur einen aus der Mitte herausgegriffenen Streifen von der Länge l in der Richtung der Cylinderaxe. Diesen zerlege ich noch durch einen Längsschnitt in zwei Halbcylinder.

An einem dieser Halbcylinder greifen zunächst Kräfte an, die parallel zur Axe gehen, nämlich in den beiden Querschnitten. Diese stehen unter sich im Gleichgewichte und es ist vorerst nicht nöthig, auf sie zu achten. Ausserdem müssen die in dem Längsschnitte übertragenen Wandspannungen, die sich auf zwei rechteckige Streifen vom Flächeninhalte hl vertheilen, im Gleichgewichte mit dem Flüssigkeitsdrucke auf die Innenwand

stehen. Dieselbe Ueberlegung wie beim Kugelkessel liefert die Gleichgewichtsbedingung

$$2hl\sigma_t = 2rlp \text{ oder } \sigma_t = \frac{pr}{h}. \tag{201}$$

Die Wandspannung σ_t in der Richtung der Tangente an den Kreisumfang ist daher beim cylindrischen Kessel doppelt so gross als beim Kugelkessel von demselben Durchmesser.

Für die Spannung σ_a in der Richtung der Cylinderaxe, die in einem Querschnitte übertragen werden, gilt dagegen dieselbe Gleichgewichtsbedingung (199) wie für den Kugelkessel. Für die reducirte Spannung hat man daher

$$\sigma_{\text{red}} = \sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_a = \frac{2m-1}{2m}\frac{pr}{h} = 0{,}85\frac{pr}{h} \left(\text{für } m = \frac{10}{3}\right). \tag{202}$$

Wenn die Kesselböden Halbkugeln bilden, ist ihre Berechnung schon durch jene des Kugelkessels erledigt. In anderen Fällen wird man sie als Kugelhauben ansehen können und man berechnet dann die Wandspannung in ihnen so, als wenn sie Bestandtheile eines ganzen Kugelkessels von dem betreffenden Halbmesser wären. Unter Umständen käme auch, wenn die Böden etwa durch ebene gusseiserne Platten gebildet sein sollten, die Berechnung nach den Lehren des vorigen Abschnitts in Betracht.

§ 49. Röhren von ovalem Querschnitt und Röhren von kreisförmigem Querschnitt unter äusserem Ueberdruck.

Eine Röhre von ovalem Querschnitt kann genau so berechnet werden, wie es im 5. Abschnitte für einen Ring auseinander gesetzt wurde. Der durch Abb. 47, S. 224 dargestellte Fall entspricht fast vollständig dem hier vorliegenden; man muss sich nur die Lasten gleichförmig über den ganzen Umfang vertheilt denken. Die Durchführung der Rechnungen bietet auch keine besonderen Schwierigkeiten. Es wäre daher nicht nöthig, hier noch näher darauf einzugehen — um so weniger, als Röhren von ovalem Querschnitte, wegen des geringen Widerstandes, den sie einer Verbiegung entgegensetzen,

zur Herstellung von Gefässen, die einem grösseren Flüssigkeitsdrucke ausgesetzt sind, nur ganz selten verwendet werden — wenn nicht eine Frage von ganz eigener Art dazu führte. Man denke sich nämlich ein ursprünglich genau kreisrundes Rohr durch einen zufälligen Umstand in der einen Richtung etwas elastisch zusammengedrückt, so dass der Querschnitt etwa elliptisch wird. Wenn die äussere Veranlassung wegfällt, geht das Rohr ohne Zweifel wieder in seine ursprüngliche Gestalt zurück, wenn es unter einem inneren Ueberdrucke steht. Man kann aber im Zweifel sein, ob dies auch zutrifft, wenn das Rohr von aussen her einem Ueberdrucke ausgesetzt ist. Denn ohne jede Rechnung sieht man schon ein, dass ein äusserer Ueberdruck die vorher bewirkte Abplattung aufrecht zu halten und noch zu vergrössern sucht. Es fragt sich also, ob diese Wirkung des äusseren Ueberdrucks oder ob die elastischen Kräfte, die dem Rohre die ursprüngliche Gestalt zurückzugeben suchen, die Oberhand behalten. Diese praktisch recht wichtige Frage (man denke nur an die Flammröhren der Dampfkessel) erfordert zu ihrer Beantwortung eine eingehende Rechnung.

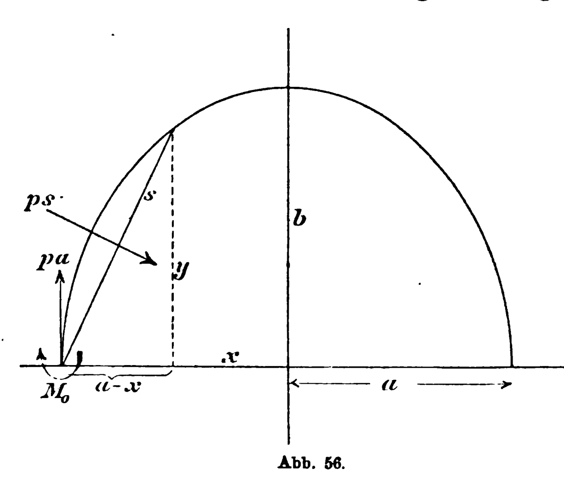


Abb. 56.

In Abb. 56 ist eine Hälfte des Rohrquerschnitts gezeichnet, von dem ich annehme, dass er nur wenig von der Kreisform abweiche; die Halbaxe b der Ellipse sei also nur wenig grösser als a. Ein Rohr von diesem Querschnitte sei einem äusseren Ueberdrucke p ausgesetzt; ich betrachte einen Streifen von der Länge 1 in der Richtung der Rohraxe. Das Biegungsmoment

am Ende der kleinen Axe, also für $y = 0$, $x = a$ bezeichne ich mit M_0; für das Biegungsmoment im Querschnitte xy des Streifens, hat man dann, ganz wie früher beim Ring,

$$M = M_0 + pa(a - x) - \frac{ps^2}{2}. \tag{203}$$

Mit s ist die Länge der Sehne bezeichnet, auf die man sich an Stelle des zugehörigen Bogens den Flüssigkeitsdruck auf Grund einer schon mehrmals benutzten Ueberlegung wirkend denken kann. Nach dem Pythagoräischen Lehrsatze ist

$$s^2 = y^2 + (a - x^2)$$

und nach der Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{oder } x^2 = a^2 - \frac{a^2}{b^2} y^2.$$

Mit Rücksicht hierauf geht Gl. (203) über in

$$M = M_0 - \frac{p}{2}(y^2 + x^2 - a^2) = M_0 - \frac{p}{2} y^2 \cdot \frac{b^2 - a^2}{b^2}.$$

Zur Abkürzung soll die Abplattung der Ellipse mit α bezeichnet, also

$$\alpha = \frac{b - a}{b}$$

gesetzt werden; dann ist, da a und b nur wenig voneinander verschieden sein sollen, genau genug

$$\frac{b^2 - a^2}{b^2} = \frac{b - a}{b} \cdot \frac{b + a}{b} = 2\alpha.$$

Der Ausdruck für M vereinfacht sich dadurch zu

$$M = M_0 - py^2\alpha. \tag{204}$$

Es fragt sich noch, wie gross M_0 ist. Dazu beachten wir, wie früher beim Ringe, dass die Biegungsmomente jedenfalls in solcher Art vertheilt sein müssen, dass die von ihnen bewirkten elastischen Winkeländerungen $\Delta d\varphi$ für den ganzen Quadranten zusammengenommen Null geben müssen. Wir setzen

$$\int \Delta\, d\varphi = \int \frac{M ds}{E\Theta} = 0$$

oder, wenn man den Werth von M einführt und beachtet, dass Θ constant ist, weil das Rohr selbstverständlich überall dieselbe Stärke haben soll,

$$M_0 \int ds = p\alpha \int y^2\, ds. \tag{205}$$

Das Integral $\int ds$ ist streng genommen ein elliptisches; es gibt die Bogenlänge des Ellipsenquadranten an. Da sich die Ellipse aber nur wenig von einem Kreise unterscheiden sollte, kann man dafür genau genug den Umfang eines Kreisquadranten setzen, dessen Halbmesser das Mittel aus a und b ist. Ebenso kann man beim zweiten Integral $\int y^2 ds$ das Trägheitsmoment eines Kreisviertelbogens von mittlerem Halbmesser an die Stelle setzen. Man hat dann

$$\int ds = \frac{\pi r}{2}; \quad \int y^2 ds = \frac{\pi r^3}{4} \text{ mit } r = \frac{a+b}{2}.$$

Hiermit gehen Gl. (205) und (204) über in

$$M_0 = \frac{p\alpha r^2}{2}; \quad M = \frac{p\alpha}{2}(r^2 - 2y^2). \tag{206}$$

Für das Ende der grossen Axe, also mit $y = b$ geht M über in

$$M_b = -\frac{p\alpha r^2}{2} = -M_0,$$

wenn man auf den geringen Unterschied zwischen r und b keine Rücksicht nimmt. Für einen unter 45^0 gezogenen Strahl wird $M = 0$ und zu beiden Seiten wachsen mit gleichen Abständen die Momente gleichmässig an, auf der einen Seite sind sie aber positiv, auf der anderen negativ.

Hiermit sind die Biegungsmomente berechnet, die der äussere Flüssigkeitsdruck in einem Rohre von gegebener Abplattung hervorbringt. Diese Biegungsmomente sind überall so gerichtet, dass sie die Abplattung zu vergrössern suchen; am Ende der kleinen Axe suchen sie nämlich, wie aus dem Vorzeichen von M_0 hervorgeht, das Rohr aufzukrümmen und am Ende der grossen Axe umgekehrt die Krümmung zu verstärken. Jetzt wollen wir die entgegengesetzte Frage in Angriff nehmen: nämlich voraussetzen, dass die berechneten Biegungsmomente für ein ursprünglich kreisförmiges Rohr unmittelbar gegeben seien und zusehen, wie gross die Abplattung ist, die durch sie hervorgerufen wird. Auch hierbei können wir genau so verfahren, wie früher bei der Berechnung des

Rings. Wir bezeichnen die elastische Aenderung des Radius r in a kurz mit Δa und haben

$$\Delta a = \int y \Delta d\varphi = \int y \frac{M ds}{E\Theta}.$$

Hier ist M aus Gl. (206) einzusetzen; dann wird

$$\Delta a = \frac{p\alpha}{2E\Theta}\left(r^2 \int y\, ds - 2\int y^3\, ds\right).$$

Das erste Integral in der Klammer ist das statische Moment des Viertelkreisbogens für den Durchmesser. Da für den Kreis die Beziehung

$$y\, ds = r\, dx$$

gilt (wie man aus der Aehnlichkeit des Dreiecks aus den Seiten ds und dx mit dem aus den Seiten y und r sofort erkennt) erhält man

$$\int y\, ds = r \int dx = r^2;$$

$$\int y^3\, ds = r \int y^2\, dx = r^3 \int dx - r \int x^2 dx = r^4 - \frac{r^4}{3} = \frac{2}{3} r^4.$$

Damit findet man schliesslich

$$\Delta a = \frac{p\alpha}{2E\Theta}\left(r^4 - r^4 \frac{4}{3}\right) = -\frac{p\alpha r^4}{6E\Theta}. \tag{207}$$

Die elastische Aenderung Δb, die der zu dem vorigen senkrechte Radius erfährt, kann ebenso berechnet werden wie Δa; man kann sich diese Mühe aber auch ersparen, indem man darauf aufmerksam macht, dass wegen der Gleichheit der Biegungsmomente zu beiden Seiten eines unter 45^0 gezogenen Radius bei entgegengesetztem Vorzeichen Δb genau ebenso gross, aber von entgegengesetztem Vorzeichen mit Δa sein muss, also

$$\Delta b = + \frac{p\alpha r^4}{6E\Theta}.$$

Die Abplattung α', die durch diese elastischen Aenderungen hervorgebracht wird, folgt daraus sofort, denn man hat

$$b - a = \Delta b - \Delta a,$$

also

$$\alpha' = \frac{p\alpha r^4}{3E\Theta}. \tag{208}$$

Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, beide Betrachtungen miteinander zu verbinden, also anzunehmen, dass die bestehende Abplattung α, die zu den Biegungsmomenten M die Veranlassung gibt, gerade gleich jener Abplattung α' ist, die umgekehrt von den Biegungsmomenten hervorgebracht wird. Wenn beide gleich sind, ist offenbar ein neuer Gleichgewichtszustand nach vollzogener Abplattung möglich; die Abplattung vergrössert sich weder, noch geht sie ohne Eingreifen äusserer Kräfte wieder zurück. Wäre dagegen α' grösser als α, so müsste die Abplattung fortgesetzt wachsen und die Röhre würde dadurch zerstört; wenn α' kleiner ist als α, muss man noch von aussen her eine Kraft einwirken lassen, um eine gewisse Abplattung aufrecht zu erhalten und beim Fehlen einer solchen Einwirkuug geht die Röhre von selbst wieder in die ursprüngliche Kreisform zurück.

Man erkennt hieraus, dass sich ein kritischer Ueberdruck angeben lässt, bei dessen Ueberschreitung sich die Röhre, selbst wenn sie ursprünglich genau kreisförmig war, nicht mehr in einem stabilen Gleichgewichtszustande befinden kann, da die geringste Störung der Kreisform genügt, zu immer weiter wachsenden Formänderungen und damit zu einem Einbruche der Röhre zu führen. Setzt man in Gl. (208) $\alpha' = \alpha$ und löst nach p auf, so erhält man den kritischen Ueberdruck p_k

$$p_k = \frac{3E\Theta}{r^3}. \tag{209}$$

Für Θ ist noch der Werth einzusetzen. Da es sich auf einen Streifen von der Länge 1 in der Richtung der Rohraxe bezieht, ist es gleich $\frac{h^3}{12}$ und daher

$$p_k = \frac{E}{4}\left(\frac{h}{r}\right)^3. \tag{210}$$

Der hier behandelte Fall ist der erste, bei dem ein labiles elastisches Gleichgewicht bisher vorkam; ähnliche Fälle werden uns später noch begegnen, der wichtigste unter allen ist jener, der bei der Knickfestigkeit vorliegt. In Anknüpfung daran

pflegt man die hier untersuchte Erscheinung auch als ein Ausknicken der Rohrwand zu bezeichnen.

Wenn das Rohr nur kurz und an den Enden durch Böden oder in anderer Weise versteift ist, kann die hier besprochene Ausknickung der Rohrwand nicht zu Stande kommen. Bei dem Flammrohre eines Dampfkessels ist die Länge immer so gross gegen den Durchmesser, dass diese Versteifung das Ausknicken des mittleren Theiles nicht zu verhüten vermag. Dagegen sucht man in solchen Fällen öfters dadurch eine grössere Steifigkeit der Rohrwand herbeizuführen, dass man in gewissen Abständen Ringe aus Winkeleisen u. s. w. herumlegt. In solchen Fällen muss man sich zur Berechnung an Stelle von Gl. (210) der Gl. (209) bedienen, indem man den Zuwachs des Trägheitsmoments durch den Ring auf einen Streifen von der Länge 1 ausschlägt.

§ 50. Dickwandige Röhren.

Der Einfachheit wegen betrachte ich nur den Fall, dass das Rohr einem inneren Ueberdrucke ausgesetzt ist; für äusseren Ueberdruck gelten die Betrachtungen ebenfalls, wenn man nur überall die Vorzeichen der Dehnungen und Spannungen umkehrt.

Aus Symmetriegründen folgt, dass von den drei Hauptaxen des Spannungszustandes für jede Stelle der Rohrwand eine parallel zur Rohraxe geht, eine zweite in die Richtung des Radius und eine dritte in die Richtung der Tangente an den Kreis fällt, der durch den gegebenen Punkt von der Rohraxe aus gelegt werden kann. Um die Spannungen und Dehnungen in der Richtung der Rohraxe will ich mich jetzt nicht kümmern; man kann sie nachträglich ermitteln und in Berücksichtigung ziehen. Wichtiger sind die beiden anderen Hauptspannungen und namentlich die in der Richtung der Tangente σ_t, denn man weiss schon aus den vorausgehenden Untersuchungen, dass die Bruchgefahr in erster Linie von ihr abhängt.

Um dieser Behandlung der Aufgabe den geeigneten Ausdruck zu geben, setze ich jetzt voraus, dass das Rohr an den

Enden nicht geschlossen sei und sich in der Richtung der Rohraxe beliebig ausdehnen und zusammenziehen könne, während zugleich auf die Innenwand der specifische Druck p ausgeübt wird. Um das Mitschleppen eines überflüssigen Factors zu vermeiden, betrachte ich ein Stück des Rohrs von der Länge $= 1$.

Unter dem Einflusse des inneren Druckes erweitert sich das Rohr und die elastische Vergrösserung, die ein Radius x erfährt, der nach irgend einem Theilchen der Rohrwand gezogen ist, sei mit u bezeichnet. Wenn u als Function von x bekannt wäre, könnte man daraus die Dehnungen ε_t und ε_r in der Richtung der Tangente und des Radius und hiermit auch die zugehörigen Spannungen σ_t und σ_r berechnen; die Aufgabe wäre also gelöst. Es wird sich also vor allen Dingen darum handeln, diese Function u zu bestimmen.

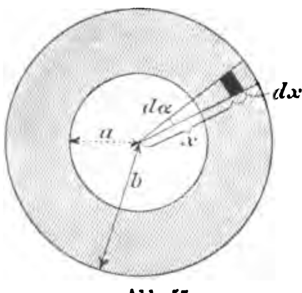


Abb. 57.

In Abb. 57 ist ein Querschnitt des Rohrs gezeichnet und durch zwei Radien, die den Centriwinkel $d\alpha$ miteinander bilden, sowie durch zwei Kreisbögen mit den Halbmessern x und $x + dx$ ist ein Flächenelement abgegrenzt. Diesem Flächenelemente entspricht ein Volumenelement des Rohrs, für das wir die Bedingung für das Gleichgewicht der daran angreifenden Spannungen anschreiben wollen; dies wird uns zur Lösung der Aufgabe führen. In Abb. 58 (S. 303) ist das Volumenelement noch besonders herausgezeichnet mit der Angabe der daran angreifenden Spannungen.

Zunächst bemerke ich, dass die specifische Dehnung in der Richtung der Tangente

$$\varepsilon_t = \frac{u}{x} \tag{211}$$

gesetzt werden kann, denn die Länge eines Kreisumfangs wächst proportional mit dem Radius. Für die specifische Dehnung in der Richtung des Radius erhält man dagegen

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dx}, \tag{212}$$

denn aus dx wird nach der Formänderung $dx + du$. Man sieht sofort ein, dass in Wirklichkeit in der Richtung des Radius eine Verkürzung eintreten, dass also du und hiermit ε_r negativ werden muss. Ich lasse indessen die Gleichung in der angeschriebenen Form stehen. Die weitere Untersuchung muss dann von selbst zu einem negativen Werthe von ε_r führen. Damit hängt es auch zusammen, dass ich σ_r in Abb. 58 mit einem Pfeile eingezeichnet habe, der eine Zugspannung bedeutet. Wenn nicht ausdrücklich etwas anderes verabredet wird, haben wir die vorkommenden Spannungen zunächst immer als Zugspannungen und die specifischen Längenänderungen als Dehnungen zu betrachten und als solche positiv in die Rechnung einzuführen. Das Ergebniss der Rechnung gibt dann durch das schliesslich herauskommende Vorzeichen zu erkennen, welche der vorkommenden Spannungen in Wirklichkeit Druckspannungen sind.

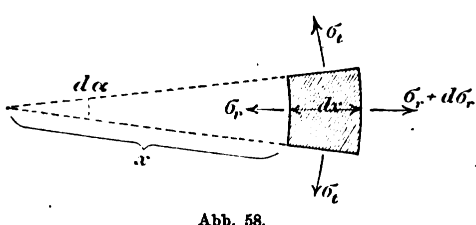


Abb. 58.

Die Spannungen σ_t in Abb. (58) fassen wir zunächst zu einer Resultirenden zusammen. Auf jede der beiden Seitenflächen haben wir $dx \cdot \sigma_t$ und wenn wir diese beiden Kräfte mit Hülfe eines Kraftdreiecks zu einer Resultirenden vereinigen, erhält diese die Grösse

$$dx\, \sigma_t\, d\alpha.$$

Nun betrachten wir die Spannungen σ_r. Auf der inneren Fläche haben sie die Grösse

$$\sigma_r x\, d\alpha,$$

denn der zum Radius x und zum Centriwinkel $d\alpha$ gehörende Bogen ist gleich $x\,d\alpha$. Gegenüber liegt die Spannung $\sigma_r + d\sigma_r$, die sich über die Fläche $(x + dx)\,d\alpha$ erstreckt. Beide Kräfte gehen in entgegengesetzter Richtung; es kommt also nur auf

ihren Unterschied an, der auch unmittelbar als Differential des vorausgehenden Ausdrucks, also in der Form

$$\frac{d}{dx}(\sigma_r x)\,dx\,d\alpha$$

angeschrieben werden kann. Wenn σ_r und der Differentialquotient positiv sind, bedeutet dies eine Resultirende, deren Pfeil nach aussen hin geht. Die Resultirende der σ_t geht dagegen bei positivem Werthe von σ_t nach innen. Das Gleichgewicht gegen Verschieben in der Richtung des Radius erfordert daher, dass

$$\sigma_t = \frac{d}{dx}(\sigma_r x) \tag{213}$$

ist. Um diese Gleichung zur Ermittelung von u verwenden zu können, müssen wir zunächst die Spannungen in den specifischen Dehnungen ausdrücken. Nach dem Elasticitätsgesetz ist

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_r\right); \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \frac{1}{m}\sigma_t\right)$$

und durch Auflösen nach σ_t und σ_r erhält man daraus

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2-1}(m\,\varepsilon_t + \varepsilon_r); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2-1}(m\,\varepsilon_r + \varepsilon_t)$$

oder, wenn man die Werthe der specifischen Dehnungen aus den Gl. (211) und (212) einsetzt,

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{u}{x} + \frac{du}{dx}\right); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2-1}\left(m\frac{du}{dx} + \frac{u}{x}\right).$$

Diese Ausdrücke führen wir in Gl. (213) ein. Sie geht dann über in

$$m\frac{u}{x} + \frac{du}{dx} = \frac{d}{dx}\left(mx\frac{du}{dx} + u\right).$$

Ich möchte noch ausdrücklich die Aufmerksamkeit auf den Zweck hinlenken, der diesen Umrechnungen zu Grunde liegt. Gl. (213) gilt nämlich offenbar ganz allgemein, gleichgültig, ob der Körper dem Hooke'schen Gesetze folgt oder nicht. Sie enthält aber zwei unbekannte Grössen σ_t und σ_r und da andere Gleichgewichtsbedingungen nicht zur Verfügung stehen, wäre es nicht möglich, beide Unbekannten aus dieser einen Gleichung zu bestimmen. Das Problem ist und bleibt

statisch unbestimmt, so lange man nicht auf Grund der elastischen Eigenschaften des Körpers noch eine andere Beziehung angeben kann. In der That hat die Untersuchung der elastischen Formänderung hier und in allen solchen Fällen nur den Zweck, die in grösserer Zahl vorkommenden Spannungscomponenten auf eine kleinere Zahl unbekannter Formänderungsgrössen zurückzuführen und dadurch die Lösung der Gleichungen zu ermöglichen. So sind wir hier jetzt dazu gelangt, die Gl. (213) so umzuformen, dass nur noch die eine Unbekannte u in ihr vorkommt.

Die letzte Gleichung vereinfacht sich nach Ausführung der Differentiation auf der rechten Seite zu

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} - u = 0. \tag{214}$$

Sie stimmt fast genau überein mit der Differentialgleichung (155) für die Meridiancurve der elastischen Fläche einer kreisförmigen Platte und in der That gleicht auch die vorausgehende Entwickelung in vielen Punkten und namentlich in dem ganzen Plane der Untersuchung der damals durchgeführten. Man braucht in Gl. (155) nur $N = 0$ zu setzen und die abhängige Veränderliche mit u anstatt mit φ zu bezeichnen, um sie in Gl. (214) überzuführen. Daher gilt hier auch das frühere Integral, Gl. (156) in der Form

$$u = Bx + \frac{C}{x}. \tag{215}$$

Es fehlt jetzt nur noch die Ermittelung der Integrationsconstanten B und C. Für u selbst sind hier gar keine Grenzbedingungen vorgeschrieben, wohl aber für σ_r, denn für $x = a$, also an der Innenfläche, muss $\sigma_r = -p$ und für $x = b$, also aussen, muss $\sigma_r = 0$ werden. Um diese Bedingungen zur Berechnung der Integrationsconstanten verwerthen zu können, muss man zunächst den Ausdruck für σ_r aufstellen. Durch Einsetzen von u aus Gl. (215) geht dieser über in

$$\sigma_r = \frac{mE}{m-1} B - \frac{mE}{m+1} \frac{C}{x^2}.$$

Zur Abkürzung wollen wir dafür

$$\sigma_r = B' - \frac{C'}{x^2} \tag{216}$$

schreiben. Für die neuen Constanten B' und C' hat man nun die Gleichungen

$$-p = B' - \frac{C'}{a^2}; \qquad 0 = B' - \frac{C'}{b^2},$$

aus denen durch Auflösen folgt

$$B' = p\,\frac{a^2}{b^2 - a^2}; \quad C' = p\,\frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2}. \tag{217}$$

Für u hat man daher jetzt

$$u = p\,\frac{a^2}{mE(b^2 - a^2)}\left((m-1)x + (m+1)\frac{b^2}{x}\right). \tag{218}$$

Ferner folgt für σ_r und σ_t

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= p\,\frac{a^2}{b^2 - a^2}\cdot\frac{x^2 - b^2}{x^2} \\ \sigma_t &= p\,\frac{a^2}{b^2 - a^2}\cdot\frac{x^2 + b^2}{x^2} \end{aligned}\right\}. \tag{219}$$

Je kleiner x ist, desto grössere Werthe nehmen beide Hauptspannungen an. Das Material wird also am meisten an der Innenseite des Rohrs beansprucht, was sich übrigens schon auf Grund einer einfachen Ueberlegung, die in § 48 angestellt wurde, voraussehen liess. Die grösste Anstrengung hängt von der grössten Dehnung ab, also

$$\sigma_{\text{red}} = E[\varepsilon_t]_{x=a} = E\left(\frac{u}{x}\right)_{x=a} = \frac{p}{b^2 - a^2}\left(\frac{m-1}{m}a^2 + \frac{m+1}{m}b^2\right). \tag{220}$$

§ 51. Ringgeschütz.

Wenn ein Gefäss einem sehr hohen inneren Ueberdrucke ausgesetzt ist, wie z. B. ein Geschützlauf oder der Cylinder einer hydraulischen Presse, nützt die Vergrösserung der Wandstärke schliesslich nicht mehr viel, da sich die aussen hinzukommenden Schichten, wie aus den Untersuchungen des vorigen Paragraphen hervorgeht, viel weniger an der Aufnahme der Spannungen betheiligen, als die inneren, die dadurch entlastet

werden sollen. Man hilft sich dann oft damit, dass man das Rohr aus zwei Theilen herstellt, von denen der äussere auf einen etwas kleineren Durchmesser ausgebohrt wird, als der äussere Durchmesser des inneren Rohrs, auf das er aufgesteckt werden soll. Um das eine Rohr über das andere schieben zu können, erwärmt man es um so viel, dass es darüber geht. Beim Abkühlen wird dann das innere Rohr zusammengepresst und das äussere bleibt etwas ausgedehnt. Dadurch kommen von vornherein Spannungen in das zusammengesetzte Rohr, Zugspannungen σ_t im äusseren und Druckspannungen σ_t im inneren Theile. Wenn nun ein Schuss abgefeuert oder sonst das Rohr einem inneren Ueberdrucke ausgesetzt wird, treten überall noch Zugspannungen σ_t hinzu. An der Innenseite des Rohrs bewirken diese zunächst nur eine Verminderung oder Aufhebung der vorher dort bestehenden Druckspannungen und nur der Ueberschuss über diese kommt wirklich zur Geltung. Im äusseren Theile dagegen addiren sich die aus beiden Ursachen stammenden Zugspannungen einfach. Man erreicht durch diese Anordnung daher eine gleichmässigere Ausnutzung des Materials, die natürlich noch gesteigert werden kann, wenn man das Rohr statt aus zwei, aus drei oder noch mehr Theilen zusammensetzt. Hier genügt aber die Behandlung des einfachsten Falles.

Es wird am besten sein, wenn ich die Rechnungen sofort im Anschlusse an ein bestimmtes Zahlenbeispiel durchführe, weil man so eine anschaulichere Vorstellung gewinnt. Die drei Halbmesser des zusammengesetzten Rohres seien der Reihe nach mit a, b, c bezeichnet und es sei $a = 10$, $b = 15$, $c = 20$ cm. Beim Aufziehen möge das äussere Rohr bei 100^0 C. Temperaturunterschied gerade auf das innere gepasst haben. Man wird zunächst ermitteln, mit welchem Drucke beide Rohre nach dem Erkalten aufeinander sitzen und wie gross die Beanspruchung des Materials an den einzelnen Stellen ist, wenn das Rohr ganz sich selbst überlassen ist.

Der Unterschied zwischen dem inneren Halbmesser des äusseren und dem äusseren Halbmesser des inneren Rohrs im

spannungslosen Zustande bei gleicher Temperatur sei mit δb bezeichnet. Mit dem Ausdehnungscoefficienten $\frac{1}{80\,000}$ für 1° C, hat man

$$\delta b = \frac{b}{80\,000} \cdot 100 = 0{,}187\ mm.$$

Die Durchmesser unterscheiden sich um das Doppelte, also um $\frac{3}{8}\,mm$.

Für die sich auf das innere Rohr beziehenden Grössen wollen wir den Zeiger 1, für die des äusseren Rohrs den Zeiger 2 benutzen. Für die elastische Verschiebung u in der Richtung des Radius haben wir dann nach den Untersuchungen des vorigen Paragraphen (siehe Gl. 215)

$$u_1 = B_1 x + \frac{C_1}{x}; \quad u_2 = B_2 x + \frac{C_2}{x}. \tag{221}$$

Es handelt sich jetzt um die Bestimmung der vier Integrationsconstanten $B_1\, C_1\, B_2\, C_2$. Dazu müssen wir ähnlich verfahren wie vorher, nämlich die Bedingungen benutzen, dass aussen und hier zugleich auch innen σ_r zu Null wird, dass ferner σ_r bei $x = b$ für beide Rohre gleich wird und dass schliesslich u_1 und u_2 sich bei $x = b$ um einen bekannten Betrag voneinander unterscheiden.

Für σ_r hat man nach Gl. (216)

$$\sigma_{r,1} = B_1' - \frac{C_1'}{x^2}, \quad \sigma_{r,2} = B_2' - \frac{C_2'}{x^2},$$

wenn wie früher zur Abkürzung

$$B_1' = \frac{mE}{m-1} B_1, \quad C_1' = \frac{mE}{m+1} C_1, \quad B_2' = \frac{mE}{m-1} B_2,$$
$$C_2' = \frac{mE}{m+1} C_2$$

gesetzt wird. Die ersten drei Bedingungsgleichungen lauten daher

$$\left.\begin{aligned} B_1' - \frac{C_1'}{a^2} &= 0 \\ B_2' - \frac{C_2'}{c^2} &= 0 \\ B_1' - \frac{C_1'}{b^2} &= B_2' - \frac{C_2'}{b^2} \end{aligned}\right\}. \tag{222}$$

Zur Aufstellung der vierten bedenke man, dass sich das äussere Rohr jedenfalls im gedehnten Zustande befindet, u_2 also überall positiv ist, während das innere Rohr zusammengedrückt wird, u_1 also negativ ist. An der Grenze beider Rohrtheile muss die Summe der Absolutbeträge von u_1 und u_2 gleich dem ursprünglichen Unterschiede δb der Radien sein, denn das gegenseitige Nachgeben um u_1 bezw. u_2 bringt beide Rohre zum Passen. Man hat also mit Beachtung des negativen Vorzeichens von u_1

$$[u_2]_{x=b} - [u_1]_{x=b} = \delta b,$$

oder, wenn man die Werthe aus Gl. (221) einsetzt

$$B_2 b + \frac{C_2}{b} - B_1 b - \frac{C_1}{b} = \delta b.$$

wofür auch mit Benutzung der Unbekannten B_1' u. s. f.

$$(m-1)(B_2' - B_1') + (m+1)\frac{C_2' - C_1'}{b^2} = mE\frac{\delta b}{b} \quad (223)$$

geschrieben werden kann. Die vier Gleichungen (222) und (223) sind jetzt nach den darin überall im ersten Grade vorkommenden Unbekannten aufzulösen. Man erhält dadurch

$$\left.\begin{aligned} B_1' &= -\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{E\delta b}{2b}; & C_1' &= -a^2\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{E\delta b}{2b} \\ B_2' &= \frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{E\delta b}{2b}; & C_2' &= c^2\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{E\delta b}{2b} \end{aligned}\right\} \quad (224)$$

und für die ursprünglichen Unbekannten B_1 u. s. f.

$$\left.\begin{aligned} B_1 &= -\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{m-1}{2m}\,\frac{\delta b}{b}; & C_1 &= -a^2\cdot\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\,\frac{m+1}{2m}\,\frac{\delta b}{b} \\ B_2 &= \frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{m-1}{2m}\,\frac{\delta b}{b}; & C_2 &= c^2\cdot\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}\,\frac{m+1}{2m}\,\frac{\delta b}{b} \end{aligned}\right\}. \quad (225)$$

Durch Einsetzen der Zahlenwerthe und mit $m = \frac{10}{3}$ und $E = 25 \cdot 10^5$ atm (für Gussstahl) wird dies

$B_1' = -911$ atm; $C_1' = -91\,100$ kg; $B_2' = 651$ atm
$C_2' = 260\,400$ kg,

$B_1 = -255 \cdot 10^{-6}$; $C_1 = -474 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^2$; $B_2 = 182 \cdot 10^{-6}$;
$C_2 = 1354 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{cm}^2$.

Für den Druck zwischen beiden Rohren, der mit σ_b bezeichnet werden mag, erhält man jetzt

$$\sigma_b = B_1' - \frac{C_1'}{b^2} = -911 + \frac{91\,100}{225} = -506 \text{ atm}$$

oder auch allgemeiner

$$\sigma_b = -\frac{(b^2-a^2)(c^2-b^2)}{2b^2(c^2-a^2)} \cdot E\frac{\delta b}{b}. \tag{226}$$

Für die Spannungen σ_r und σ_t an irgend einer anderen Stelle des äusseren Rohrs kann man jetzt ohne weiteres die Gl. (219) anwenden, wenn man nur berücksichtigt, dass an Stelle von a und b hier b und c treten und an Stelle von p den Absolutbetrag von σ_b nimmt. Auch für das innere Rohr kann man diese Spannungen leicht ermitteln. Wir wollen uns aber damit jetzt nicht aufhalten und nur noch die reducirten Spannungen σ'_{red} an der Innenseite des inneren und σ''_{red} an der Innenseite des äusseren Rohrs berechnen. Dafür erhält man

$$\sigma'_{red} = E\left[\frac{u_1}{x}\right]_{x=a} = E\left(B_1 + \frac{C_1}{a^2}\right) = -E\frac{c^2-b^2}{c^2-a^2}\frac{\delta b}{b} = -1820 \text{ atm}$$

$$\sigma''_{red} = E\left[\frac{u_2}{x}\right]_{x=b} = E\left(B_2 + \frac{C_2}{b^2}\right) =$$

$$= E\frac{b^2-a^2}{c^2-a^2}\cdot\frac{\delta b}{b}\left\{\frac{m-1}{2m} + \frac{c^2}{b^2}\,\frac{m+1}{2m}\right\} = +1960 \text{ atm}.$$

Nun sei angenommen, dass auf das so zusammengesetzte Rohr ein innerer Ueberdruck einwirkt, dass also etwa ein Schuss abgefeuert wird. Wir wollen auch hier eine bestimmte Zahlenangabe zu Grunde legen und annehmen, dass der innere Ueberdruck $p = 2000$ atm betrage. Durch diesen inneren Ueberdruck werden von Neuem elastische Formänderungen und Spannungen hervorgerufen, die sich den ursprünglich vorhandenen zugesellen. Voraussetzung ist dabei nur, dass die Proportionalitätsgrenze des Materials nicht überschritten wird. Um diese neu hervorgerufenen Spannungen zu berechnen, können wir das Rohr als aus einem Stücke bestehend ansehen und die Formeln des vorigen Paragraphen unmittelbar darauf anwenden. Dabei brauchen wir uns nur um die reducirten Spannungen an den Innenseiten beider Rohrtheile zu kümmern,

da die Beanspruchung des Materials sonst jedenfalls überall geringer ist, als an diesen beiden Stellen. Aus den Untersuchungen des vorigen Paragraphen folgt für irgend einen Abstand x vom Mittelpunkte

$$\sigma_{red} = E\frac{u}{x} = p\frac{a^2}{b^2-a^2}\left\{\frac{m-1}{m} + \frac{m+1}{m}\frac{b^2}{x^2}\right\},$$

wobei aber jetzt an Stelle von b der äussere Radius des ganzen Rohrs, also c zu setzen ist.

Für $x = 10$ cm gibt dies $\sigma_{red} = +3930$ atm und für $x = 15$ cm wird $\sigma_{red} = +2010$ atm.

Die im Ganzen auftretende Beanspruchung des Materials während des Abfeuerns eines Schusses ergibt sich durch Summirung dieser reducirten Spannungen zu den anfänglich vorhandenen, also

an der Innenseite des inneren Rohrs $= -1820 + 3930$
$= +2110$ atm,
an der Innenseise des äusseren Rohrs $= +1960 + 2010$
$= +3970$ atm.

Im inneren Rohre ist also das Material sehr stark entlastet; dafür ist aber die Beanspruchung des äusseren Rohrs zu gross geworden. Man hatte also δb zu gross gewählt und wird darnach die Anordnung abzuändern haben. Am vortheilhaftesten wird man δb so wählen, dass die Beanspruchung beider Rohrtheile gleich gross wird. Um dies zu erreichen, kann man entweder durch Probiren, d. h. durch Wiederholung der vorigen Rechnung für eine andere Wahl von δb den vortheilhaftesten Werth dieses Unterschiedes ermitteln oder man kann auch unmittelbar nach Anleitung der vorausgehenden Untersuchungen eine Gleichung für δb aufstellen. Es wird nicht nöthig sein, dies weiter auszuführen.

Schliesslich sei noch darauf hingewiesen, dass sich diese Rechnungen ohne erhebliche Aenderung auch auf den Fall anwenden lassen, dass ein Rohr auf einen Vollcylinder aufgezogen wird. Man braucht dann nur $a = 0$ zu setzen; die Constante C_1 geht dann nach Gl. (225) von selbst in Null

über, wie es sein muss, damit u_1 für $x = 0$ verschwindet. Man kann also darnach z. B. berechnen, wie gross der Unterschied δb der beiden Radien einer Welle und der Bohrung einer Kurbel, die auf jene warm aufgezogen werden soll, genommen werden darf, ohne dass die Materialbeanspruchung das zulässige Maass überschreitet.

Eine Bemerkung ist vielleicht noch am Platze, obschon sie eigentlich nur Selbstverständliches enthält. Sobald nämlich unter einem starken Ueberdrucke die Proportionalitätsgrenze des Materials überschritten wird, ändert sich die Vertheilung der Spannungen gegenüber der hier berechneten ab. Wenn z. B. bei einem einfachen Geschützrohre σ_{red} an der Innenseite über die Elasticitätsgrenze hinausgeht, tritt hier eine bleibende Dehnung ein und die weiter nach aussen liegenden Theile werden dann stärker in Anspruch genommen. Nach Aufhören des Ueberdruckes verhält sich das einfache Rohr dann ähnlich wie ein aus zwei Stücken zusammengesetztes. Es ist aber klar, dass man solche bleibende Formänderungen vermeiden möchte, da sie ein genaues Passen des Kolbens bezw. des Geschosses auf die Dauer unmöglich machen.

Aufgaben.

37. Aufgabe. Eine biegsame Membran verschliesst eine kreisförmige Oeffnung und ist einem Ueberdrucke von der einen Seite her ausgesetzt. Man soll die entstehende Ausbauchung und die Spannung berechnen.

Lösung. Die Mittelebene geht in eine Kugelhaube über, deren Pfeil f als klein gegenüber dem Halbmesser r der Oeffnung angesehen werden kann. Wenn man den Radius der Kugelhaube mit R bezeichnet, hat man nach dem Pythagoräischen Satze

$$R^2 = r^2 + (R - f)^2,$$

woraus genau genug

$$f = \frac{r^2}{2R}$$

folgt. Der Winkel, den der äusserste Radius der Kugelhaube mit der Symmetrieaxe bildet, sei mit φ bezeichnet, dann ist auch, da φ klein ist,

$$r = R \sin\varphi = R\varphi$$

und daher
$$f = \frac{r}{2}\varphi.$$

Der zu φ und zum Radius R gehörige Bogen ist gleich $R\varphi$; ursprünglich war diese Länge gleich r, also gleich $R \sin\varphi$. Hier dürfen wir nicht $\sin\varphi$ mit φ vertauschen, weil es gerade darauf ankommt, die kleine Dehnung, die die Membran bei der Formänderung erfährt, zu berechnen. Bezeichnen wir die specifische Dehnung mit ε, so wird
$$\varepsilon = \frac{R\varphi - R\sin\varphi}{R\varphi} = \frac{\varphi - \sin\varphi}{\varphi} = \frac{\varphi^2}{6}.$$

Den letzten Werth erhält man durch Entwickelung der Sinusreihe, von der es genügt, die beiden ersten Glieder beizubehalten. Aus der Dehnung folgt die Spannung σ der Membran in der Richtung des Meridians. Es genügt, wenn wir setzen
$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E\varphi^2}{6}.$$

Andererseits müssen aber die Spannungen im Gleichgewichte mit den Druckkräften stehen, denen die Membran ausgesetzt ist. Dazu können wir uns der Gl. (199) bedienen, da es hierfür keinen Unterschied macht, ob die Kugelhaube zu einer ganzen Kugel gehört oder ob sie in anderer Weise gestützt ist. Wir haben also auch
$$\sigma = \frac{pR}{2h}$$

und die Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert, wenn wir vorher noch beiderseits mit φ multipliciren,
$$\frac{pr}{2h} = \frac{E\varphi^3}{6},$$
woraus
$$\varphi = \sqrt[3]{\frac{3pr}{Eh}}$$
folgt. Man braucht diesen Werth nur in die vorher schon aufgestellten Formeln für f und σ einzusetzen, um die Aufgabe zu lösen, also
$$f = \frac{r}{2}\sqrt[3]{\frac{3pr}{Eh}}; \quad \sigma = \sqrt[3]{\frac{p^2E}{24} \cdot \frac{r^2}{h^2}}.$$

Die Lösung ist freilich nicht streng richtig, weil σ nicht nur von der Dehnung ε in der Richtung des Meridians, sondern auch von der in der Richtung des Parallelkreises abhängt, über die sich nur aussagen lässt, dass sie am Umfange gleich Null ist. Ebenso ist auch nicht sicher, ob die Dehnung ε in der That über die

ganze Fläche hin gleich gross ist, wie es bei der Berechnung angenommen wurde. Für die praktische Anwendung sind die Formeln aber jedenfalls genau genug.

38. *Aufgabe. Ein dünnwandiges Gefäss hat die Gestalt eines Rotationsellipsoides und ist einem inneren Ueberdrucke ausgesetzt; man soll den Spannungszustand der Gefässwand untersuchen.*

Anmerkung. Ein Ellipsoid und überhaupt jedes Gefäss von überall endlicher Krümmung (bei dem also an keiner Stelle einer der Hauptkrümmungsradien unendlich gross wird) kann einem inneren oder äusseren Ueberdrucke widerstehen, wenn die Wand auch so dünn ist, dass sie keinen merklichen Widerstand gegen Biegung leisten kann, während ein Cylinder dazu im Allgemeinen nicht im Stande ist.

Lösung. Schnitte durch die Rotationsaxe bezeichne ich als Meridiane, solche senkrecht dazu als Parallelkreise. Ich lege zunächst einen Parallelkreisschnitt und betrachte das Gleichgewicht der dadurch abgegrenzten Haube. Der Symmetrie wegen sind die Spannungen σ_t (wie ich sie nennen will) dem ganzen Umfange nach gleichförmig vertheilt. Bezeichnet man den Winkel, den die Tangente an den Meridianschnitt bei dem betreffenden Parallelkreise mit der Rotationsaxe bildet, mit φ, so ist

$$\sigma_t \cdot 2\pi x h \cdot \cos\varphi = \pi x^2 p$$

die Gleichgewichtsbedingung, aus der sich σ_t zu

$$\sigma_t = \frac{p x}{2 h \cos\varphi}$$

berechnet, wenn x den Halbmesser des Parallelkreises bedeutet.

Soweit gleicht also das Verfahren vollständig dem bei der Berechnung des Kugelkessels angewendeten. Um aber auch die Ringspannungen σ_r zu finden, die in einem Meridianschnitte übertragen werden, genügt es nicht, das Gleichgewicht der einen Hälfte des Gefässes in's Auge zu fassen, weil man nicht wissen kann, wie sich die Ringspannungen über den Umfang des Meridianschnittes vertheilen. Man grenze daher aus der Kesselwand ein Element ab, das zwischen zwei Meridianschnitten, die den Winkel $d\alpha$ miteinander bilden, und zwischen zwei Parallelkreisschnitten, im Abstande dy voneinander, liegt. An den vier Umfangsseiten des Elements wirken die Spannungen σ_r und σ_t und dazu kommt der Flüssigkeitsdruck auf die Fläche des Elements. Die fünf Kräfte müssen im Gleichgewichte miteinander stehen; wir brauchen dabei nur auf die Gleichgewichtsbedingung gegen Verschieben in der Richtung des Parallelkreisradius zu achten, denn die Gleich-

gewichtsbedingung gegen Verschieben parallel zur Rotationsaxe ist zur Berechnung von σ_t schon verwendet worden.

Das zwischen beiden Parallelkreisen liegende Element des Meridians (also das Bogenelement der Ellipse) sei mit ds bezeichnet. Die Spannungen σ_r an beiden Meridianschnittflächen geben zusammen die Componente

$$\sigma_r h ds \cdot d\alpha$$

mit dem Pfeile auf den Mittelpunkt zu gerichtet. Die Spannung σ_t im oberen Parallelkreisschnitt (vom Radius x) hat die Grösse $\sigma_t h x d\alpha$ und die Componente ist gleich $\sigma_t h x d\alpha \sin\varphi$; der Pfeil ist nach dem Mittelpunkte gekehrt. Entgegengesetzt gerichtet ist aber die Componente am zweiten Parallelkreisschnitt. Der Unterschied zwischen beiden Componenten ist das Differential des vorhergehenden Ausdrucks, also

$$\frac{d}{dx}(\sigma_t x \sin\varphi) h \, d\alpha \, dx$$

und bedeutet eine nach auswärts gekehrte Kraft. Der Flüssigkeitsdruck auf die Fläche endlich hat die Componente

$$p ds x d\alpha \cos\varphi \quad \text{oder} \quad -p x dy d\alpha,$$

die nach aussen hin gewendet ist. Die Gleichgewichtsbedingung lautet demnach, wenn man mit $d\alpha \cdot dx$ dividirt und vorher den Werth von σ_t einsetzt,

$$\frac{p}{2}\frac{d}{dx}(x^2 \operatorname{tg}\varphi) - \sigma_r h \frac{ds}{dx} - px\frac{dy}{dx} = 0.$$

In dieser Gleichung ist σ_r die einzige Unbekannte; für $\operatorname{tg}\varphi$ kann man $-\frac{dx}{dy}$ setzen und die Differentialquotienten lassen sich mit Hülfe der Ellipsengleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ausdrücken. Wenn man dies gethan hat und die Werthe in die vorhergehende Gleichung einsetzt, erhält man daraus sofort σ_r als Function von x.

39. Aufgabe. Die Berechnung der Spannungen eines dünnwandigen ringförmigen Gefässes von kreisförmigem Querschnitte, das unter einem inneren Ueberdrucke steht, soll in allgemeinen Umrissen angegeben werden.

Lösung. Ein Schnitt mm (Abb. 59) (S. 316) senkrecht zur Rotationsaxe trifft die Gefässwand nach zwei Kreisen. Wenn man nun aber auch aus Symmetriegründen schliessen kann, dass die

Spannungen σ_t längs des Umfangs jedes dieser Kreise gleichförmig vertheilt sind, so sind sie doch sicher im inneren Kreise verschieden von denen längs des äusseren Kreises und man kommt daher mit der Betrachtung des Gleichgewichtes des oben abgeschnittenen Theils, die zur Lösung der vorigen Aufgabe führte, nicht aus. Deshalb denken wir uns den oberen Theil noch durch einen Ringschnitt *nn* in zwei Hälften getheilt. Innerhalb dieses Ringschnitts treten nur horizontal gerichtete Kräfte auf; wir können daher

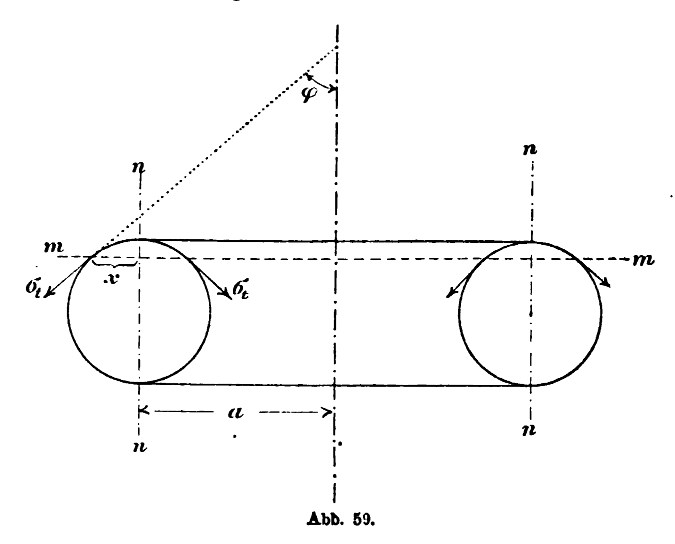


Abb. 59.

eine Gleichgewichtsbedingung für Verschieben jeder Hälfte in vertikaler Richtung aufstellen, in der das zugehörige σ_t als einzige Unbekannte auftritt. So hat man für den nach aussen hin liegenden Theil unter Benutzung der in die Abbildung eingeschriebenen Bezeichnungen

$$\sigma_t \, 2\pi(x + a) h \cos\varphi = p\pi\left((a + x)^2 - a^2\right),$$

woraus mit Berücksichtigung der Beziehung $\cos\varphi = \frac{x}{r}$

$$\sigma_t = p\,\frac{r}{h} \cdot \frac{2a + x}{2a + 2x}$$

folgt. Nachdem die Spannungen σ_t bekannt sind, können die Ringspannungen genau auf dieselbe Art wie bei der Lösung der vorigen Aufgabe ermittelt werden.

40. Aufgabe. Wie stark muss die Wand eines Flammrohres von 80 cm Durchmesser gewählt werden, wenn der äussere Ueber-

druck 10 atm beträgt und fünffache Sicherheit gegen Ausknicken verlangt wird?

Lösung. Der kritische Ueberdruck ist nach Gl. (210)

$$p_k = \frac{E}{4}\left(\frac{h}{r}\right)^3.$$

Wir setzen in diese Gleichung, der verlangten fünffachen Sicherheit wegen, $p_k = 50$ atm, $r = 40$ cm und $E = 2 \cdot 10^6$ (für Schweisseisen ein und lösen sie nach h auf; wir erhalten

$$h = r\sqrt[3]{\frac{4p_k}{E}} = 40\sqrt[3]{\frac{200}{2 \cdot 10^6}} = 1{,}856 \text{ cm}.$$

Bei Anwendung von Versteifungsringen kann h schwächer gewählt werden; es muss nur dafür gesorgt werden, dass die Ringe nicht zu weit auseinander sitzen und dass das Trägheitsmoment des Versteifungsrings das Trägheitsmoment des Blechs von der berechneten Stärke h auf eine Länge, die gleich dem Abstande der Versteifungsringe voneinander ist, mindestens ersetzt.

41. Aufgabe. Man soll die in § 50 für die dickwandigen Röhren gegebene Rechnung auf den Fall eines kugelförmigen Gefässes von grösserer Wandstärke übertragen.

Lösung. Abb. 57 bedeute jetzt den Querschnitt durch die Kugel; in diesem Sinne verwenden wir alle dort eingeschriebenen Bezeichnungen. Die Gl. (210) und (211) für die specifischen Dehnungen bleiben bestehen. Das Element, an dem das Gleichgewicht der Kräfte betrachtet wird, gehöre zu einem Kreiskegel mit dem Winkel $d\alpha$ an der Spitze. Die Componente der σ_t in der Richtung des Radius ist dann

$$\frac{1}{2}\sigma_t \pi x\, dx\, d\alpha^2.$$

Die Spannungen σ_r an der zum Radius x gehörigen Basisfläche betragen zusammen $\sigma_r \frac{\pi}{4}(x\,d\alpha)^2$ und das Differential davon ist

$$\frac{\pi}{4}\frac{d}{dx}(x^2\sigma_r)\,dx\,d\alpha^2.$$

An Stelle von Gl. (213) erhalten wir daher

$$\sigma_t \cdot x = \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(x^2\sigma_r).$$

Die beiden Unbekannten σ_r und σ_t sind jetzt in u auszudrücken. Dabei ist zu beachten, dass hier

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left(\frac{m-1}{m}\sigma_t - \frac{1}{m}\sigma_r\right); \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E}\left(\sigma_r - \frac{2}{m}\sigma_t\right)$$

ist, weil die Spannungen σ_t hier von allen Seiten her wirken (d. h. zwei der drei Hauptspannungen sind gleich σ_t). Die Auflösung liefert

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - m - 2}\left(m\,\varepsilon_t + \varepsilon_r\right); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - m - 2}\left((m-1)\,\varepsilon_r + 2\,\varepsilon_t\right)$$

oder mit Rücksicht auf die Gl. (211) und (212)

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2 - m - 2}\left(m\,\frac{u}{x} + \frac{du}{dx}\right); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2 - m - 2}\left((m-1)\frac{du}{dx} + \frac{2u}{x}\right).$$

Die Differentialgleichung geht nach Einführen dieser Werthe über in

$$2x\left(m\,\frac{u}{x} + \frac{du}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left((m-1)\,x^2\frac{du}{dx} + 2ux\right)$$

oder nach Ausführung der Differentiation, Wegheben der Glieder, die gegeneinander fortfallen und Division mit $(m-1)$

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2} + 2x\frac{du}{dx} - 2u = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$u = Bx + \frac{C}{x^2}.$$

Damit folgt für σ_r

$$\sigma_r = \frac{mE}{m^2 - m - 2}\left((m+1)\,B - (m-2)\frac{2C}{x^3}\right)$$
$$= \frac{mE}{m-2}B - \frac{2mE}{m+1}\,\frac{C}{x^3}.$$

Wenn der Ueberdruck von innen her wirkt (im entgegengesetzten Falle wäre ganz ähnlich zu verfahren) ist $\sigma_r = 0$ für $x = b$ und $\sigma_r = -p$ für $x = a$, also

$$\frac{B}{m-2} - \frac{2C}{(m+1)b^3} = 0; \quad \frac{B}{m-2} - \frac{2C}{(m+1)a^3} = -\frac{p}{mE}$$

und hieraus

$$B = \frac{m-2}{m}\,\frac{a^3}{b^3 - a^3}\cdot\frac{p}{E}; \quad C = \frac{m+1}{2m}\cdot\frac{a^3b^3}{b^3 - a^3}\,\frac{p}{E}.$$

Nachdem die Integrationsconstanten bestimmt sind, findet man alle Spannungen und die Anstrengung des Materials genau so wie bei den dickwandigen Röhren in § 50.

Neunter Abschnitt.

Die Verdrehungsfestigkeit.

§ 52. Wellen von kreisförmigem Querschnitte.

Ein Stab, der auf Verdrehen beansprucht wird, heisst im Maschinenbau eine Welle. Wenn der Querschnitt ein Kreis ist, muss man von vornherein erwarten, dass alle Punkte, die vorher auf einer Querschnittsebene enthalten waren, nach der Formänderung auch noch in einer zur Axe senkrechten Ebene liegen. Der Symmetrie wegen könnte nämlich der Querschnitt jedenfalls nur in eine Umdrehungsfläche übergehen. Es ist aber nicht wohl einzusehen, weshalb diese Umdrehungsfläche ihre Hohlseite eher nach der einen, als nach der entgegengesetzten Seite kehren sollte, oder mit anderen Worten, weshalb die Fläche nach vorn hohl sein sollte, wenn man den Stab in einem bestimmten Sinne verdreht. Unserem Symmetriegefühle nach müssen wir erwarten, dass die Umkehrung des Drehsinns keinen Einfluss auf die Gestalt der Fläche haben kann, in die der Querschnitt übergeht.

Freilich darf man sich auf Symmetriebetrachtungen dieser Art nicht zu sehr verlassen. Dass ein gradliniger elektrischer Strom eine parallele Magnetnadel in einem bestimmten Sinne dreht, verstösst zunächst auch gegen unser Symmetriegefühl und bleibt darum doch Thatsache. Jedenfalls ist aber eine Betrachtung solcher Art ausreichend, um eine Vermuthung darauf zu gründen; ich füge noch hinzu, dass sich diese Vermuthung sowohl durch weitere theoretische Betrachtungen, die ich in

einem späteren Abschnitte darlegen werde, als auch, wie es scheint, durch die Erfahrung selbst, bestätigt hat. Freilich ist die Zahl der Verdrehungsversuche, die man etwa als beweiskräftig hierfür heranziehen könnte, sehr gering. Uebrigens nahm man früher bei der Torsion ganz ebenso allgemein, wie bei der Biegung an, dass die Querschnitte auch bei beliebiger Gestalt nach der Formänderung eben blieben. Diese Annahme hat sich indessen als vollständig unrichtig herausgestellt. Querschnitte, die nicht kreisförmig sind, bleiben vielmehr sicher nicht eben bei der Verdrehung. Erfahrung und Theorie lehren dies übereinstimmend.

Bei der Verdrehung einer Welle von kreisförmigem Querschnitte geht jede zur Axe parallel gezogene Grade in ein Stück einer Schraubenlinie über. Zwei Halbmesser, die in zwei um die Länge l voneinander entfernten Querschnitten parallel zueinander gezogen waren, bilden nach der Verdrehung einen Winkel miteinander, den man den Verdrehungswinkel heisst. Bezeichnen wir ihn mit $\Delta\varphi$, so beträgt die Verdrehung von zwei in dem unendlich kleinen Abstand dx aufeinanderfolgenden Querschnitten

$$\Delta\varphi \frac{dx}{l}.$$

Die Schraubenlinie, von der vorher die Rede war, bildet jetzt irgend einen spitzen Winkel mit der Querschnittsebene, während die durch dieselben Theilchen gezogene Linie vor der Formänderung rechtwinklig zum Querschnitte stand. Einer solchen Winkeländerung entspricht eine Schubspannung τ im Querschnitt, die nach dem Elasticitätsgesetz daraus berechnet werden kann.

Wir finden die relative Verschiebung von zwei im Abstande r von der Axe in benachbarten Querschnitten ursprünglich einander gegenüberliegenden Punkten, wenn wir den Winkel, um den sich die Querschnitte gegeneinander drehen, mit dem Halbmesser r multipliciren, also gleich

$$r \Delta\varphi \frac{dx}{l}.$$

Um so viel ist der eine Endpunkt der Strecke dx, die die correspondirenden Punkte beider Querschnitte verbindet, gegen den anderen und zwar in der Richtung senkrecht zum Radius r verschoben worden. Der ursprünglich rechte Winkel zwischen dx und der Querschnittsfläche hat sich dabei um einen Betrag γ geändert und zwar so, dass γdx ebenfalls ein Ausdruck für die relative Verschiebung ist. Ein Vergleich beider Ausdrücke liefert

$$\gamma = \frac{r \Delta \varphi}{l}.$$

Nach dem Elasticitätsgesetz folgt aber die Schubspannung aus γ durch Multiplication mit dem Schubelasticitätsmodul, also

$$\tau = G\gamma = \frac{G r \Delta \varphi}{l}. \tag{227}$$

Dass τ senkrecht zum Radius gerichtet ist, folgt daraus, dass auch die elastische Verschiebung in diesem Sinne erfolgte.

Aus Gl. (227) erkennen wir, dass die Schubspannungen τ nach einem Gradliniengesetze über den Querschnitt vertheilt sind, nämlich proportional mit den Abständen r von der Mitte zunehmen. In der Mitte wird τ zu Null und die grösste Beanspruchung des Materials findet am Umfange statt. Bezeichnen wir die Spannung am Rande mit τ' und den Halbmesser des Querschnitts mit a, so ist nach Gl. (227)

$$\tau = \frac{\tau' r}{a} \tag{228}$$

und zur Berechnung von τ' steht uns eine Momentengleichung zur Verfügung. Alle Schubspannungen, die sich über den Querschnitt vertheilen, lassen sich zu einem Kräftepaare zusammensetzen, dessen statisches Moment gleich dem von den äusseren Kräften herrührenden Verdrehungsmomente sein muss. Bezeichnen wir das Torsionsmoment mit M, so ist

$$M = \int \tau dF r = \frac{\tau'}{a} \int r^2 dF = \frac{\tau'}{a} \Theta_p.$$

Hier ist mit Θ_p das polare Trägheitsmoment des kreisförmigen Querschnitts bezeichnet, also $\Theta_p = \frac{\pi a^4}{2}$. Durch Auflösen nach τ' erhält man

$$\tau' = \frac{M}{\Theta_p} \cdot a \tag{229}$$

oder auch nach Einsetzen des Werthes von Θ_p

$$\tau' = \frac{2M}{\pi a^3} \tag{230}$$

Man gibt häufig der Form (229) den Vorzug, weil sie sich genau an die Formel für die Biegung anschliesst. Früher freilich, als man noch glaubte, dass auch die Querschnitte von anderer Gestalt bei der Verdrehung eben blieben, bezog man die ganze Entwickelung, die hier nur für kreisförmige Querschnitte abgeleitet ist, sofort auch auf jene und Gl. (229) galt als die allgemeine Formel für die Berechnung der Torsionsspannungen. Da man jetzt weiss, dass Gl. (229) nur für den kreisförmigen Querschnitt gültig ist, hat es keinen Zweck, Θ_p in dieser allgemeinen Form stehen zu lassen, sondern man thut besser, sofort den Werth dafür einzusetzen, also Gl. (230) zu benutzen.

Für den Verdrehungswinkel $\Delta\varphi$ erhält man nach Gl. (227)

$$\Delta\varphi = \frac{\tau l}{G r} = \frac{\tau' l}{G a} = \frac{2 M l}{\pi a^4 G}. \tag{231}$$

Die einzige weitere Ausdehnung, die diese Formeln zulassen, ist die auf Wellen von kreisringförmigem Querschnitte. Wenn die beiden Querschnittshalbmesser der hohlen Welle mit a und b bezeichnet werden ($a > b$), erhält man

$$\tau' = \frac{2 M a}{\pi (a^4 - b^4)}; \quad \Delta\varphi = \frac{2 M l}{\pi (a^4 - b^4) G}.$$

§ 53. Wellen von elliptischem Querschnitte.

Dass der Querschnitt einer solchen Welle bei der Verdrehung nicht eben bleiben kann, erkennt man am einfachsten daraus, dass in diesem Falle die Entwickelungen des vorigen Paragraphen auch für sie gültig blieben und dass daher τ überall rechtwinklig zum Radiusvector stehen müsste, der nach der betreffenden Stelle von der Mitte aus gezogen ist. Am Umfang ist dies aber nicht möglich, indem dort nach den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, die wir im ersten Ab-

schnitte untersuchten und die zu den Gl. (4) führten, die Schubspannung keine Componente in der Richtung senkrecht zum Umfange haben kann. Die Schubspannung muss vielmehr überall am Umfange in die Richtung der Tangente fallen. Diesen Satz muss man bei allen Betrachtungen über die Torsionsfestigkeit in die vorderste Stelle rücken; eine Abweichung davon könnte nur dann eintreten, wenn die Welle am Umfange nicht frei, sondern durch irgend einen anderen Körper so gestützt wäre, dass Kräfte, also etwa Reibungen, am Umfange auf sie übertragen würden, die parallel zur Axe gerichtet wären. Selbstverständliche Voraussetzung bei Untersuchung der verdrehten Welle ist indessen, dass die Welle am Umfange frei sein soll. Wenn das Ende der Welle z. B. in der Einspannvorrichtung einer Festigkeitsmaschine steckt, trifft für dieses Ende die Voraussetzung allerdings nicht zu; wie sich die Spannungen an der Einspannstelle vertheilen, kann also aus unseren Betrachtungen nicht geschlossen werden. Auf solche Fälle sollen sie sich aber auch gar nicht beziehen.

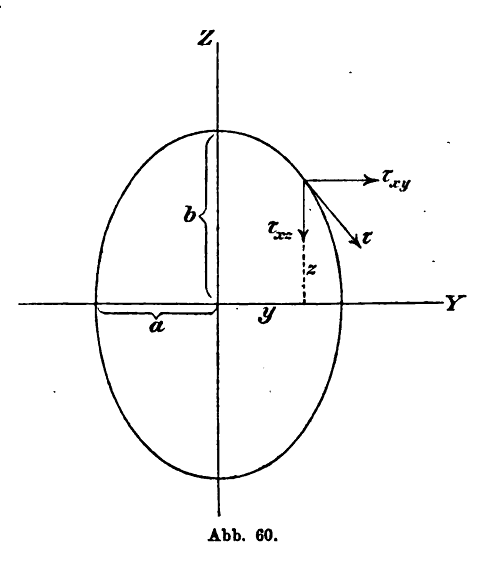


Abb. 60.

Die Gleichung der Ellipse, die den Querschnittsumriss bildet (Abb. 60), sei

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Für den Punkt mit den Coordinaten y und z hat man dann

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{y}{z}$$

und weil die Schubspannung τ den Umfang berührt, muss die Gleichung bestehen

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \frac{dz}{dy} = -\frac{b^2 y}{a^2 z}. \tag{232}$$

Diese Bedingung wird durch die Annahme erfüllt, dass die Schubspannungscomponenten in der Form

$$\tau_{xy} = ka^2 z; \quad \tau_{xz} = -kb^2 y \tag{233}$$

dargestellt werden können. An und für sich könnte der hierbei eingeführte Factor k an verschiedenen Stellen des Querschnitts und selbst an verschiedenen Stellen des Umfangs verschiedene Werthe annehmen, d. h. er ist zunächst selbst als eine unbekannte Function der Querschnittscoordinaten anzusehen. Unsere Absicht geht aber hier darauf hinaus, eine möglichst einfache Theorie des ganzen Vorgangs abzuleiten, selbst auf die Gefahr hin, dass sie nicht völlig genau mit den Thatsachen übereinstimmen sollte. Der Vergleich mit der Erfahrung bleibt uns immer offen und er würde uns bald belehren, wenn wir uns erheblich geirrt haben sollten. In der That ist ja auch die ältere Theorie der Verdrehungsfestigkeit, die von der Annahme ausging, die Querschnitte blieben eben, bald widerlegt worden und nur wegen des Widerspruchs, in dem ihre Folgerungen mit den Beobachtungsthatsachen standen, liess man sie fallen; der Widerspruch mit der Saint-Vénant'schen Theorie allein würde keinen Techniker gestört haben. Der Widerspruch mit der Erfahrung aber bewies, dass jene ältere Betrachtung eine Bedingung ausser Acht liess, deren Vernachlässigung zu den gröbsten Irrthümern führte. Durch die Gl. (233) haben wir diese Bedingung weiterhin als verbindlich für unsere Betrachtungen anerkannt. Nachdem dieser unerlässliche Schritt geschehen ist, wollen wir uns aber im Uebrigen möglichst eng an die einfachen Betrachtungen der älteren Theorie anlehnen, indem wir uns der Hoffnung hingeben, die Beobachtungsthatsachen hinreichend genau wiedergeben zu können, nachdem wenigstens der gröbste Fehler der älteren Betrachtung gehoben ist.

In diesen Sätzen habe ich wenigstens die Auffassung geschildert, mit der man — meiner eigenen Meinung nach — an diese Untersuchungen herantreten sollte. Es ist ganz unerheblich, wenn ich noch hinzufüge, dass die Theorie, zu der man so gelangt, bei der Welle mit elliptischem Querschnitte mit der von de St. Vénant aus den Grundgleichungen der mathematischen Elasticitätslehre abgeleiteten in den Resultaten völlig übereinstimmt.

Ich nehme also jetzt willkürlich an, dass es genüge, den Factor k in den Gl. (233) als eine Constante zu betrachten. Dann wächst die Schubspannung τ, wenn wir von der Mitte aus längs eines Halbmessers nach dem Umfange hin weiter gehen, immer noch in demselben Verhältnisse wie der Abstand von der Mitte und sie behält in allen Punkten des Halbmessers dieselbe Richtung. Für Punkte, die auf verschiedenen Halbmessern in gleichem Abstande von der Mitte liegen, ist τ jetzt allerdings verschieden gross und auch der Winkel, den die Richtung von τ mit der Richtung des Halbmessers bildet, wechselt mit dem Halbmesser. Darin liegt die einzige Abweichung von den Annahmen der älteren Theorie, zu der wir uns nothgedrungen entschliessen mussten.

Es bleibt uns jetzt nur noch übrig, die Constante k in den Gl. (233) zu berechnen. Natürlich hängt deren Grösse von dem Werthe des Verdrehungsmomentes M ab und zu ihrer Ermittelung wird uns daher eine Momentengleichung verhelfen. Für den Mittelpunkt als Momentenpunkt ist das statische Moment der in einem Flächenelemente dF übertragenen Spannung τdF gleich

$$\tau_{xy} dF \cdot z - \tau_{xz} dF \cdot y,$$

und nach Einsetzen der Werthe aus den Gl. (233) erhält man daher die Momentenbedingung

$$M = ka^2 \int z^2 dF + kb^2 \int y^2 dF. \qquad (234)$$

Die Integrale sind über den ganzen Querschnitt auszudehnen und stellen die Trägheitsmomente für die Coordinaten-

axen dar. Man kennt die Trägheitsmomente für die Ellipse (vgl. § 17, S. 117), nämlich

$$\int y^2 dF = \pi \frac{ba^3}{4}; \quad \int z^2 dF = \pi \frac{ab^3}{4}.$$

Setzt man diese Werthe in Gl. (234) ein und löst diese dann nach k auf, so erhält man

$$k = \frac{2M}{\pi a^3 b^3}. \tag{235}$$

Hiermit sind wir in den Stand gesetzt, die Spannung τ an jeder Stelle nach Grösse und Richtung anzugeben. Es fragt sich jetzt noch, wo τ seinen grössten Werth annimmt. Jedenfalls muss dies irgendwo am Umfange geschehen, denn τ wächst, je weiter wir auf einem gegebenen Halbmesser von der Mitte abrücken. Am nächsten liegt wohl die Vermuthung, dass τ am Ende der grossen Axe den grössten Werth erreiche und nach der älteren Theorie nahm man dies früher in der That allgemein an. Die Vermuthung ist aber irrig. Um uns davon zu überzeugen, setzen wir nach dem Pythagoräischen Satze und nach den Gl. (233)

$$\tau^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = k^2(a^4 z^2 + b^4 y^2).$$

Da nur die Spannungen am Umfange in Frage kommen, können wlr z nach der Ellipsengleichung in y ausdrücken und erhalten

$$\tau^2 = k^2 b^2 (a^4 + y^2 [b^2 - a^2]).$$

Wenn b grösser als a ist, wie in Abb. 69 angenommen wurde, müssen wir y möglichst gross annehmen, um den grössten Werth von τ^2 zu erhalten. Der grösste Werth von y ist aber a, d. h. die grösste Spannung tritt am Ende der kleinen Axe auf. Wir erhalten

$$\tau_{\max} = kab^2$$

oder nach Einsetzen von k aus Gl. (235)

$$\tau_{\max} = \frac{2M}{\pi a^2 b}. \tag{236}$$

Am Ende der grossen Halbaxe, also für $y = 0$, wird

$$\tau = ka^2 b = \frac{2M}{\pi a b^2},$$

also im Verhältnisse $a:b$ kleiner.

§ 54. Wellen von rechteckigem Querschnitte.

Auch für diesen Querschnitt soll eine Näherungstheorie nach denselben Grundsätzen wie im vorigen Paragraphen entwickelt werden; ich bemerke aber sofort, dass die Formel, auf die man hierbei geführt wird, in der That nur eine Näherungsformel bleibt und nicht nachträglich durch die genauere Untersuchung nach den Methoden der mathematischen Elasticitätstheorie bestätigt wird.

Zunächst müssen wir hier unser Augenmerk auf die Symmetrieeigenschaften lenken, die dem rechteckigen Querschnitte zukommen. Wenn die Pfeile der Schubspannungscomponenten τ_{xy} und τ_{xz} für ein im ersten Quadranten liegendes Flächenelement die in Abb. 61 angenommene Richtung haben, müssen die Pfeile in den drei anderen Quadranten die ebenfalls dort eingetragenen Richtungen annehmen, da die Verdrehung in allen Quadranten überall in derselben Drehrichtung vor sich geht, die Spannungen also überall ein Moment von demselben Vorzeichen in Bezug auf den Coordinatenursprung annehmen müssen. Ausserdem folgt, dass bei spiegelbildlich

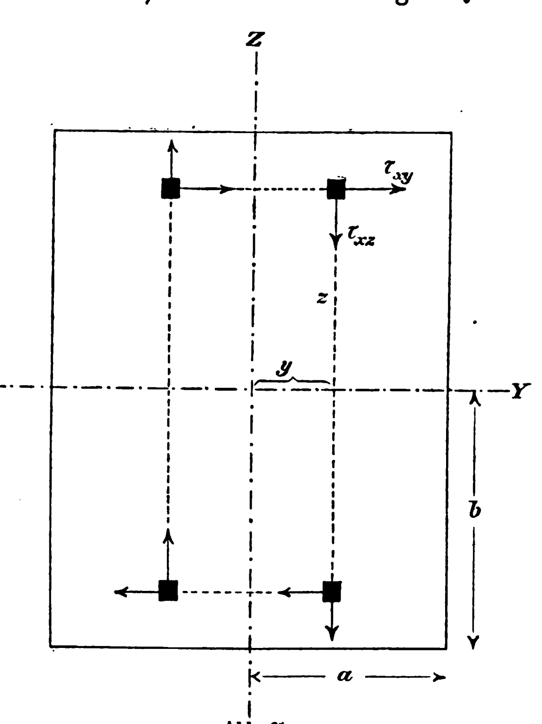


Abb. 61.

zueinander liegenden Flächentheilen die Absolutbeträge der in derselben Axenrichtung gehenden Componenten einander gleich sind. Wir können dies dahin ausdrücken, dass τ_{xy} eine gerade Function von y und eine ungerade Function von z ist, während umgekehrt τ_{xz} eine ungerade Function von y und eine gerade von z sein muss.

Ein lineares Gesetz für die Vertheilung der Spannungscomponenten über den Querschnitt ist hier nicht möglich, da z. B. τ_{xy} sowohl für $x = a$ als im Coordinatenursprung verschwinden muss. Wir wollen aber, indem wir diesen Grenzbedingungen am Umfange vollständig Rechnung tragen, das damit noch verträgliche, sonst aber möglichst einfach gestaltete Spannungsvertheilungsgesetz zu Grunde legen. Vor allem wollen wir also annehmen, dass die Spannungscomponenten hinreichend genau durch algebraische Functionen der Querschnittscoordinaten y und z dargestellt werden können und wir wollen ferner den Grad dieser Functionen so niedrig annehmen, als es möglich ist, ohne die Grenzbedingungen zu verletzen. Dazu reicht eine Function dritten Grades aus. Mit Rücksicht darauf, dass τ_{xy} grad in Beziehung auf y und ungrad in Beziehung auf z sein soll, setzen wir daher zunächst

$$\tau_{xy} = c_1 z + c_2 z y^2 + c_3 z^3.$$

Nun muss an den zur Z-Axe parallelen Querschnittsseiten, also für $y = \pm a$ dieser Ausdruck identisch, d. h. für jedes z, verschwinden. Dies liefert die Bedingungsgleichung

$$0 = c_1 z + c_2 a^2 z + c_3 z^3,$$

aus der, weil sie identisch erfüllt sein muss,

$$c_3 = 0; \quad c_2 = -\frac{c_1}{a^2}$$

folgt. Damit ist τ_{xy} bis auf eine Constante bestimmt, nämlich

$$\tau_{xy} = c_1 z - \frac{c_1}{a^2} z y^2. \tag{237}$$

Aehnlich verfahren wir mit τ_{xz}; wir setzen zunächst

$$\tau_{xz} = k_1 y + k_2 y z^2 + k_3 y^3.$$

Für $z = \pm b$ muss dies verschwinden, also

$$0 = k_1 y + k_2 y b^2 + k_3 y^3$$

und hieraus

$$k_3 = 0; \quad k_2 = -\frac{k_1}{b^2}.$$

Setzt man dies ein, so erhalten wir den mit den aufgestellten Bedingungen verträglichen, möglichst einfachen Ausdruck für τ_{xz},

$$\tau_{xz} = k_1 y - \frac{k_1}{b^2} y z^2. \tag{238}$$

Zwischen den Constanten c_1 und k_1 in (237) und (238) muss aber ausserdem noch eine Bedingungsgleichung erfüllt sein um das Gleichgewicht zwischen den Spannungen an irgend einem Volumenelemente zu sichern. Die erste der Gleichungen (5), durch die die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen der Statik ausgedrückt wurden, lautete

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0.$$

Hier ist sowohl X als σ_x gleich Null zu setzen, denn zum Auftreten einer Normalspannung im Querschnitte der Welle ist kein Anlass gegeben, wenn neben der Torsion der Welle nicht eine Biegung oder eine axiale Belastung nebenher läuft. Von einer solchen zusammengesetzten Beanspruchung der Welle sollte aber hier nicht die Rede sein. Beachtet man noch, dass $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ und $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ zu setzen ist, so vereinfacht sich jene Gleichgewichtsbedingung hier zu

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = -\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}.$$

Nach Eintragen der Werthe aus den Gl. (237) und (238) geht sie über in

$$-2yz\frac{c_1}{a^2} = 2yz\frac{k_1}{b^2}.$$

Sie wird also in der That identisch erfüllt, falls man

$$k_1 = -\frac{c_1 b^2}{a^2} \tag{239}$$

setzt und dies zeigt uns zugleich, dass das in dieser Weise näher bestimmte System der Spannungen vom Gesichtspunkte

der Statik starrer Körper aus möglich ist. Eine andere Frage wäre es natürlich, ob dieses Spannungssystem zugleich mit den elastischen Eigenschaften eines bestimmten Materials, z. B. mit dem Hooke'schen Gesetze in Uebereinstimmung stehe. Auf eine solche Untersuchung haben wir aber hier, in der Absicht, zu einem möglichst einfachen, wenn auch nur näherungsweise richtigen Resultate zu gelangen, von vornherein verzichtet. Mit Rücksicht auf Gl. (239) geht jetzt Gl. (238) über in

$$\tau_{xz} = -\frac{c_1 b^2}{a^2} y + \frac{c_1}{a^2} y z^2. \tag{240}$$

Es bleibt jetzt nur noch die Bestimmung der einzigen, bisher unbekannt gebliebenen Constanten c_1 übrig und man sieht leicht ein, dass diese aus der Momentengleichung, ganz wie früher bei dem elliptischen Querschnitte, berechnet werden kann. Die Momentengleichung lautet

$$M = \int dF(\tau_{xy} \cdot z - \tau_{xz} \cdot y)$$

oder nach Einsetzen der Werthe aus (237) und (240)

$$M = c_1 \int \left(z^2 - 2\frac{z^2 y^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} y^2\right) dF.$$

Die rechte Seite zerfällt in drei Glieder, von denen das erste und das letzte ohne weiteres angegeben werden können, da die Trägheitsmomente des Rechtecks darin auftreten. Das zweite Glied führt auf ein Moment vierten Grades des Querschnitts und muss besonders berechnet werden. Wir dehnen die Integration zunächst auf den im ersten Quadranten liegenden Theil des Querschnitts aus und finden dafür

$$\int y^2 z^2 dF = \int_0^b dz \cdot z^2 \int_0^a y^2 dy = \frac{a^3 b^3}{9}.$$

Für den ganzen Querschnitt liefert das Integral den vierfachen Werth. — Die Momentengleichung geht hiermit über in

$$M = c_1 \left(\frac{4ab^3}{3} - \frac{8ab^3}{9} + \frac{4ab^3}{3}\right) = c_1 \cdot \frac{16ab^3}{9}.$$

Daraus folgt für die Constante c_1

$$c_1 = \frac{9M}{16ab^3}. \tag{241}$$

Die Spannungscomponenten sind hiermit vollständig bestimmt; wir schreiben dafür

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{9M}{16ab^3}\, z\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \\ \tau_{xz} &= -\frac{9M}{16a^3b}\, y\left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right) \end{aligned}\right\} \tag{242}$$

Längs der beiden Symmetrieaxen stehen demnach die Spannungen τ rechtwinklig zu dem vom Ursprunge gezogenen Radiusvector und sie wachsen proportional mit diesem. Am Umfange sind die Spannungen parallel mit den Umfangsseiten gerichtet und die Spannungsvertheilung ist eine parabolische; in den Ecken werden die Spannungen zu Null und sie wachsen von da nach den Mitten der Umfangsseiten hin, wo sie ein Maximum erreichen. Längs einer Diagonale sind die Spannungen überall parallel zur anderen Diagonale gerichtet und das Spannungsvertheilungsdiagramm ist eine cubische Parabel. Für einen anderen Radiusvector, der vom Ursprunge aus gezogen wird, ändert die Spannung τ fortwährend ihre Richtung, wenn man weiter nach aussen hin geht.

Es fragt sich jetzt noch, an welcher Stelle τ den absolut grössten Werth annimmt. Nach dem Pythagoräischen Satze erhält man aus den Gleichungen (242)

$$\tau^2 = \left[\frac{9M}{16a^3b^3}\right]^2 \cdot \left\{z^2(a^2 - y^2)^2 + y^2(b^2 - z^2)^2\right\}. \tag{242a}$$

Für ein analytisches Maximum müssen die partiellen Differentialquotienten von τ^2 nach y und z, oder anstatt dessen auch nach y^2 und z^2 gleich Null sein; also

$$0 = (a^2 - y^2)^2 - 2y^2(b^2 - z^2);\quad 0 = -2z^2(a^2 - y^2) + (b^2 - z^2)^2. \tag{243}$$

Die Auflösung dieser Gleichungen nach y und z liefert die Punkte, für die τ^2 zu einem Maximum oder Minimum wird. Zu ihnen gehören zunächst die vier Eckpunkte des Rechtecks; die Abscissen der übrigen werden durch Auflösung der Gleichung

$$\frac{(a^2 - y^2)^3}{8y^4} = b^2 - \frac{(a^2 - y^2)^2}{2y^2}$$

erhalten. Die Gleichung ist vom dritten Grade in Bezug auf y^2. Wir lösen sie nur für den besonderen Fall auf, dass $a = b$, dass also der Querschnitt der Welle ein Quadrat ist. Sie geht dann nach Auflösen der Klammern über in

$$3y^6 - 13a^2y^4 + a^4y^2 + a^6 = 0.$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist, wie man sich leicht überzeugt,

$$y_1^2 = \frac{a^2}{3}.$$

Hiernach findet man auch leicht die beiden anderen Wurzeln, nämlich

$$y_2^2 = a^2(2 + \sqrt{5}); \quad y_3^2 = a^2(2 - \sqrt{5}).$$

Die letzte Wurzel führt zu imaginären Werthen von y, kommt also nicht weiter in Betracht. Aber auch die zweite führt nicht zu reellen Punkten, denn wenn man $y = y_2$ setzt und aus der ersten der Gl. (243) das zugehörige z_2^2 berechnet, erhält man

$$z_2^2 = a^2(2 - \sqrt{5})$$

also imaginäre Werthe für z. Es bleiben daher nur die Punkte mit den Coordinaten

$$y = \pm a\sqrt{\frac{1}{3}}, \qquad z = \pm a\sqrt{\frac{1}{3}}$$

übrig. Setzt man diese Werthe in die Gleichung für τ^2 ein so erhält man

$$\tau^2_{max} = \frac{3}{32}\frac{M^2}{a^6}$$

oder

$$\tau_{max} = 0{,}306\,\frac{M}{a^3}.$$

Mit der Ermittelung des analytischen Maximums ist aber die Frage noch nicht beantwortet, wo der absolut grösste Werth von τ auftritt; dieser kann auch, ohne ein analytisches Maximum zu sein, am Umfange vorkommen. Nach dem, was wir über

die Spannungsvertheilung längs des Umfanges gefunden haben, brauchen wir nur noch in den Mitten der Rechteckseiten nach dem grössten Werthe von τ zu suchen. Mit $y = a$ und $z = 0$ wird

$$\tau = \frac{9M}{16a^2b}. \tag{244}$$

Setzen wir auch jetzt wieder $b = a$, so liefert dies

$$\tau = 0{,}5625 \frac{M}{a^3}$$

also in der That erheblich mehr als an der Stelle des analytischen Maximums, das auf der Diagonale vorkommt. Diese Erfahrung berechtigt uns, zunächst wenigstens für Wellen, deren Querschnitt nicht zu sehr von einem Quadrate abweicht, nur auf die grösste am Umfange auftretende Spannung zu achten. Aber auch für andere Verhältnisse der Rechteckseiten zu einander würde eine nach dem Muster der vorausgehenden durchgeführte Betrachtung voraussichtlich zu dem gleichen Ergebnisse führen. Den Werth von τ in der Mitte der anderen Rechteckseite erhalten wir aus Gl. (244), wenn wir darin a mit b vertauschen. Wir erkennen daraus, dass τ am grössten in der Mitte der grösseren Rechteckseite, also am grössten an jener Stelle des Umfangs wird, die dem Mittelpunkt des Rechtecks am nächsten liegt. Bei der Anwendung von Gl. (244) zur Berechnung der Festigkeit einer Welle ist daher unter a die kleinere Rechteckhalbseite zu verstehen.

Gewöhnlich wird die Formel (244) in der Art ausgesprochen, dass die ganzen Rechteckseiten a_1 und b_1 an Stelle der Halbseiten a und b darin vorkommen. Mit $a_1 = 2a$ und $b_1 = 2b$ geht sie über in

$$\tau = \frac{9M}{2a_1{}^2b_1}. \tag{245}$$

Es mag noch bemerkt werden, dass nach der älteren Theorie, die von der Voraussetzung ausging, die Querschnitte blieben bei der Torsion eben, eine ganz andere Spannungsvertheilung gefunden wurde, als hier. Danach wäre die Spannung τ am

grössten in den Ecken, wo sie aber in Wirklichkeit sicher gleich Null ist. Ausserdem nahm man nach Gl. (229) an, dass es, um eine grosse Festigkeit gegen Verdrehen herbeizuführen, vor allem darauf ankomme, einen Querschnitt von grossem polaren Trägheitsmomente Θ_p zu wählen. Bei rechteckigem Querschnitt schien es daher nützlicher, die grössere Rechteckseite noch weiter zu vergrössern als die kleinere oder mit anderen Worten, man glaubte, dass die Verdrehungsfestigkeit bei gegebenem Inhalte des Querschnitts um so grösser sei, je mehr sich der Querschnitt von einem Quadrate unterscheide. Wenn man daran gedacht hätte, wie gering der Widerstand ist, den eine gewöhnliche Reissschiene dem Verdrehen entgegensetzt, hätte man freilich sofort darauf aufmerksam werden müssen, dass man sich auf einem falschen Wege befand. Es ist unglaublich, wie schwer es ist, Irrthümer, die sich einmal fest eingewurzelt haben, wieder zu beseitigen, denn in der That spukt die ältere Theorie der Torsion selbst heute noch gelegentlich herum.

§ 55. **Berechnung der Torsionsfedern.**

Die Mittellinie eines Drahtes besitze im spannungslosen Zustande eine schraubenförmige Gestalt (Abb. 62). Durch zwei Kräfte P, deren Richtungslinien mit der Cylinderaxe zusammenfallen, soll die Feder — wie wir den Draht nennen wollen — entweder auseinandergezogen oder zusammengedrückt werden. Dabei stellen sich verschiedene Fragen ein: zunächst will man wissen, wie gross die Belastung P der Feder werden darf, ohne dass die zulässige Beanspruchung des Materials überschritten wird, ferner um wie viel sich die Feder unter der Belastung streckt oder zusammendrückt und im Zusammenhang damit endlich, wie viel Formänderungsarbeit in ihr aufgespeichert werden kann.

P

P

Abb. 62.

Man denke sich die Feder an irgend einer Stelle durchschnitten. Die in diesem Querschnitte übertragenen Span-

nungen müssen dann im Gleichgewicht mit der an dem zugehörigen Federende angreifenden Kraft P stehen. Bei der Verlegung der Kraft P nach dem Schwerpunkte des Querschnitts tritt ein Kräftepaar auf, dessen Ebene durch den nach diesem Schwerpunkte gezogenen Radius und die Cylinderaxe bestimmt ist. Gewöhnlich ist die Steigung der Schraubenlinie nur gering und in diesem Falle, den wir der weiteren Untersuchung zu Grunde legen wollen, steht die Ebene des Kräftepaars nahezu senkrecht zur Schraubenlinie oder der Momentenvector des Kräftepaars fällt nahezu mit dieser Linie zusammen. Ein solches Kräftepaar bewirkt eine Beanspruchung auf Verdrehung. Denkt man sich das Kräftepaar in zwei andere zerlegt, von denen die Ebene des einen genau senkrecht steht zur Schraubenlinie, während die des zweiten durch diese Linie hindurchgeht, so wird durch diese zweite Componente ausserdem noch eine Beanspruchung auf Biegung hervorgerufen. Gewöhnlich ist aber diese Biegungsbeanspruchung unerheblich gegenüber der Beanspruchung auf Verdrehen und ich sehe daher davon ab, sie hier zu berechnen, obschon dies leicht auszuführen wäre. Auch die nach dem Schwerpunkte des Querschnitts verlegte Kraft P bringt für sich genommen, Spannungen hervor und zwar vorwiegend Schubspannungen. Auch diese sind aber, wenn der Halbmesser des Cylinders, auf dem die Schraubenlinie liegt, einigermassen gross ist gegen die Querschnittsabmessungen des Drahtes, gering gegenüber den Spannungen, die dem Verdrehungsmomente entsprechen. Es genügt daher für die Zwecke, die man mit einer Festigkeitsberechnung verfolgt, vollständig, wenn man nur auf die Hauptbeanspruchung auf Verdrehen achtet.

Bezeichnet man den Cylinderhalbmesser mit r, so kann das Verdrehungsmoment M

$$M = Pr$$

gesetzt werden. Wenn der Querschnitt der Feder ein Kreis vom Halbmesser a ist, folgt für τ nach Gl. (230)

$$\tau = \frac{2Pr}{\pi a^3} \tag{246}$$

und daraus ergibt sich die Tragkraft der Feder. Ausser dem kreisförmigen kommt gewöhnlich nur noch der rechteckige Querschnitt in Betracht, für den man nach Gl. (245)

$$\tau = \frac{9 P r}{2 a_1^2 b_1} \tag{247}$$

erhält, worin a_1 die kleinere und b_1 die grössere Rechteckseite bedeuten.

Oft genug ist die Mittellinie der Feder nicht nach einer gewöhnlichen, sondern nach einer Kegelschraubenlinie gekrümmt, z. B. bei den allgemein bekannten Pufferfedern der Eisenbahnwagen. In diesem Falle ist unter r die Entfernung jenes Querschnitts von der Axe zu verstehen, auf den sich a_1 und b_1 beziehen, oder wenn etwa a_1 und b_1 constant wären, der grösste Werth von r. Sind a_1 und b_1 veränderlich, so muss man τ für verschiedene Querschnitte berechnen und die ungünstigste Stelle aufsuchen. Man kann auch die Aufgabe umkehren und den Querschnitt so verändern, dass die Beanspruchung überall die gleiche bleibt. Dazu müsste also z. B., wenn die Dicke a_1 constant gewählt wird, die Höhe b_1 des rechteckigen Querschnitts der Pufferfeder mit der Entfernung r proportional zunehmen. Diese Andeutungen mögen genügen.

Um die Streckung oder Zusammendrückung zu berechnen, die die Feder unter der Belastung erfährt, müssen wir uns auf die Formel für den Verdrehungswinkel stützen. Diese ist bisher nur für den kreisförmigen Querschnitt abgeleitet worden und ich werde mich daher auch an dieser Stelle auf die Behandlung dieses Falles beschränken. Indessen mache ich darauf aufmerksam, dass bei den nachfolgenden Aufgaben die Berechnung des Verdrehungswinkels für den elliptischen und für den rechteckigen Querschnitt ausgeführt ist und dass man diese Ergebnisse ohne Weiteres auf die hier durchzuführende Untersuchung übertragen kann.

Für ein Längenelement ds der Feder (gemessen längs der Schraubenlinie) sei der Verdrehungswinkel $d\Delta\varphi$. Wir wollen uns zunächst vorstellen, dass nur das eine Element ds die Verdrehung $d\Delta\varphi$ erfahre, während alle übrigen Theile der

Feder ihre Gestalt ungeändert beibehalten sollen. Denken wir uns dann etwa den unteren Theil der Feder festgehalten, so wird der jenseits ds liegende obere Theil eine Drehung um ds und um den Winkel $d\Delta\varphi$ ausführen. Die Axe des oberen Theils wird dadurch aus ihrer Richtung abgelenkt und der ganze obere Theil steht nun etwas schief. Darauf brauchen wir aber nicht weiter zu achten, denn wenn ein dem ds diametral gegenüber liegendes Element der Feder später ebenfalls die Verdrehung $d\Delta\varphi$ erfährt, stellt sich der obere Theil wieder grade. Die Axe bleibt daher bei der ganzen Formänderung der Feder ohne Ablenkung. Dagegen summiren sich die Verschiebungen in der Richtung der Axe, die bei den Verdrehungen der einzelnen Elemente ds vorkommen, einfach zu einander und die Summe dieser Verschiebungen ergibt die ganze Streckung, die wir an der belasteten Feder beobachten.

Der mit ds in gleicher Höhe liegende Punkt der Axe des oberen Federtheiles beschreibt bei der Verdrehung einen Kreisbogen vom Halbmesser r und dem Centriwinkel $d\Delta\varphi$ in einer Richtung, die nahezu mit der Axenrichtung zusammenfällt. Wir können daher die Verschiebung in der Richtung der Axe gleich

$$r d\Delta\varphi$$

setzen. Um ebensoviel verschiebt sich auch jeder andere Punkt der Axe des oberen Federtheiles in der Richtung der Axe, wie aus Abb. 63 sofort hervorgeht. Darin bedeutet nämlich AA die Axe und in P soll sich das Element ds projiciren, das die Verdrehung $d\Delta\varphi$ ausführte. Da die Steigung der Schraubenlinie gering, ds also nahezu senkrecht zur Axe sein sollte, projicirt sich ds in Abb. 62 nahezu als Punkt und so ist es daher auch gezeichnet. Ein Punkt B der Axe führt eine Drehung um P aus und der dabei beschriebene Bogen ist gleich $z d\Delta\varphi$. Die Projection des Bogens

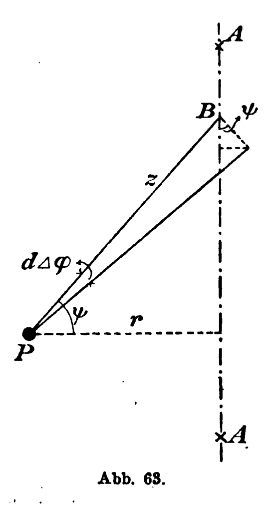


Abb. 63.

auf die Drehaxe wird daraus durch Multiplikation mit $\cos\psi$, also gleich $z \cdot d\Delta\varphi \cdot \cos\psi$ gefunden. Mit Rücksicht auf $z\cos\psi = r$ geht dies aber in $r \cdot d\Delta\varphi$ über, woraus man sieht, dass sich in der That alle Punkte der Axe um gleich viel in der Axenrichtung verschieben.

Die ganze Streckung oder Zusammendrückung w der Feder ist gleich der über die ganze Länge der Schraubenlinie ausgedehnten Summe dieser Glieder, also

$$w = \int r d\Delta\varphi.$$

Für $d\Delta\varphi$ schreiben wir nach Gl. (231)

$$d\Delta\varphi = \frac{2Prds}{\pi a^4 G}$$

und daher

$$w = \frac{2Pr^2}{\pi a^4 G}\int ds = P \cdot \frac{4nr^3}{a^4 G}. \tag{248}$$

Unter n ist hier die Zahl der Umläufe zu verstehen, die die Schraubenlinie macht und die Länge eines Umlaufs konnte genau genug gleich dem Umfange eines Kreises vom Radius r genommen werden.

Beachtet man, dass beim Belasten der Feder die Last proportional mit w wächst, so erhält man für die aufgespeicherte Formänderungsarbeit A das halbe Product aus der Last und dem zurückgelegten Wege w, also

$$A = P^2 \frac{2nr^3}{a^4 G}. \tag{249}$$

Aufgaben.

42. Aufgabe. Man soll den Verdrehungswinkel $\Delta\varphi$ für eine Welle von elliptischem Querschnitte berechnen.

Lösung. Das Verdrehungsmoment sei M; dann ist die von den äusseren Kräften zur Verwindung der Welle geleistete Arbeit gleich $\frac{1}{2} M\Delta\varphi$ und ebenso gross muss die Summe der in den einzelnen Volumenelementen aufgespeicherten Arbeiten sein, die nach Gl. (44) berechnet werden können. Man erhält also

$$\frac{1}{2} M\Delta\varphi = \int \frac{\tau^2}{2G} dv$$

wenn mit dv ein Volumenelement der Welle bezeichnet wird, das auch gleich $dF \cdot dl$, wo dl ein Element der Länge l der Welle ist, gesetzt werden kann. Die Integration nach l kann sofort ausgeführt werden, da τ für alle Querschnitte an der entsprechenden Stelle gleich gross ist. Für τ^2 setzen wir $\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2$ und für diese beiden Glieder führen wir ihre in § 53, Gl. 233 berechneten Werthe ein. So erhalten wir

$$M\Delta\varphi = \frac{l}{G}\int k^2(a^4z^2 + b^4y^2)\,dF$$

oder mit Benutzung von k aus Gl. (235)

$$M\Delta\varphi = \frac{l}{G}\cdot\frac{4M^2}{\pi^2a^6b^6}\left\{a^4\int z^2dF + b^4\int y^2dF\right\}.$$

Die Integrale in der Klammer sind die Trägheitsmomente der Ellipse. Setzt man diese ein, so wird

$$\Delta\varphi = \frac{l}{G}\cdot\frac{4M}{\pi^2a^6b^6}\left\{\frac{\pi a^5b^3}{4} + \frac{\pi a^3b^5}{4}\right\}$$

oder nach entsprechender Vereinfachung

$$\Delta\varphi = \frac{lM(a^2+b^2)}{\pi a^3b^3G}.$$

Mit $b = a$ liefert dies wieder den schon aus Gl. (231) bekannten Werth des Verdrehungswinkels für die kreisförmige Welle.

Anmerkung. Ebenso kann auch der Verdrehungswinkel für die Welle mit rechteckigem Querschnitte berechnet werden. Führt man τ^2 aus Gl. (242a) ein, so wird

$$M\Delta\varphi = \frac{l}{G}\left[\frac{9M}{16a^3b^3}\right]^2\cdot\int\{z^2(a^2-y^2)^2 + y^2(b^2-z^2)^2\}\,dF.$$

Die Ausführung der Integrationen liefert

$$\int z^2(a^2-y^2)^2dF = \frac{32}{45}a^5b^3; \qquad \int y^2(b^2-z^2)^2dF = \frac{32}{45}a^3b^5$$

und hiermit

$$\Delta\varphi = \frac{9}{40}\,\frac{l}{G}\,\frac{M(a^2+b^2)}{a^3b^3}.$$

Will man mit den ganzen Seiten a_1 und b_1 an Stelle der Halbseiten a und b rechnen, so geht dies über in

$$\Delta\varphi = 3{,}6\,\frac{l}{G}\,\frac{M(a_1{}^2+b_1{}^2)}{a_1{}^3b_1{}^3}.$$

Natürlich ist aber auch diese Formel nur als eine Näherungsformel zu betrachten, der keine strenge Gültigkeit zukommt, wie allen Untersuchungen von § 54, auf die sie sich stützt.

43. Aufgabe. Ein Holzbalken mit quadratischem Querschnitt von 20 cm Seite ist am einen Ende in eine Mauer eingelassen und ragt um 100 cm vor. Am freien Ende ist ein horizontaler Arm angeschraubt, der rechtwinklig zum Balken, also parallel zur Mauerfläche, um 60 cm vorsteht. Am freien Ende dieses Armes ist eine Last von 1000 kg aufgehängt. Wie gross ist die Anstrengung des Holzes?

Lösung. Der Holzbalken wird gleichzeitig auf Biegung und auf Verwindung beansprucht. Das Verdrehungsmoment ist für alle Querschnitte des Balkens gleich gross, nämlich gleich $1000 \times 60 = 60\,000$ cmkg. Das Biegungsmoment ist dagegen am grössten am Einspannquerschnitte, wo es sich auf 100 000 cmkg stellt. Dort tritt daher auch die grösste Anstrengung des Materials ein. Wir berechnen zunächst die Biegungsspannungen für sich; dafür erhalten wir

$$\sigma = \frac{6M}{bh^2} = \frac{6 \cdot 100\,000}{20^3} = 75 \text{ atm.}$$

Für die durch das Verdrehungsmoment hervorgerufene grösste Schubspannung finden wir nach Gl. (245)

$$\tau = \frac{9M}{2a_1^2b_1} = \frac{9 \cdot 60\,000}{2 \cdot 20^3} = 33{,}75 \text{ atm.}$$

Das grösste σ und das grösste τ treten an derselben Stelle auf, nämlich in den Mitten der horizontalen Seiten des Einspannquerschnitts. — Ausser den jetzt berechneten Spannungen kommen auch noch Schubspannungen vor, die sich wegen der Biegung über den Querschnitt vertheilen und deren Resultirende $= P = 1000$ kg ist. Wir sahen aber früher, dass die Schubspannungen im gebogenen Balken am grössten in der Nulllinie werden und nach den stärker beanspruchten Querschnittstheilen hin abnehmen. Dort, wo die grösste Biegungs- mit der grössten Torsionsspannung zusammenfällt, wird die Beanspruchung auf gewöhnliche Scheerfestigkeit zu Null und wir brauchen daher in der That nur auf die soeben berechneten Werthe von σ und τ zu achten.

Die Beanspruchung des Materials wird durch die reducirte Spannung an der gefährlichsten Stelle gemessen. Nach Gl. (39) finden wir dafür mit $m = \frac{10}{3}$

$$\sigma_{red} = 0{,}35\,\sigma + 0{,}65\sqrt{4\tau^2 + \sigma^2}$$

also nach Einsetzen der Zahlenwerthe

$$\sigma_{red} = 0{,}35 \cdot 75 + 0{,}65\sqrt{67{,}5^2 + 75^2} = \text{rund } 92 \text{ atm.}$$

44. Aufgabe. Eine Torsionsfeder ist aus 20 mm starkem Rundstahl gefertigt und hat 10 Windungen von 100 mm Radius. Wie gross ist die Tragkraft und die aufgespeicherte Energie, wenn τ gleich 2000 atm gewählt wird?

Lösung. Aus Gl. (246) folgt

$$P = \frac{\pi a^3 \tau}{2r} = \frac{3{,}14 \cdot 1^3 \cdot 2000}{2 \cdot 10} = 314 \text{ kg}.$$

Für die aufgespeicherte Arbeit liefert Gl. (249), wenn man darin P aus Gl. (246) entnimmt und $G = 900\,000$ atm setzt,

$$A = P^2 \frac{2 n r^3}{a^4 G} = \frac{\pi^2 a^2 r n \tau^2}{2G} = 4450 \text{ cmkg}.$$

Zehnter Abschnitt.

Die Knickfestigkeit.

---

§ 56. Ableitung der Euler'schen Formel für Stäbe mit Spitzenlagerung.

Zunächst nehme ich an, der Stab, der einer Druckbelastung ausgesetzt werden soll, sei vorher genau grad gewesen. Es ist freilich nicht möglich, einen Stab vollkommen grad zu richten und von den kleinen unvermeidlichen Abweichungen von der Graden hängt das Verhalten des Stabes bei der Beanspruchung auf Zerknicken im Gegensatze zu den anderen Belastungsarten wesentlich ab. Ich werde indessen nachher auf diesen Umstand besonders eingehen und will einstweilen davon absehen. Dagegen soll von vornherein darauf Rücksicht genommen werden, dass es auch nicht möglich ist, die Belastung absolut genau centrisch aufzubringen, also so, dass die Richtungslinie der beiden Druckkräfte, die an den Enden des Stabes angreifen, genau mit der durch die Querschnittsschwerpunkte gelegten Stabaxe zusammenfiele. Immerhin sollen aber die Abweichungen beider Linien von einander als klein gegenüber den Querschnittsabmessungen angesehen werden; ich setze also mit andern Worten voraus, dass man sich bemüht hatte, die Belastung möglichst genau centrisch aufzubringen, dass dies aber nicht völlig gelungen ist und dass man daher auch nicht wissen kann, nach welcher Richtung und in welcher Grösse Abweichungen vorgekommen sind. Darin unterscheidet sich der Fall der Knickfestigkeit

von dem früher behandelten Falle der gewöhnlichen excentrischen Druckbelastung.

Für jeden Querschnitt des Stabes kann man sich die Kraft P nach dem Schwerpunkte verlegt denken. Bei dieser Parallelverlegung tritt aber noch ein kleines Kräftepaar auf, das neben der gleichförmig vertheilten Druckbelastung noch eine Vertheilung von Biegungsspannungen zur Folge hat. Hierdurch wird die vorher grade Stabaxe etwas gekrümmt und die Entfernung zwischen dem Querschnittsschwerpunkte und der Richtungslinie von P vergrössert sich dadurch ein wenig. Bei der gewöhnlichen excentrischen Druckbelastung braucht man darauf keine Rücksicht zu nehmen, weil dort angenommen wird, dass die Excentricität von vornherein verhältnissmässig gross war, so dass die geringe Vergrösserung durch die kleine Ausbiegung des Stabes dagegen nicht in Betracht kommt. Hier aber, wo die ursprüngliche Excentricität schon sehr gering war, kann es leicht vorkommen, dass die Aenderung, die sie durch die Ausbiegung erfährt, von gleicher Grössenordnung mit ihr ist oder sie selbst noch überwiegt.

Der Einfachheit wegen will ich annehmen, dass man durch die Kraftangriffslinie der P und durch die vorher grade

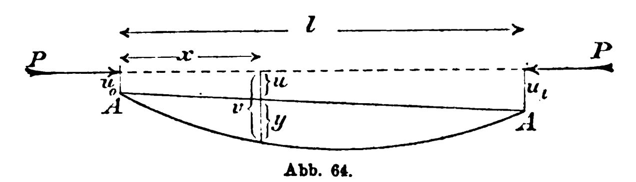


Abb. 64.

Stabaxe AA eine Ebene legen kann. Abb. 64 möge dann, freilich in sehr starker Verzerrung, die Lage beider Linien gegen einander angeben. Die zwischen A und A gezogene krumme Linie gebe die Gestalt an, in die die vorher grade Stabaxe durch die Biegung übergeht. Die ursprüngliche Excentricität u des Kraftangriffs im Querschnitte x geht in $u + y$ über und nachdem das Gleichgewicht eingetreten ist, haben wir für das Biegungsmoment M im Querschnitte x

$$M = P(u + y).$$

Die Gleichung der geraden Linie AA lautet

$$u = u_0 \cdot \frac{l - x}{l} + u_l \cdot \frac{x}{l}$$

und für die krumme Linie AA gilt die Differentialgleichung der elastischen Linie

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = - P(u + y).$$

Setzt man noch

$$v = u + y,$$

so kann diese auch geschrieben werden

$$E\Theta \frac{d^2 v}{dx^2} = - Pv. \tag{250}$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung zweiter Ordnung ist von der Form

$$v = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x, \tag{251}$$

in der A und B die beiden Integrationsconstanten sind, während α, wie man sich durch Einsetzen des angegebenen Ausdrucks in die Differentialgleichung überzeugt,

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\Theta}} \tag{252}$$

gewählt werden muss, damit die Differentialgleichung identisch erfüllt wird. Die Integrationsconstanten sind mit Hülfe der Grenzbedingungen zu bestimmen. Für $x = 0$ muss $v = u_0$ und für $x = l$ muss $v = u_l$ werden. Daraus folgt

$$B = u_0 \quad \text{und} \quad A \sin \alpha l + u_0 \cos \alpha l = u_l.$$

Löst man die letzte Gleichung nach A auf und setzt die Werthe beider Constanten in Gl. (251) ein, so geht sie über in

$$v = \frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha l} (u_l - u_0 \cos \alpha l) + u_0 \cos \alpha x. \tag{253}$$

Damit ist die Gestalt der elastischen Linie vollständig bekannt. Wir wollen jetzt zusehen, unter welchen Umständen es vorkommen kann, dass v erheblich grösser wird, als die ursprüngliche Excentricität u. Der in der Gleichung für v vorkommende Klammerwerth und das letzte Glied $u_0 \cos \alpha x$ sind immer von derselben Grössenordnung wie die u selbst,

da ein Cosinus immer ein echter Bruch ist. Wenn also v viel grösser als die u werden soll, kann dies nur dadurch geschehen, dass der Factor $\frac{\sin \alpha x}{\sin \alpha l}$ vor der Klammer sehr gross wird. Denkt man sich zunächst die Belastung P sehr klein, so dass auch α nach Gl. (252) sehr klein ist, so kann $\sin \alpha x = \alpha x$ und $\sin \alpha l = \alpha l$ gesetzt werden und der Factor vor der Klammer ist gleich $\frac{x}{l}$, also überall ein echter Bruch. Dies trifft auch so lange jedenfalls noch zu, als der Winkel αl kleiner als ein Rechter, d. h. αl kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist. Sobald aber P und damit α noch weiter wächst, nimmt nun $\sin \alpha l$ wieder ab, während $\sin \alpha x$ z. B. in der Mitte vorläufig noch weiter zunimmt. Zu sehr grossen Werthen wird der Factor aber erst dann gelangen können, wenn sich beim weiteren Anwachsen von P der Winkel αl einem Gestreckten, sein Sinus also sich der Null nähert, während $\sin \alpha x$ dann immer noch grössere Werthe hat und sich für $x = \frac{l}{2}$ sogar dem grössten Werthe nähert, den ein Sinus annehmen kann. Zuletzt, wenn

$$\alpha l = \pi \tag{254}$$

geworden ist, liefert Gl. (253) sogar einen unendlich grossen Werth für v. Natürlich ist dies nur so zu verstehen, dass kurz vorher schon v so gross wird, dass sich der Stab dauernd verbiegt, womit die Gültigkeitsgrenze unserer Betrachtungen überschritten ist. Setzt man α aus Gl. (252) in Gl. (254) ein und löst nach P auf, so erhält man

$$P_E = \pi^2 \frac{E\Theta}{l^2}. \tag{255}$$

Diese Formel wurde zuerst von Euler abgeleitet. Der Werth P_E gibt die kritische Belastung an, die nicht ganz erreicht werden darf, ohne den Stab zum Bruche oder zu einer bleibenden seitlichen Ausbiegung zu bringen.

Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, dass die ursprünglichen Excentricitäten u in Gl. (255) gar nicht mehr vorkommen. So lange die u überhaupt nur klein sind, ist es

ganz gleichgültig, wie gross sie nun im einzelnen Falle sind; die kritische Belastung P_E wird davon nicht berührt. Freilich sieht man nach Gl. (253) auch ein, dass je grösser die u ursprünglich waren, um so eher jene Ausbiegungen v erreicht werden, die schon vor dem vollständigen Ausknicken zu einer Ueberanstrengung des Materials führen. Wenn die u klein waren, wird dies aber immer erst kurz vor der Erreichung des kritischen Werthes P_E eintreffen. Vorausgesetzt wird dabei, dass die blosse Druckbelastung an sich (also wenn sich der Stab nicht ausbiegen würde) erheblich unter der Proportionalitätsgrenze liegt, dass also selbst P_E noch kleiner als

$$P_D = F \cdot \sigma_{zul} \tag{256}$$

ist. Es hängt von der Länge l ab, ob dies zutrifft und bei gegebenem Querschnitt wird das Ausknicken um so eher eintreten, je länger der Stab ist. Kurze Stäbe sind daher nur auf einfache Druckbelastung, längere auf Ausknicken zu berechnen. Von welcher Grenze ab die Knickgefahr in Frage kommt, ist durch einen Vergleich der Formeln (255) und (256) leicht zu entscheiden; unter den Aufgaben wird ein solcher Fall erörtert werden.

§ 57. Stab mit einer ursprünglichen Krümmung.

Ich werde jetzt noch zeigen, dass auch eine anfängliche Krümmung des Stabs, wenn der zugehörige Pfeil nur überhaupt klein gegen die Querschnittsabmessungen ist, keinen merklichen Unterschied herbeiführt. Dazu soll jetzt von der Excentricität der Kraftangriffslinie abgesehen und vorausgesetzt werden, dass die Stabmittellinie anfänglich eine sehr flache Curve von dem Pfeile f_0 bildete. Diesen flachen Bogen kann man genau genug als Bogen einer Sinuslinie ansehen, also

$$u = f_0 \sin \pi \frac{x}{l} \tag{257}$$

setzen. Die Differentialgleichung der elastischen Linie lautet wie vorher

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -P(u + y)$$

oder nach Einsetzen von u

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{P}{E\Theta}\left(y + f_0 \sin \pi \frac{x}{l}\right) \tag{258}$$

Die schon den Grenzbedingungen ($y = 0$ für $x = 0$ und für $x = l$) angepasste Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$y = f \sin \pi \frac{x}{l}, \tag{259}$$

wenn mit f zur Abkürzung der Werth

$$f = \frac{f_0}{\pi^2 \frac{E\Theta}{Pl^2} - 1} \tag{260}$$

bezeichnet wird. Die geometrische Bedeutung von f geht aus Gl. (259) ohne Weiteres hervor; es ist der grösste Werth, den y annehmen kann und dieser tritt ein, wenn $\frac{\pi x}{l}$ einen rechten Winkel angibt, also für $x = \frac{l}{2}$, d. h. f ist die elastische Ausbiegung nach der Seite hin, die die Mitte des Stabs unter der Belastung P erfährt. Mit Rücksicht auf Gl. (255) kann man f auch in der Form

$$f = \frac{f_0}{\frac{P_E}{P} - 1} \tag{261}$$

schreiben und man erkennt, dass auch in diesem Falle, wenn der ursprüngliche Krümmungspfeil f_0 klein war, eine grössere Ausbiegung f, also eine Bruchgefahr durch Ausknicken erst dann eintritt, wenn sich P dem Euler'schen Werthe P_E nähert.

Der Winkel, um den sich die Endtangente der elastischen Linie bei der Formänderung dreht, sei mit φ bezeichnet. So lange φ klein ist, kann der Bogen gleich der trigonometrischen Tangente gesetzt werden und man hat daher

$$\varphi = \left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=0}$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (259)

$$\varphi = \pi \frac{f}{l}. \tag{262}$$

Denkt man sich bei einem Knickversuche mit einem Stabe, dessen anfänglicher Krümmungspfeil f_0 einige mm, also merk-

lich mehr beträgt, als die unvermeidliche Excentricität der Kraftangriffslinie, die Lasten P als Abscissen und die zugehörigen Biegungspfeile f, die man mit einer geeigneten Vorrichtung gemessen hat, als Ordinaten aufgetragen, so muss man nach Gl. (261) — abgesehen natürlich von unvermeidlichen Versuchsfehlern — eine Hyperbel erhalten. Der Winkel, um den sich die Stabenden drehen, wächst nach Gl. (262) proportional mit f. Wenn man also auch φ misst, was mit einer Spiegelablesung leicht möglich ist und es in derselben Weise aufträgt, so muss gleichfalls eine Hyperbel entstehen. Die senkrechten Asymptoten beider Hyperbeln entsprechen dem Euler'schen Werthe $P = P_E$.

Diese Folgerungen der Theorie habe ich vor einiger Zeit durch den Versuch geprüft und sie gut bestätigt gefunden.

§ 58. Die wirkliche Knickbelastung P_K.

Schon in § 56 ist darauf hingewiesen worden, dass der Stab schon etwas früher, als der Euler'sche Werth P_E erreicht ist, zum Bruche oder zu bleibenden Formänderungen gelangt. Wie viel eher dies geschieht, hängt von dem anfänglichen Krümmungspfeile f_0 in Verbindung mit der anfänglichen Excentricität der Kraftangriffslinie ab. Um eine ungefähre Vorstellung davon zu geben, wie gross die aus diesem Grunde zu erwartenden Abweichungen sind, führe ich die Rechnung für den Fall durch, dass der Stab anfänglich etwas gekrümmt war, während von einer Berücksichtigung der anfänglichen Excentricität abgesehen werden soll, um die Rechnung nicht zu weitläufig zu machen.

Die grösste Anstrengung des Materials tritt im Mittelquerschnitt auf. Man hat dort für irgend eine Belastung P

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \frac{P(f+f_0)}{\Theta} \cdot a,$$

wenn a den Abstand der betreffenden Faser von der zur Nulllinie parallelen Schwerlinie angibt. Für f kann man den Werth aus Gl. (261) einsetzen. Die wirkliche Knickbelastung P_K wird schon dann nahezu erreicht, wenn die grösste im Querschnitte

vorkommende Spannung σ die Proportionalitätsgrenze überschreitet, denn sobald dies geschehen ist, wachsen die Ausbiegungen schneller als nach den vorausgehenden Formeln und der Bruch wird dadurch alsbald herbeigeführt. Wir erhalten daher P_K durch Auflösung der Gleichung

$$F\sigma' = P + \frac{PaF}{\Theta}\left(f_0 + f_0 \frac{P}{P_E - P}\right)$$

nach P, wenn wir darin unter σ' die Proportionalitätsgrenze des Materials gegen Druck und unter a den Abstand der äussersten Kante von der Schwerlinie verstehen. Für $F\sigma'$ sei zur Abkürzung wieder P_D geschrieben, also jene Belastung unter diesem Zeichen verstanden, die bei einfacher Druckbelastung eines kurzen Abschnitts des Stabes zur Ueberschreitung der Proportionalitätsgrenze führt. Die Gleichung ist vom zweiten Grade für P und ihre Auflösung liefert, wenn wir zur Abkürzung die absolute Zahl

$$\frac{aFf_0}{\Theta} = \eta$$

setzen, für P_K

$$P_K = \frac{P_D + (\eta + 1) P_E}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P_D + (\eta + 1) P_E}{2}\right)^2 - P_D P_E}. \quad (263)$$

Von den beiden Werthen ist immer der kleinere zu nehmen, das Wurzelvorzeichen also stets so zu wählen, dass das Wurzelglied negativ wird. Mit $f_0 = 0$, also bei einem ursprünglich geraden Stabe, wird $\eta = 0$ und $P_K = P_E$, vorausgesetzt, dass $P_D > P_E$ ist. Sollte dagegen $P_D < P_E$ sein, also bei einem kurzen Stabe, erhält man nach der Bemerkung über das Wurzelvorzeichen $P_K = P_D$. Auf diese Weise unterscheidet die Formel auch zwischen dem Falle der Knickfestigkeit und der blossen Druckbelastung. Um eine Vorstellung davon zu geben, wie gross der Unterschied zwischen P_K und P_E werden kann, führe ich folgende Zahlen an.

Der Stab sei ein gleichschenkliges Winkeleisen von 70 mm Schenkellänge und 9 mm Schenkelstärke, der Elasticitätsmodul sei gleich 2 110 000 atm und die Proportionalitätsgrenze gleich 2000 atm. Der anfängliche Krümmungspfeil f_0 sei zu 1 mm angenommen. Dann erhält man

für die Länge von 2 m: $P_D = 23{,}6\,t$, $P_E = 11{,}8\,t$, $P_K = 10{,}4\,t$,
" " " " 3 m: $P_D = 23{,}6\,t$, $P_E = 5{,}2\,t$, $P_K = 5{,}0\,t$,
im ersten Falle also schon ziemlich erheblich verschiedene Werthe von P_E und P_K. Der Unterschied zwischen beiden wächst schnell, wenn man f_0 vergrössert. Bei dem längeren Stabe ist bei dem gewählten f_0 der Unterschied geringer; man muss aber beachten, dass es um so schwieriger ist, einen Stab hinreichend genau gerad zu richten, je länger er ist.

Unter der Voraussetzung, dass η ein kleiner Bruch ist (dass also f_0 klein ist gegenüber dem Trägheitshalbmesser des Querschnitts), kann man den unter dem Wurzelzeichen in Gl. (263) stehenden Ausdruck mit Vernachlässigung des mit η^2 behafteten Gliedes näherungsweise ersetzen durch

$$\frac{1}{4}\left(P_D^2 + 2(\eta + 1)P_D P_E + (2\eta + 1)P_E^2 - 4P_D P_E\right)$$
$$= \frac{1}{4}\left((P_D - P_E)^2 + 2\eta P_E(P_D + P_E)\right).$$

Wenn ferner P_D erheblich grösser als P_E ist, also bei bei einem recht schlanken Stabe, kann man genau genug

$$\sqrt{(P_D - P_E)^2 + 2\eta P_E(P_D + P_E)} = P_D - P_E + \eta\frac{P_E(P_D + P_E)}{P_D - P_E}$$

setzen und Gl. (263) geht damit näherungsweise über in

$$P_K = P_E - \eta\frac{P_E^2}{P_D - P_E}. \tag{264}$$

Diese Gleichung gestattet einen bequemen Ueberschlag über die ungefähr zu erwartende Abweichung der wirklichen Knickbelastung P_K von dem Euler'schen Werthe P_E. Wenn P_D nicht erheblich grösser als P_E ist, muss man aber natürlich auf die ursprüngliche Gleichung (263) zurückgehen.

Wie ich schon erwähnte, kann Gl. (263) auch dann angewendet werden, wenn ein eigentliches Ausknicken gar nicht zu erwarten, wenn also P_D kleiner ist als P_E. Der unmittelbaren Anwendung steht aber die Schwierigkeit im Wege, dass man in der Regel im Ungewissen darüber ist, welchen Werth von f_0 oder von η man im gegebenen Falle als den wahrscheinlichsten anzusehen hat. Ausserdem ist bei der Ab-

leitung von Gl. (263) auch noch nicht auf die unvermeidliche Excentricität des Kraftangriffes Rücksicht genommen. Die Anwendung einer empirischen Formel, die Herr v. Tetmajer aus zahlreichen Versuchen mit Stäben aus verschiedenen Stoffen abgeleitet hat, ist daher in solchen Fällen mehr zu empfehlen. Bezeichnet man den kleinsten Trägheitshalbmesser des Querschnitts mit t, so kann nach v. Tetmajer für $P_D > P_E$

$$P_K = aF - b\,\frac{lF}{t} \tag{265}$$

gesetzt werden. Die Constanten a und b sind nach den Versuchen ermittelt und zwar für

Schweisseisen	$a = 3030$ atm,	$b = 12{,}9$ atm
Weiches Flusseisen	$a = 3100$ „	$b = 11{,}4$ „
Härteres Flusseisen	$a = 3210$ „	$b = 11{,}6$ „
Lufttrockenes Nadelholz	$a = 293$ „	$b = 1{,}94$ „

Für Gusseisen reicht Gl. (265) mit zwei Constanten nicht aus. Für Stäbe mit Längenverhältnissen $\frac{l}{t} = 5$ bis 80 setzt Hr. v. Tetmajer nach seinen Versuchen

$$\frac{P_K}{F} = \left(0{,}53\left(\frac{l}{t}\right)^2 - 120\,\frac{l}{t} + 7760\right)\text{atm.} \tag{266}$$

Für schlankere Stäbe wird die Anwendung der Euler'schen Formel empfohlen. Bei allen diesen Formeln wird vorausgesetzt, dass die Enden um Spitzen drehbar gelagert sind.

§ 59. Stab mit Einspannung an einem oder an beiden Enden.

Wenn das eine Ende des Stabs fest eingespannt und das andere ganz frei beweglich ist, verhält sich der Stab genau so wie eine Hälfte des beiderseits auf Spitzen gelagerten Stabs von der doppelten Länge. Es ist daher nicht nöthig, diesen Fall besonders zu untersuchen; man kann vielmehr die früher abgeleiteten Formeln benutzen, wenn man darin nur überall l durch $2\,l$ ersetzt. Ein etwas allgemeinerer Fall wird unter den Aufgaben behandelt werden.

Anders ist es, wenn der Stab an beiden Enden festgehalten wird und dort als fest eingespannt betrachtet werden kann.

Freilich ist es schwer möglich, diese Voraussetzung genau zu verwirklichen, die Anordnung an den Stabenden also so zu treffen, dass in der That jede kleine Drehung der Endtangenten der elastischen Linie verhindert wird. Es ist aber immerhin nützlich, sich Rechenschaft darüber zu geben, wie gross die Knicklast in diesem Falle würde, wenn man auch bei der praktischen Anwendung besser thun wird, auf die genaue Erfüllung der genannten Bedingung nicht zu rechnen, die wirkliche Tragfähigkeit des Stabes also entsprechend niedriger einzuschätzen. Diese Einschätzung muss dem Ermessen des Constructeurs im einzelnen Falle überlassen bleiben; sie wird sich in erster Linie nach dem Vertrauen zu richten haben, das man im gegebenen Falle in die Güte der Einspannung setzen kann. Wenn z. B. ein Stab einfach mit stumpfen Enden zwischen die Druckplatten einer Festigkeitsmaschine eingespannt wird, wird man bedenken müssen, dass eine geringe Unebenheit der Endquerschnitte eine Drehung trotzdem ermöglichen kann oder dass sich auch die Druckplatten selbst unter Umständen etwas schief stellen können, wenn sie nicht ganz besonders gut geführt sind. Bei der Ausführung eines Knickversuches dieser Art kann man sich von der Wirksamkeit der Einspannung übrigens leicht dadurch überzeugen, dass man an dem Stabende einen kleinen Spiegel anbringt, auf den man ein Fernrohr richtet, um das Spiegelbild eines festen Maassstabes darin zu beobachten. Bei genauer Einspannung darf sich der Spiegel nicht drehen.

Bei der folgenden Rechnung nehme ich indessen an, dass die feste Einspannung genau verwirklicht sei. Die beiden

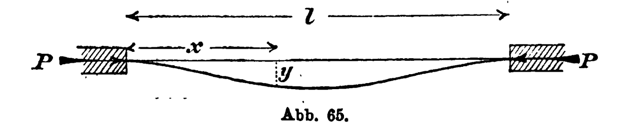


Abb. 65.

Endtangenten der elastischen Linie in Abb. 65 fallen dann miteinander und mit der ursprünglichen Lage der Stabaxe oder auch mit der Richtungslinie der Kräfte P zusammen,

wenn wir jetzt der Einfachheit wegen von der Berücksichtigung der anfänglichen Excentricität der Kraftangriffslinie ebenso wie von der ursprünglichen Krümmung des Stabes absehen. Wir wollen untersuchen, bei welchem Werthe von P der durch Abb. 65 angegebene Gleichgewichtszustand bestehen kann.

Für den Querschnitt mit der Abscisse x haben wir links vom Schnitte ausser der Kraft P noch ein Kräftepaar, das auf das Stabende übertragen werden muss, um eine Drehung zu verhindern. Das Moment dieses Kräftepaars heisst das Einspannmoment oder auch das Anfangsmoment und soll mit M_0 bezeichnet werden. Das Biegungsmoment für den Querschnitt x ist dann

$$M = M_0 + Py$$

und die Gleichung der elastischen Linie liefert

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -(M_0 + Py).$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung lautet

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{M_0}{P},$$

wenn unter α, wie schon früher, zur Abkürzung der Werth

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\Theta}}$$

verstanden wird, während A und B die beiden Integrationsconstanten sind. Für $x = 0$ muss y verschwinden, daher ist

$$B = \frac{M_0}{P}$$

zu setzen. Ferner muss wegen der Einspannung der Differentialquotient $\frac{dy}{dx}$ sowohl für $x = 0$ als für $x = l$ verschwinden. Man hat

$$\frac{dy}{dx} = A\alpha \cos \alpha x - B\alpha \sin \alpha x$$

und daher zunächst $A = 0$ und ferner

$$B\alpha \sin \alpha l = 0.$$

In der letzten Gleichung ist sowohl der Factor B als der Factor α von Null verschieden, daher muss $\sin \alpha l = 0$ sein.

Der Winkel αl ist nicht Null; damit der angenommene Gleichgewichtszustand bestehen kann, muss daher die Last P so weit gesteigert werden, bis $\alpha l = \pi$ oder ein Vielfaches von π geworden ist. Wollte man $\alpha l = \pi$ setzen, so wäre zwar die eine Grenzbedingung erfüllt, aber nicht zugleich die noch ausstehende, dass auch y für $x = l$ verschwinden muss. Diese Lösung würde daher für den von dem vorliegenden verschiedenen Fall passen, dass sich das rechte Ende des Stabes zwar nicht drehen, wohl aber frei in der Richtung der Y-Axe verschieben könnte. Um der letzten Grenzbedingung zu genügen, muss vielmehr auch

$$B \cos \alpha l - \frac{M_0}{P} = 0$$

oder $\cos \alpha l = +1$ sein und nicht gleich -1, wie für $\alpha l = \pi$. Um den zur Untersuchung gestellten Fall zu verwirklichen, müssen wir daher die Last P noch weiter wachsen lassen, bis $\alpha l = 2\pi$ geworden ist. Setzt man in diese Gleichung den Werth von α ein und löst nach P auf, so erhält man

$$P = 4\pi^2 \frac{E\Theta}{l^2}. \qquad (267)$$

Der kritische Werth der Belastung ist also bei unwandelbar eingespannten Enden viermal so gross als bei frei drehbaren Enden. Wenn P kleiner ist, kann der angenommene Gleichgewichtszustand nicht bestehen bleiben und der Stab streckt sich, wenn er sich selbst überlassen wird, wieder gerade. Im umgekehrten Falle schreitet dagegen die Biegung immer weiter fort, bis sie zum Zusammenbruche führt.

Natürlich wird durch die anfängliche Excentricität des Kraftangriffs u. s. f. der Bruch noch etwas beschleunigt und die darüber in den früheren Paragraphen durchgeführten Betrachtungen lassen sich fast ohne Aenderung auf den vorliegenden Fall übertragen; hier ist nur deshalb davon abgesehen worden, um die Untersuchung nicht zu weitläufig zu gestalten.

Endlich sei jetzt noch der Fall untersucht, dass der Stab nur am einen Ende als eingespannt, am anderen aber als frei

drehbar befestigt angenommen werden kann. Die Untersuchung ist ganz ähnlich der vorigen. Man muss beachten, dass an dem drehbar befestigten Ende auch eine quer zur Stabaxe gerichtete

Abb. 66.

Kraft V übertragen werden muss, um dieses Ende gegen eine Verschiebung im Sinne der y-Axe zu schützen. Für das Biegungsmoment M im Querschnitte x erhält man

$$M = Py - Vx,$$

woraus der Reihe nach folgt

$$E\Theta \frac{d^2 y}{dx^2} = -Py + Vx,$$

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + \frac{V}{P} x,$$

wenn α die frühere Bedeutung hat. Wegen $y = 0$ für $x = 0$ folgt $B = 0$ und wegen $y = 0$ für $x = l$

$$A = -\frac{Vl}{P \sin \alpha l}.$$

Damit sind die Integrationsconstanten bestimmt. Dagegen ist V noch unbekannt, während zugleich noch die Grenzbedingung $\frac{dy}{dx} = 0$ für $x = l$ zur Verfügung steht. Mit $B = 0$ hat man durch Differentiiren

$$\frac{dy}{dx} = A\alpha \cos \alpha x + \frac{V}{P},$$

also muss die Gleichung

$$0 = -\frac{V\alpha l \cos \alpha l}{P \sin \alpha l} + \frac{V}{P}$$

erfüllt sein. Die Auflösung nach V würde $V = 0$, hiermit aber auch $A = 0$ und schliesslich auch $y = 0$ liefern. Das ist natürlich ein möglicher Gleichgewichtszustand, nämlich jener, bei dem der Stab unter der Belastung geradlinig bleibt. Für diesen interessiren wir uns aber nicht und in der That

wird die vorstehende Gleichung bei einem beliebigen Werthe von V auch dann noch erfüllt, wenn

$$\frac{\alpha l \cos \alpha l}{\sin \alpha l} = 1 \quad \text{oder} \quad \alpha l = \operatorname{tg} \alpha l$$

ist. Dies ist eine transcendente Gleichung für αl, die unendlich viele Wurzeln hat; für uns kommt aber nur die kleinste auf $\alpha l = 0$ folgende in Betracht, da es sich nur darum handelt, wie weit wir P wachsen lassen müssen, um eine Ausbiegung, wie sie in Abb. 66 gezeichnet ist, eben noch aufrecht erhalten zu können. Man sieht leicht ein, dass αl jedenfalls grösser als π werden muss, um die Tangente des Winkels gleich dem Bogen zu machen und durch Probiren findet man, dass ungefähr

$$\alpha l = 4{,}49$$

die gesuchte Wurzel der Gleichung ist. Das Quadrat von 4,49 kann gleich 20 gesetzt werden und mit Rücksicht auf die Bedeutung von α erhält man daher

$$P = 20 \frac{E\Theta}{l^2}, \tag{268}$$

also ziemlich genau das Doppelte der Knickkraft für den Stab mit frei drehbaren Enden oder die Hälfte des für den Stab mit beiderseits eingespannten Enden gefundenen Werthes. Anstatt dessen kann man Gl. (268) auch dahin aussprechen, dass der am einen Ende eingespannte und am anderen drehbar gelagerte Stab dieselbe Knickfestigkeit hat, als wenn er beiderseits drehbar gelagert wäre, falls zugleich an Stelle der Länge l die Länge $\frac{l}{\sqrt{2}}$ genommen wird. Von dieser Zurückführung auf eine gleichwerthige Länge des in Spitzen gelagerten Stabes war schon in den Eingangssätzen dieses Paragraphen Gebrauch gemacht und sie ist überhaupt recht bequem. So kann auch Gl. (267) dahin gedeutet werden, dass als gleichwerthige Länge $\frac{l}{2}$ genommen werden muss, um den Fall des Stabes mit beiderseits eingespannten Enden auf den Normalfall der Spitzenlagerung zurückzuführen.

§ 60. Knicken bei gleichzeitiger Biegungsbelastung.

Der Stab möge in der Mitte eine Biegungslast Q tragen (vgl. Abb. 67). Für das Biegungsmoment im Querschnitte x erhält man

$$M = \frac{Q}{2}x + Py$$

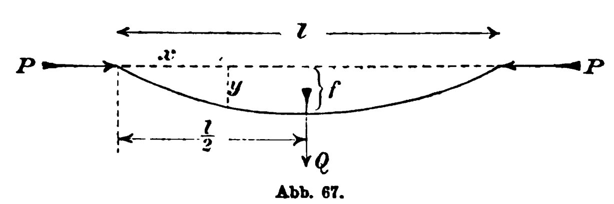


Abb. 67.

und hieraus

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = -\left(\frac{Q}{2}x + Py\right)$$

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x - \frac{Q}{2P}x.$$

Die elastische Linie zerfällt in zwei Aeste, die sich in der Mitte aneinanderschliessen. Für jeden Ast sind die Constanten A und B gesondert zu bestimmen; hier genügt es indessen der Symmetrie wegen, nur einen Ast näher ins Auge zu fassen. Wir wählen den linken; für $x = 0$ muss $y = 0$ und für $x = \frac{l}{2}$ muss $\frac{dy}{dx} = 0$ sein. Die erste Grenzbedingung liefert $B = 0$ und aus der zweiten folgt

$$A = \frac{Q}{2P\alpha\cos\frac{\alpha l}{2}}.$$

Setzt man dies in die Gleichung für y ein und wählt darin nachträglich $x = \frac{l}{2}$, um die grösste Ausweichung, nämlich den Biegungspfeil f zu erhalten, so wird

$$f = \frac{Q}{2P\alpha}\left\{\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2}\right\}. \tag{269}$$

Die Formel liefert einen unendlich grossen Werth für f, wenn $\frac{\alpha l}{2}$ zu einem rechten Winkel, αl also $= \pi$ und daher $P = \pi^2\frac{E\Theta}{l^2}$

wird. Die Biegungsbelastung ändert also in diesem Sinne nichts an der kritischen Belastung auf Zerknicken, die ebenso gross bleibt, als wenn Q nicht vorhanden wäre. Dieser Schluss ist aber mit Vorsicht aufzunehmen, denn er bezieht sich ja nur auf die rein elastischen Erscheinungen und nimmt auf die schon vor der Erreichung der kritischen Belastung eintretende Ueberschreitung der Proportionalitätsgrenze keine Rücksicht. So wie wir schon früher fanden, dass P_K wegen der Excentricität des Kraftangriffs u. s. f. kleiner ist als P_E, muss auch hier die wirkliche Knickbelastung kleiner ausfallen als der Euler'sche Werth und zwar um so mehr, je grösser Q ist.

Für die Spannung in einer Faser des mittleren Querschnitts erhält man bei Benutzung derselben Bezeichnungen wie bei der ähnlichen Untersuchung in § 58

$$\sigma = \frac{P}{F} \pm \left(\frac{Ql}{4} + Pf\right)\frac{a}{\Theta}.$$

In diese Gleichung ist f nach Gl. (269) einzuführen, ebenso für α der Werth einzusetzen und hierauf die Gleichung nach P aufzulösen, womit man ebenso wie in § 58 P_K erhält. Dabei tritt freilich die Schwierigkeit auf, dass die Gleichung transcendent ist; um darüber leichter hinweg zu kommen, ersetze ich Gl. (269) noch durch eine Näherungsformel, indem ich von der Reihenentwickelung

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \cdots$$

Gebrauch mache, die convergent ist bis $x = \frac{\pi}{2}$. Bei Festigkeitsberechnungen wird es sich meistens um Lasten handeln, die erheblich unter der Bruchbelastung bleiben, da man noch eine gewisse Sicherheit nöthig hat. Jedenfalls ist daher auch $\frac{\alpha l}{2}$ bei einem Falle der praktischen Anwendung erheblich kleiner als $\frac{\pi}{2}$ und selbst noch kleiner als die Einheit. In diesem Falle convergirt die Reihe ziemlich schnell und für eine Annäherung wird es genügen, die drei ersten Glieder zu berücksichtigen. Man erhält dann an Stelle von Gl. (269)

$$f = \frac{Q\alpha^2 l^3}{48 P}\left(1 + \frac{\alpha^2 l^2}{10}\right)$$

oder, wenn man noch den Werth von α einsetzt,

$$f = \frac{Q l^3}{48 E\Theta}\left(1 + \frac{P l^2}{10 E\Theta}\right). \qquad (270)$$

Das erste Glied in der Klammer entspricht dem Biegungspfeile für $P = 0$ und stimmt auch in der That mit dem früher für die Biegungsbelastung Q gefundenen Pfeile (Gl. 82) genau überein. Schreiben wir für diesen Antheil, also auch für den Factor vor der Klammer f_0 und beachten wir, dass im zweiten Gliede der Factor 10 im Nenner nahezu mit π^2 übereinstimmt und dass sich dieses Glied daher in der Form $\frac{P}{P_E}$ schreiben lässt, so vereinfacht sich Gl. (270) noch weiter zu

$$f = f_0 \cdot \frac{P_E + P}{P_E}. \qquad (271)$$

Die Gleichung für σ geht jetzt, nach Multiplikation mit F und mit $F\sigma = P_D$ über in

$$P_D = P + \left(\frac{Ql}{4} + P \cdot \frac{P_E + P}{P_E} f_0\right)\frac{aF}{\Theta}, \qquad (272)$$

die ohne Weiteres nach P aufgelöst werden kann und damit P_K liefert. Solange P erheblich kleiner bleibt als P_E, erkennt man übrigens schon aus Gl. (271), dass der Biegungspfeil durch die Zufügung von P gegenüber f_0 nur wenig geändert wird. Daraus ist zu schliessen, dass die Biegungsspannungen auch nur ungefähr in denselben Verhältnissen wachsen, wozu dann freilich noch die gleichförmig über den Querschnitt vertheilte Belastung $\frac{P}{F}$ kommt.

Nach Auflösung der quadratischen Gleichung (272) nach P hat man übrigens für f_0 nachträglich wieder den Werth einzusetzen, für den es zur Abkürzung diente; von der weiteren Ausrechnung, die gar keine Schwierigkeiten mehr bietet, möge hier abgesehen werden.

§ 61. Knickformel von Navier, Schwarz, Rankine.

Die Lehre von der Knickfestigkeit hat eigenthümliche Wandlungen durchgemacht; von allen Formeln der Festigkeitslehre, die wir heute als richtig anerkennen, ist die Euler'sche Knickformel eine der ältesten. Zu dieser Anerkennung, dass sie wirklich richtig ist, d. h. dass sie mit den Thatsachen hinreichend genau in Uebereinstimmung steht, ist sie aber erst seit verhältnissmässig kurzer Zeit gelangt und selbst heute fehlt es ihr daran noch in manchen Kreisen.

Die Ursache für die auf den ersten Blick sehr befremdliche Erscheinung, dass man die Ergebnisse einer mathematischen Entwickelung verwarf, an der man keinen Fehler nachweisen konnte und auf deren Voraussetzungen man sich sonst bei allen Rechnungen stützte, besteht darin, dass die älteren Techniker so gewohnt waren, bei Festigkeitsberechnungen den Sicherheitsgrad nach der auftretenden grössten Spannung zu bemessen, dass sie dadurch unfähig wurden, einen Fall zu beurtheilen, bei dem dieser Massstab keinen Sinn hatte. In der That, man versetze sich etwa in die Lage eines Baubeamten, von dem bei einer statischen Berechnung auf Grund irgend einer veralteten Verordnung der Nachweis verlangt wird, dass z. B. die Beanspruchung des Eisens 700 oder 1000 atm o. dgl. unter keinen Umständen überschreiten dürfe. Mit der Euler-schen Formel kann man dem Buchstaben dieser Verordnung überhaupt nicht gerecht werden, wenn es sich um eine Berechnung auf Knickfestigkeit handelt. Sehr oft würde, wenn man eine thatsächlich in einem solchen Stabe auftretende Druckspannung von 700 kg zulassen wollte, damit schon fast die Grenze des Ausknickens erreicht werden und oft genug liegt bei sehr schlanken Stäben die Spannung, die nicht überschritten werden darf, ohne dass die kritische Belastung erreicht wird, bei nur 200 oder 300 atm oder selbst noch niedriger. Man wird verstehen, dass der Baubeamte, von dem ein Nachweis verlangt wird, der nach der Euler'schen Formel ganz sinnlos ist, mit Vergnügen nach einer andern Formel

greifen wird, gleichgiltig ob sie nun richtig oder falsch ist, wenn sie nur den Buchstaben der Vorschrift zu erfüllen gestattet. Daran allein, dass es auf diese Weise möglich gemacht wurde, den Sicherheitsgrad einer Construction in einer einzigen Ziffer für die zulässige Beanspruchung des Materials in atm auszudrücken, liegt es offenbar, dass sich namentlich die Bauingenieure so lange hartnäckig gegen die Anwendung der Euler'schen Formel gesträubt haben. In meiner Studienzeit, die noch nicht so weit zurückliegt, habe ich eine Vorlesung über technische Mechanik gehört, in der die Euler'sche Formel bei der Erörterung der Knickfestigkeit überhaupt nicht erwähnt wurde, so dass ich erst bei einer späteren Gelegenheit von ihrem Dasein Kenntniss erhalten konnte. Wenn so etwas bei einem akademischen Vortrage, der übrigens von einem bedeutenden Manne gehalten wurde, möglich war, mag man danach bemessen, wie man in den Kreisen der Praktiker zu der Frage stand. Mir selbst wurde noch vor wenigen Jahren von einem sehr tüchtigen Ingenieur einmal entgegengehalten, dass die Euler'sche Formel gar nicht die „wissenschaftliche“ wäre.

Nun will ich nicht etwa mit diesen Rückerinnerungen einen Tadel darüber verbinden, dass man sich überhaupt gegen die bedingungslose Annahme der Euler'schen Formel sträubte; es wird gar vieles errechnet, was nachher mit den Thatsachen arg im Widerspruche steht und dem Praktiker kann man es daher nicht verdenken, wenn er einer Rechnung einfach misstraute, die ihm missbehagte, anstatt sie eingehend zu prüfen. Das Misstrauen war also an sich berechtigt; falsch war nur, dass man die Formel ganz verwarf und eine andere an ihre Stelle setzte, deren theoretische Herleitung auf sehr viel schwächeren Füssen stand, ohne dass man sich darum gekümmert hätte, welche von beiden Formeln die Erfahrungen am besten wiedergibt.

Seit den Versuchen, die mein Vorgänger Bauschinger im Jahre 1887 angestellt hat, weiss man, dass die Euler'sche Formel mit den Thatsachen weit besser übereinstimmt als die Schwarz'sche

u. s. f. und durch die sehr eingehenden und sorgfältigen Versuche Tetmajer's in dem Züricher Laboratorium wurde dies noch weiter bestätigt. Auch ich selbst habe einige Knickversuche angestellt, die zur Bestätigung der Euler'schen Theorie dienten. Wer von den übrigen bekannteren Vertretern des Faches in den letzten Jahren das Wort über diese Frage ergriff, hat sich auch stets im Sinne der Euler'schen Theorie geäussert und keine einzige Thatsache konnte seitdem zu Gunsten anderer Formeln gedeutet werden. Es scheint daher, dass in den wissenschaftlich maassgebenden Kreisen jetzt Stimmeneinhelligkeit darüber herrscht, dass die Euler'sche Theorie, so wie ich sie in den vorausgehenden Paragraphen vorgetragen habe, die richtige Theorie der Knickfestigkeit ist.

Der wissenschaftlichen Erkenntniss hinkt freilich die praktische Bethätigung auf einem Gebiete, in dem der Einzelne durch Vorschriften von mancherlei Art gehemmt wird, dem als richtig Erkannten zu folgen, gewöhnlich erheblich nach. Ich möchte es daher nicht verantworten, die Erörterung der Schwarz-Navier-Rankine'schen Theorie der Knickfestigkeit in meinen Vorlesungen ganz wegzulassen.

Die Formel, die ich jetzt ableiten will, ist zu verschiedenen Zeiten auf verschiedenen Wegen gefunden worden und sie wird daher bald als die Navier'sche, bald als die Schwarz'sche, bald als die Rankine'sche bezeichnet. Man geht bei ihrer Ableitung am einfachsten von der an sich ganz berechtigten Annahme aus, dass die Kraft P wegen zufälliger Abweichungen der Stabaxe von der geraden Linie und wegen der unvermeidlichen Excentricität des Kraftangriffs von vornherein an einem Hebelarme p wirkt. Für diesen Hebelarm setze man hypothetisch

$$p = \varkappa \frac{l^2}{a} \tag{273}$$

worin $\varkappa$ eine absolute Zahl ist, die aus Versuchen zu bestimmen ist. Zur Rechtfertigung für den Ansatz (273) kann man anführen, dass Abweichungen der genannten Art um so eher eintreten, je grösser die Länge l im Vergleiche zu dem Ab-

stande a der äussersten Faser von der in Frage kommenden Schwerlinie ist. Freilich liesse sich diese Ueberlegung auch noch auf andere Art zum Ausdrucke bringen und Gl. (273) haftet daher eine Willkür an, die nur durch die nachträgliche Bestätigung durch die Erfahrung gehoben werden könnte. Nimmt man Gl. (273) aber an, so ist damit der Fall der Knickfestigkeit auf den der gewöhnlichen excentrischen Druckbelastung zurückgeführt. Für die Spannung an der äussersten Faser erhält man

$$\sigma = \frac{P}{F} + \frac{Pp}{\Theta} a = \frac{P}{F}\left(1 + \varkappa \frac{l^2}{t^2}\right) \tag{274}$$

wenn mit t der Trägheitsradius bezeichnet wird.

Der zulässige Werth der Druckbelastung folgt daraus

$$P_{zul} = \frac{F\sigma_{zul}}{1 + \varkappa \frac{l^2}{t^2}} \tag{275}$$

und das ist die Formel, um deren Ableitung es sich handelte. Wenn man es als einen Vorzug betrachten will, dass die zulässige Beanspruchung auf Zerknicken P_{zul} von der zulässigen Druckspannung σ_{zul} des Baustoffes abhängig gemacht wird, kommt ihr dieser Vorzug in der That zu. Wichtiger ist aber natürlich die Frage, inwiefern die Gleichung mit dem thatsächlichen Verhalten eines auf Druck beanspruchten Stabes übereinstimmt und ich habe schon erwähnt, dass deren Beantwortung zu Ungunsten der Gl. (275) ausfällt. Natürlich ist es immer möglich, Gl. (275) zur Uebereinstimmung mit irgend einem bestimmten Versuchsergebnisse zu bringen, wenn man die Constante $\varkappa$ passend wählt. In dieser Hinsicht haben alle Formeln, in die man einen aus den Versuchen selbst erst zu bestimmenden Coefficienten einführt, einen Vorsprung vor anderen, die auf rationellerem Wege abgeleitet sind, wie z. B. die Euler'sche Formel, die schon durch einen einzigen Versuch widerlegt werden könnte, wenn sie auf einer falschen Grundlage beruhte. Es ist auch klar, dass man Gl. (275) ohne Besorgniss auf eine ganze Gruppe verwandter Fälle anwenden kann, wenn man $\varkappa$ aus einem Knickversuche entnimmt, der

unter ganz ähnlichen Umständen angestellt wurde. Bei Festigkeitsberechnungen dieser Art handelt es sich ja ohnehin mehr um eine ungefähre Abschätzung als um die Gewinnung genau richtiger Werthe. Eine wissenschaftliche Bedeutung könnte man Gl. (275) aber nur dann zusprechen, wenn die Constante $\varkappa$ nur von dem Baustoffe abhängig wäre und bei allen Längenverhältnissen des Stabes wirklich als constant betrachtet werden dürfte. Das trifft aber, wie namentlich aus den Versuchen v. Tetmajer's hervorgeht, keineswegs zu. In jedem andern Falle der Anwendung müsste man, um ganz sicher zu gehen, einen anderen Werth von $\varkappa$ einführen und die Brauchbarkeit des Resultats hängt ganz davon ab, ob man den im gegebenen Falle zutreffenden Werth von $\varkappa$ richtig eingeschätzt hat.

§ 62. Ausknicken einer auf Verdrehung beanspruchten langen Welle.

Von allen Fällen des labilen elastischen Gleichgewichts ist der seither behandelte der gewöhnlichen Knickfestigkeit praktisch zwar weitaus der wichtigste. Daneben kommen aber auch noch andere vor und schon in § 49 wurde ein solcher behandelt. Hier soll noch der zuerst von Greenhill untersuchte Fall des labilen elastischen Gleichgewichts einer auf Verdrehung beanspruchten langen dünnen Welle von kreisförmigem Querschnitte besprochen werden. Wenn eine solche Welle hinreichend lang im Vergleiche zu ihrem Durchmesser ist, befindet sie sich nämlich im geraden Zustande im labilen Gleichgewichte, grade so wie ein auf Druck beanspruchter sehr schlanker Stab. Sobald durch zufällige Umstände die geringste Abweichung der Mittellinie von einer Geraden veranlasst wird, steigert sich die Abweichung unausgesetzt, bis sie zum Bruche führt; wir können diese Erscheinung ebenfalls als ein Ausknicken bezeichnen.

Die Sache selbst kennt wohl Jedermann aus der alltäglichen Erfahrung, zwar nicht aus der Erfahrung an eigentlichen Wellenleitungen, bei denen sie nur in ganz ausnahmsweisen Fällen vorliegen könnte, wohl aber aus der Erfahrung

mit einem dünnen Faden oder auch mit einem dünnen Drahte. Wenn ein Faden an beiden Enden festgehalten und dann verwunden wird, beginnt er, wenn die Verwindung hinreichend weit vorgeschritten ist, seitlich auszuweichen und sich spiralig aufzurollen. Man macht davon Gebrauch, wenn man den langen Faden zu einem doppelten von der halben Länge zusammenlegen will. Die beiden Theile, die man zusammenlegt, wickeln sich dann ohne weiteren Zwang in Schraubenlinien umeinander und bilden dadurch nachher ein gut zusammenhängendes Ganzes. Auch Metalldrähte, die man bei Festigkeitsprüfungen auf Verwinden beansprucht, brechen sehr häufig nicht einfach durch Versagen der Torsionsfestigkeit, sondern erst nach vorausgehendem Ausknicken, d. h. nach einer Formänderung, bei der die Mittellinie in eine langgestreckte Schraubenlinie übergeht.

Zur Untersuchung dieser Erscheinung kann man ähnlich verfahren, wie in § 59 bei der Erörterung besonderer Fälle der gewöhnlichen Knickfestigkeit. Man sehe zu, wie gross das verwindende Moment M sein muss, um eine Ausbauchung, die als bereits vorhanden vorausgesetzt wird, gerade aufrecht zu erhalten. Bei einem kleineren Werthe von M wird sich die Mittellinie der Welle von selbst wieder gerade strecken und bei jedem grösseren Werthe wird die Ausbauchung weiter fortschreiten. Das gefundene M stellt also die kritische Verdrehungsbelastung der Welle dar.

In Abb. 68 ist in axonometrischer Zeichnung die Schraubenlinie angegeben, in die die Mittellinie der Welle übergegangen sein mag. Zur besseren Orientierung ist auch der Cylinder angedeutet, auf den die Schraubenlinie liegt. Der Querschnitt der Welle ist dagegen weggelassen;

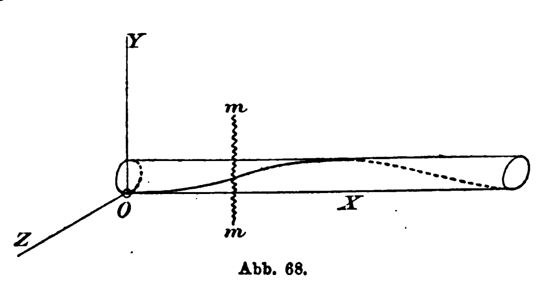


Abb. 68.

mit dem gezeichneten Cylinder hat daher der Umriss der Welle selbst nichts gemein. Die anfängliche Lage der Wellenmittellinie im unverdrehten Zustande möge mit der Erzeugenden X des Cylinders zusammenfallen; dass sie überhaupt mit einer Cylindererzeugenden zusammenfallen muss, folgt daraus, dass die Enden der Wellenmittellinie gegen eine seitliche Ausweichung gestützt sind.

Man lege irgend einen Querschnitt mm durch die Welle und bringe daran das verdrehende Moment M an. Dieses Moment ist eine gerichtete Grösse, die parallel zur X-Axe geht. Wir zerlegen es in zwei Componenten, von denen die eine in die Richtung der Tangente an die Schraubenlinie fällt und die zweite senkrecht dazu steht. Die erste Componente entspricht den Torsionsspannungen im Querschnitte der Welle und die zweite hält bei passender Grösse die Biegung der Wellenmittellinie aufrecht.

Rechtwinklig zur X-Axe seien noch zwei Coordinaten-Axen der y und z angenommen. Die Winkel, die die Tangente an die Schraubenlinie mit den Coordinatenrichtungen bildet, seien mit α, β, γ bezeichnet. Dann ist genau genug $\cos \alpha = 1$, dagegen

$$\cos \beta = \frac{dy}{ds}, \qquad \cos \gamma = \frac{dz}{ds}.$$

Hier sind unter y, z Coordinaten eines Punktes der Wellenmittellinie und unter ds ein Längenelement dieser Linie zu verstehen. Zerlegt man jetzt das ganze, in der Richtung der X-Axe gehende Verdrehungsmoment M in drei Componenten, von denen eine in die Richtung von ds und die anderen in die Richtungen der Y- und Z-Axe fallen, so hat man für letztere

$$M_y = M \cos \beta = M \frac{dy}{ds}; \qquad M_z = M \frac{dz}{ds}.$$

Das Moment M_y, dessen Richtung parallel zur Y-Axe geht, sucht eine Ausbiegung in der Richtung der Z-Axe hervorzubringen. In der That stehen ja bei einer gewöhnlichen Biegung, bei der alle Kräfte in derselben Ebene liegen, die Momente, wenn man sie nicht nur der absoluten Grösse nach

betrachtet, sondern sie als gerichtete Grössen auffasst, alle senkrecht zur Belastungs- oder zur Biegungsebene. So ist es auch hier und die doppelte Krümmung der elastischen Linie wird durch das Zusammenwirken von M_y und M_z veranlasst. Nach dem Superpositionsgesetze können wir die Wirkungen von M_y und M_z gesondert betrachten und beide nachträglich zusammensetzen. Für die Wirkung von M_y für sich gilt die Differentialgleichung der elastischen Linie in der Form

$$E\Theta\frac{d^2z}{dx^2} = -M_y = -M\frac{dy}{ds}$$

und dazu kommt noch für die andere Ausbiegungsrichtung die Gleichung

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = -M\frac{dz}{ds}.$$

Die Vorzeichen in diesen beiden Gleichungen sind indessen noch zweifelhaft und bedürfen einer besonderen Untersuchung. Angenommen, y, z, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$ seien an der betrachteten Stelle alle positiv und ebenso M_y, M_z. Wenn dann M_y einer Drehung im Sinne des Uhrzeigers, also in der Richtung von der X- zur Z-Axe entspricht (vgl. Abb. 69), trifft dies auch für M_z zu, die Drehung geht also hier von der Y- zur X-Axe. Auf die X-Axe bezogen, gehen daher beide Drehungen in verschiedener Richtung. Daraus folgt, dass bei gleichen Vorzeichen von M_y und M_z beide in die Differentialgleichung der elastischen Linie mit verschiedenen Vorzeichen einzuführen sind. Welches man positiv und welches man negativ einzusetzen hat, hängt von Vorzeichenfestsetzungen ab,

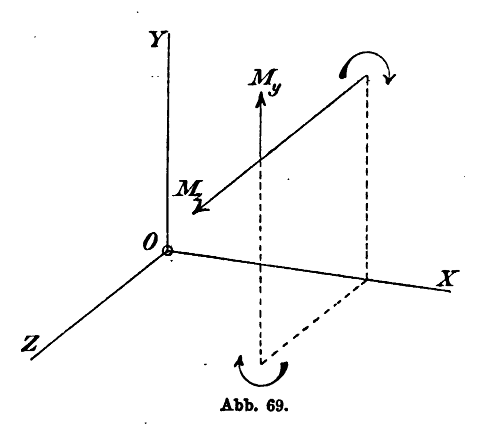


Abb. 69.

auf die hier nicht weiter eingegangen zu werden braucht, da sie für das Resultat, das ich hier ableiten will, gleichgültig sind.

Schreibt man noch dx an Stelle von ds, so gehen jetzt die vorigen Gleichungen in die genauere Form

$$\left.\begin{aligned} E\Theta\frac{d^2z}{dx^2} &= \pm M\frac{dy}{dx} \\ E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} &= \mp M\frac{dz}{dx} \end{aligned}\right\} \tag{276}$$

über. Die erste liefert nach Integration

$$\frac{dz}{dx} = \pm \frac{M}{E\Theta}y \pm C$$

und dies setze ich in die zweite Gleichung ein. Diese geht dadurch über in

$$E\Theta\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M^2}{E\Theta}y - CM. \tag{277}$$

Die Lösung dieser Gleichung, die ganz der Euler'schen Gleichung für den Fall der gewöhnlichen Knickfestigkeit entspricht, lautet

$$y = A\sin\beta x + B\cos\beta x - C\frac{E\Theta}{M}, \tag{278}$$

wenn man mit β zur Abkürzung den Werth

$$\beta = \pm\frac{M}{E\Theta} \tag{279}$$

bezeichnet. Für z gilt natürlich eine Gleichung von derselben Form, wie man sofort einsieht, wenn man aus den Gleichungen (276) y anstatt z eliminirt.

Zur Bestimmung der Integrationsconstanten A und B benutzen wir die Grenzbedingungen, dass $y = 0$ sein muss für $x = 0$ und für $x = l$. Daraus folgt

$$B = C\frac{E\Theta}{M} = \frac{C}{\beta}; \qquad A = \frac{C}{\beta}\cdot\frac{1-\cos\beta l}{\sin\beta l}$$

und daher schliesslich

$$y = \frac{C}{\beta}\left\{\frac{\sin\beta x}{\sin\beta l}(1-\cos\beta l) + \cos\beta x - 1\right\} \tag{280}$$

Die Integrations-Constante C bleibt zunächst noch unbekannt. Wir differentiiren jetzt y zweimal und setzen den

zweiten Differentialquotienten in die zweite der Gleichungen (276) ein, um z zu erhalten. Wir finden

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -C\beta\left\{\frac{\sin\beta x}{\sin\beta l}(1-\cos\beta l)+\cos\beta x\right\} = -\beta\frac{dz}{dx}$$

und daher nach einmaliger Integration

$$z = \frac{C}{\beta}\left\{\frac{\cos\beta x}{\sin\beta l}(\cos\beta l - 1)+\sin\beta x\right\}+K. \qquad (281)$$

Auch z muss für $x = 0$ und für $x = l$ verschwinden. Die erste Bedingung liefert die neue Integrations-Constante K

$$K = \frac{C}{\beta}\,\frac{1-\cos\beta l}{\sin\beta l},$$

so dass z übergeht in

$$z = \frac{C}{\beta}\left\{\frac{(1-\cos\beta x)(1-\cos\beta l)}{\sin\beta l}+\sin\beta x\right\}. \qquad (282)$$

Die andere Grenzbedingung dagegen lehrt, dass zur Aufrechterhaltung des angenommenen Gleichgewichtszustandes ohne Rücksicht auf die Grösse von C, d. h. auf die Grösse der Ausbiegung

$$(1-\cos\beta l)^2+\sin^2\beta l = 0$$

sein muss. Damit eine Summe von zwei Quadraten verschwinde, muss jedes Quadrat für sich verschwinden, also muss $\sin\beta l = 0$ und $\cos\beta l = +1$ sein. Dazu muss β so weit angewachsen sein, dass der Winkel $\beta l = 2\pi$ wird. Mit Rücksicht auf die Bedeutung von β hat man daher die Bedingungsgleichung

$$\frac{Ml}{E\Theta} = 2\pi \quad \text{oder} \quad M = 2\pi\frac{E\Theta}{l}. \qquad (283)$$

Das ist die kritische Verdrehungsbelastung, die nicht erreicht werden darf, wenn man ein Ausknicken der Welle vermeiden will.

Man kann dieser Gleichung auch noch einen anderen Ausdruck geben. Nach Gl. (231) ist nämlich der Verdrehungswinkel $\Delta\varphi$, der durch das Moment M veranlasst wird,

$$\Delta\varphi = \frac{2Ml}{\pi a^4 G} = \frac{Ml}{2\Theta G}.$$

Setzt man in diese Gleichung den kritischen Werth von M aus Gl. (283) ein, so erhält man

$$\Delta\varphi = \pi \frac{E}{G}. \qquad (284)$$

Also erst dann, wenn der Verdrehungswinkel etwas mehr als eine Umdrehung beträgt, kann nach dieser Formel ein Ausknicken eintreten. Bei Stahlwellen müsste daher die Länge etwa das 3000fache des Durchmessers betragen, wenn das Ausknicken früher als die Ueberwindung der gewöhnlichen Torsionsfestigkeit eintreten sollte. Indessen ist zu beachten, dass hierbei noch keine Rücksicht auf die schon vorher vorhandenen zufälligen Abweichungen der Wellenmittellinie von einer Geraden u. s. w. genommen ist. Durch solche zufällige Umstände und ferner durch die Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze kann die kritische Länge, von der ab das Ausknicken beginnt, ganz bedeutend herabgesetzt werden. Auch in dieser Hinsicht gleicht der Fall vollständig dem der gewöhnlichen Knickfestigkeit. Da die hier besprochenen Knickerscheinungen praktisch minder wichtig sind, soll indessen von einem weiteren Eingehen darauf abgesehen werden.

Aufgaben.

45. Aufgabe. Bei welchem Verhältniss der Querschnittsseite a zur Länge l beginnt die Knickgefahr für einen quadratischen Stab nach der Euler'schen Formel?

Lösung. Man setze

$$\frac{\pi^2 E \Theta}{l^2} = F\sigma$$

und verstehe unter σ die Proportionalitätsgrenze für Druck. Da $\Theta = \frac{a^4}{12}$ und $F = a^2$ ist, erhält man durch Auflösung der Gleichung nach l

$$l = a\pi \sqrt{\frac{E}{12\sigma}}.$$

Wenn z. B. für Flusseisen $E = 2\,100\,000$, $\sigma = 2000$ atm gesetzt wird, liefert dies

$$\frac{l}{a} = 29{,}4.$$

Bei der Ableitung ist vorausgesetzt, dass die Stabenden frei drehbar sind. — Bei einem kleineren Längenverhältnisse ist indessen die blosse Berechnung auf gleichförmig vertheilte Druckbelastung immer noch bedenklich und man thut dann besser, die Tetmajer'sche Formel anzuwenden. — Ganz ähnlich ist natürlich bei anderen Querschnittsformen zu verfahren.

46. *Aufgabe. Wie gross ist die Last, die eine gusseiserne Säule von 20 cm äusserem Durchmesser und 2 cm Wandstärke bei 6 m Höhe a) nach der Euler'schen, b) nach der Schwarz'schen Formel mit Sicherheit tragen kann, wenn* $E = 1000\,000$ atm, $\sigma_{zul} = 700$ atm, $\varkappa = 0{,}0002$ *gesetzt wird?*

Lösung. Die Querschnittsfläche F ist

$$F = \pi(10^2 - 8^2) = 113\,\text{cm}^2.$$

Das Trägheitsmoment Θ ist

$$\Theta = \frac{\pi}{4}(10^4 - 8^4) = 4630\,\text{cm}^4 \quad \text{und} \quad i^2 = \frac{4630}{113} = 41\,\text{cm}^2.$$

Bei Anwendung der Euler'schen Formel setzen wir voraus, dass das obere Ende der Säule durch das Gebälk, das sie trägt, gegen eine Verschiebung in horizontaler Richtung gestützt sei. Gewöhnlich wird dies zutreffen; natürlich ist aber im gegebenen Falle sorgfältig darüber nachzudenken, ob die Voraussetzung wirklich berechtigt ist. Sonst ist die doppelte Länge in die Formel einzuführen. Dagegen sehen wir von der Berücksichtigung einer etwaigen Einspannung der Enden der Sicherheit wegen ab. Die Knicklast wird dann nach der Euler'schen Formel

$$P_E = \pi^2 \frac{E\Theta}{l^2} = 10 \cdot \frac{10^6 . 4630}{600^2} = 128600\,\text{kg}.$$

Man pflegt bei Gusseisen eine 6-fache Sicherheit gegen Ausknicken zu verlangen, daher setzen wir

$$P_{zul} = \frac{1}{6} P_E = 21400\,\text{kg}.$$

Nach der Schwarz'schen Formel wird dagegen

$$P_{zul} = \frac{F \cdot \sigma_{zul}}{1 + \varkappa \frac{l^2}{i^2}} = \frac{113 \cdot 700}{1 + 2 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{600^2}{41}} = 28600\,\text{kg}.$$

Ich selbst würde dem ersten Resultat den Vorzug geben, hätte aber auch gegen die Belastung mit 28600 kg nicht viel einzuwenden, da der Sicherheitsgrad im ersten Falle ziemlich willkürlich eingeschätzt ist.

47. Aufgabe. Ein aufrecht stehender Stab ist am unteren Ende fest eingespannt. Das obere Ende ist frei drehbar und kann sich zugleich in horizontaler Richtung etwas verschieben. Dabei soll aber ein elastischer Widerstand auftreten, der der Grösse der Ausweichung proportional ist. Man denke sich etwa das obere Ende durch horizontale Zugstangen gehalten, die bei einer Ausweichung des Befestigungspunktes in Spannung gerathen. Man soll die Knickfestigkeit des Stabes berechnen.

Lösung. Die Ausweichung des oberen Endes sei y_0 und von diesem Ende aus seien die Abscissen x gerechnet. Dann tritt hier eine horizontale Kraft H auf, die

$$H = cy_0$$

gesetzt werden kann. Der Factor c hängt von der Elasticität der Zugstangen ab, die das obere Ende halten und ist hier als gegeben zu betrachten. Für den Querschnitt mit der Abscisse x hat man

$$M = Hx + P(y - y_0)$$

und die Gleichung der elastischen Linie lautet

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = - cy_0x - Py + Py_0.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$y = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x - \frac{c}{P} y_0 x + y_0,$$

wenn α dieselbe Bedeutung wie früher hat. Für $x = 0$ muss $y = y_0$ sein; daraus folgt $B = 0$. Ferner ist für $x = l$ sowohl y als $\frac{dy}{dx}$ gleich Null. Dies liefert die Gleichungen

$$0 = A \sin \alpha l - \frac{cy_0 l}{P} + y_0,$$

$$0 = \alpha A \cos \alpha l - \frac{cy_0}{P}.$$

Löst man beide nach A auf, so erhält man

$$A = y_0 \cdot \frac{cl - P}{P \sin \alpha l}; \qquad A = y_0 \cdot \frac{c}{P\alpha \cos \alpha l}.$$

Damit diese Gleichungen mit einander bestehen können, muss

$$\frac{cl - P}{\sin \alpha l} = \frac{c}{\alpha \cos \alpha l}$$

sein. In anderer Form lässt sich diese Bedingungsgleichung auch schreiben

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l - \frac{\alpha P}{c}$$

oder, wenn man P in α ausdrückt,

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l - (\alpha l)^3 \cdot \frac{E\Theta}{c l^3}.$$

Die kleinste Wurzel dieser transcendenten Gleichung, die im einzelnen Falle durch Probieren aufzulösen ist, liefert αl und hiermit die Knicklast P.

Setzt man $c = \infty$, so ist der Stab oben ganz festgehalten und wir kommen damit auf den schon in § 59 ausführlich behandelten Fall. Wenn umgekehrt $c = 0$ gesetzt wird, ist das obere Stabende in horizontaler Richtung frei beweglich und die Gleichung geht über in $\operatorname{tg} \alpha l = \pm \infty$. Diese liefert die Lösung $\alpha l = \frac{\pi}{2}$ und daher

$$P = \frac{\pi^2}{4} \frac{E\Theta}{l^2},$$

wie auch schon in den Eingangssätzen von § 59 durch eine einfache Betrachtung festgestellt worden war.

48. *Aufgabe. Der Querschnitt eines Stabes, der an beiden Enden in Spitzen gelagert ist, sei in der Mitte auf eine Strecke l', die klein gegenüber der ganzen Stablänge ist, durch Einschnitte verschwächt, so dass das kleinste Trägheitsmoment des Querschnitts dadurch von Θ auf Θ' herabgesetzt wird. Man soll die Knickfestigkeit des verschwächten Stabes mit der des unverschwächten vergleichen.*

Lösung. Der Winkel, um den sich die Endquerschnitte des kurzen mittleren Stückes bei gegebenem Biegungsmoment gegen einander verdrehen, ist in dem Verhältnisse $\frac{\Theta}{\Theta'}$ grösser, als wenn der Querschnitt unverändert durchginge. Man denke sich nun einen zweiten Stab von überall gleichem Trägheitsmomente Θ, aber von etwas grösserer Länge, so nämlich, dass das Mittelstück von der Länge l' durch ein solches von der Länge $l' + l''$ ersetzt ist, wenn

$$l'' = \frac{\Theta - \Theta'}{\Theta'} l'$$

genommen wird. Dann würden sich die Endquerschnitte des Mittelstücks dieses Stabes bei gegebenem Biegungsmoment um denselben Winkel gegen einander verdrehen, wie beim verschwächten Stabe. Falls nun das Mittelstück an und für sich kurz ist, wird auch der Biegungspfeil in der Mitte beim zweiten Falle nicht merklich grösser sein als im ersten Falle, wenn die Biegungslinien in den äusseren

Stababschnitten in beiden Fällen mit einander übereinstimmen. Man erkennt daraus, dass die Querschnittsverschwächung in der Mitte so wirkt, als wenn der Querschnitt unverändert geblieben, die Stablänge aber um den vorher berechneten Betrag l'' vergrössert wäre. Danach kann die Knicklast leicht berechnet werden.

Zur Prüfung des hier erörterten Falles habe ich eine grössere Versuchsreihe angestellt, und durch die Versuchsergebnisse wurde ich erst zu der hier gegebenen Lösung geführt. Dabei zeigte sich indessen, wie auch von vornherein zu erwarten war, dass man für l' einen etwas grösseren Werth als die Länge einzusetzen hat, auf die sich die Verschwächung des Stabquerschnitts erstreckt. Auch in den unmittelbar an das Mittelstück angrenzenden Theilen des Stabes kann sich nämlich nicht sofort der volle Querschnitt wirksam erweisen; die an die Lücke angrenzenden Kanten müssen vielmehr ebenfalls zunächst noch spannungslos sein. Bei meinen Versuchen zerknickte ich Winkeleisen, bei denen der Querschnitt durch beiderseitige Einschnitte von 2,5 bis 60 mm Länge (in der Richtung der Stabaxe gemessen) so geschwächt war, dass Θ' nur $1/4$ bis $1/5$ von Θ war. Dabei musste man die Einschnittlänge um 2 bis 4 cm vermehren, um die vorausgehende Rechnung in Uebereinstimmung mit den Versuchsergebnissen zu bringen.

Elfter Abschnitt.

Grundzüge der mathematischen Elasticitätstheorie.

§ 63. Ableitung der Grundgleichungen.

Zwischen den Spannungscomponenten an irgend einer Stelle des Körpers bestehen nach den allgemeinen und jedenfalls streng richtigen Lehren der Statik zunächst nur die im ersten Abschnitte abgeleiteten Gleichungen (4) und (5). Durch die Gleichungen (4) werden die neun Spannungscomponenten auf sechs zurückgeführt und diese sind dann nur noch durch die drei Gleichungen (5) miteinander verbunden. Aus drei Gleichungen kann man aber sechs unbekannte Grössen unter keinen Umständen eindeutig bestimmen; die Aufgabe, die Spannungsvertheilung zu ermitteln, ist daher, wie wir schon früher geschlossen haben, statisch unbestimmt, so lange keine weiteren Angaben hinzutreten. Diese Unbestimmtheit zu heben, haben wir in den vorausgehenden Abschnitten verschiedene Hypothesen zu Grunde gelegt, die nur durch die Berufung auf die Uebereinstimmung der aus ihnen gezogenen Folgerungen mit der Erfahrung gerechtfertigt werden konnten. Wenn nun auch ein solches Verfahren den Ansprüchen, die man vom Standpunkte der praktischen Anwendung an die technische Mechanik stellen kann, ganz wohl genügt, so befriedigt es doch nach anderer Richtung nicht vollständig. Unser Erkenntnissdrang verlangt eine Zurückführung der zusammengesetzteren Erscheinungen auf die einfachsten und möglichst einwandfrei feststellbaren Erfahrungsthatsachen. Diesem Verlangen sucht

die mathematische Theorie der Elasticität zu entsprechen. Sie stellt sich die Aufgabe, die Formänderung und den Spannungszustand eines von gegebenen äusseren Kräften beanspruchten elastischen Körpers ohne Zuhülfenahme besonderer Hypothesen zu berechnen, indem sie sich dabei ausser auf die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen nur noch auf das Elasticitätsgesetz stützt. Für verschiedene Körper ist nun freilich, wie im zweiten Abschnitte auseinander gesetzt wurde, das Elasticitätsgesetz oder der Zusammenhang zwischen den Spannungscomponenten und den Formänderungen von verschiedener Gestalt und im Allgemeinen ist es auch noch keineswegs genau bekannt. Viele der für die praktische Anwendung wichtigsten Stoffe befolgen indessen das Hooke'sche Gesetz und auf diese allein beziehen sich die Entwickelungen der mathematischen Elasticitätstheorie, soweit sie bis heute abgleitet wurden, in aller Strenge.

Dass es überhaupt möglich ist, die gestellte Aufgabe zu lösen, ergibt sich aus folgender Betrachtung. Die elastischen Verschiebungen, die ein Punkt des Körpers mit den Coordinaten $x\,y\,z$ unter dem Einflusse der Belastung erfährt, seien für die Richtungen der Coordinatenaxen mit $\xi\,\eta\,\zeta$ bezeichnet. Da es nicht auf die Bewegungen ankommt, die der Körper etwa als Ganzes erfährt, sondern nur auf die relativen Verschiebungen einzelner Theile des Körpers gegeneinander, wird es sich empfehlen, das Coordinatensystem, auf das die $x\,y\,z$ und die $\xi\,\eta\,\zeta$ bezogen sind, auf dem Körper selbst festzulegen, also etwa so, dass der Ursprung stets mit einem beliebig ausgewählten Punkte des Körpers zusammenfällt, die X-Axe stets durch einen zweiten und die XY-Ebene durch einen dritten Punkt des Körpers geht. Wenn sich der Körper ohne Formänderung nur als Ganzes bewegt, bleiben dann $\xi\,\eta\,\zeta$ in jeder Lage gleich Null; die drei Grössen sind also bei diesen näheren Festsetzungen sehr geeignet, die elastische Formänderung zu beschreiben. Gewöhnlich ist es am bequemsten, den zweiten und dritten der vorher angeführten drei Punkte, die nicht in einer Graden liegen dürfen, deren Auswahl aber sonst beliebig getroffen werden kann, unendlich nahe bei dem ersten anzu-

nehmen. Nach dem Elasticitätsgesetze sind die Spannungscomponenten von den specifischen Formänderungen an der betreffenden Stelle des Körpers abhängig. Wenn $\xi\,\eta\,\zeta$ als Functionen von $x\,y\,z$ bekannt und hiermit die elastische Formänderung, die der Körper erfährt, in allen Einzelheiten gegeben wäre, könnte man nach dem Elasticitätsgesetze auch die Spannungscomponenten an jeder Stelle des Körpers angeben. Jedenfalls ist es also möglich, alle Spannungscomponenten in den drei unbekannten Verschiebungscomponenten $\xi\,\eta\,\zeta$ auszudrücken. Damit werden aber die sechs unbekannten Grössen des Problems auf drei zurückgeführt, zu deren Ermittelung die durch die drei Gleichungen (5) ausgesprochenen Gleichgewichtsbedingungen im Zusammenhange mit den Grenzbedingungen an der Oberfläche des Körpers gerade hinreichen.

In einem Falle haben wir von diesem Verfahren in der That schon Gebrauch gemacht, nämlich bei der Untersuchung der dickwandigen Röhren in § 50. In der That handelte es sich dort nur um einen besonders einfachen Fall, der nach den Methoden der mathematischen Elasticitätstheorie, ohne dass von diesen bis dahin die Rede war, sofort vollständig gelöst werden konnte. Dasselbe Verfahren ist jetzt ganz allgemein auszuarbeiten und wer sich mit jener früheren Untersuchung hinreichend vertraut gemacht hat, wird nun mit geringer Mühe den Erweiterungen der dort durchgeführten Betrachtung, um die es sich hier handelt, folgen können. Darin besteht ja überhaupt der grosse Vorzug des Ganges von den einfacheren Erscheinungen zu den verwickelteren, dass man von vornherein ein ungefähres Bild davon besitzt, was man zu erwarten hat und nahezu errathen kann, welche Wege der Vortrag einschlagen wird. Deshalb habe ich diese allgemeineren Betrachtungen an das Ende meiner Vorlesungen und nicht, wie es in den von den Mathematikern ausgearbeiteten Lehrbüchern zu geschehen pflegt, an den Anfang gestellt. Darin würde nur eine nutzlose, dem Verständnisse der Sache aber sehr gefährliche Erschwerung liegen.

Die elastischen Verschiebungen $\xi\,\eta\,\zeta$ sollen als sehr klein

im Vergleiche zu den Abmessungen des Körpers im natürlichen Zustande, also gegenüber den Coordinaten $x y z$, betrachtet werden, wie es ja den thatsächlichen Verhältnissen gewöhnlich entspricht. Wir wollen zunächst die specifischen Dehnungen $\varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z$ in den Richtungen der Coordinatenaxen ausdrücken. Zu diesem Zwecke betrachten wir zwei Punkte, die ursprünglich um dx auseinander lagen. Die Coordinaten dieser beiden Punkte im natürlichen Zustande sollen also

$$x,\ y,\ z \quad \text{und} \quad x + dx,\ y,\ z$$

gewesen sein. Nach der Formänderung gehen sie über in

$$x + \xi,\ y + \eta,\ z + \zeta$$

und

$$x + dx + \xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx, \quad y + \eta + \frac{\partial \eta}{\partial x} dx, \quad z + \zeta + \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx,$$

wobei darauf zu achten war, dass sich $\xi \eta \zeta$ um die angegebenen Differentiale ändern, wenn man zum Nachbarpunkte weiter rückt.

Aus der Strecke dx ist also durch die Formänderung die Strecke $dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$ geworden. Unter Benutzung unserer früheren Schreibweise haben wir also für die elastische Aenderung Δdx der Strecke dx

$$\Delta dx = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx.$$

Die specifische Dehnung ε_x ist aber das Verhältniss zwischen Δdx und der ursprünglichen Länge dx, also finden wir die erste der drei folgenden Gleichungen

$$\varepsilon_x = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial \zeta}{\partial z}. \tag{285}$$

Die beiden anderen folgen auf demselben Wege, wenn man die Schicksale einer in der Richtung der Y-Axe gezogenen Strecke dy oder einer in der Richtung der Z-Axe gezogenen Strecke dz verfolgt.

Eine ganz ähnliche Betrachtung liefert uns auch den Ausdruck für die kleine elastische Aenderung γ_{xy}, die der ursprünglich rechte Winkel zwischen zwei Strecken dx und dy erfährt, die von dem Punkte $x y z$ in den Richtungen der

X- und der Y-Axe gezogen wurden. Um die Grösse dieses Winkels nach der Formänderung mit der ursprünglichen zu vergleichen, denke ich mir den einen Winkel parallel verschoben, so dass beide Scheitel zusammenfallen. So sind sie sie in Abb. 70 gezeichnet. Wir brauchen dabei nur auf die kleinen Abweichungen jedes Schenkels in der Richtung des anderen Schenkels zu achten, denn wenn auch ein Schenkel in einer Richtung senkrecht zur Ebene der Abb. 70 ein wenig abgelenkt wird, so trägt dies zur Winkeländerung nichts bei; eine solche Ablenkung, die etwa der in der Richtung der X-Axe verlaufende Schenkel erfährt, kommt nämlich auf eine Drehung des Winkels um die Y-Axe hinaus, die zu keiner Aenderung der Grösse des Winkels führt. Auch die specifische Dehnung in der Richtung der X-Axe kann keinen Beitrag zur Winkeländerung γ_{xy} liefern. Wir brauchen also nur darauf zu achten, dass sich der Endpunkt der Strecke dx relativ zum Anfangspunkte um eine kleine Strecke in der Richtung der Y-Axe verschoben hat, die wir schon vorher zu $\frac{\partial \eta}{\partial x} dx$ berechnet haben und dass sich ebenso der Endpunkt von dy um $\frac{\partial \xi}{\partial y} dy$ gegen den Winkelscheitel in der Richtung der X-Axe verschoben hat. Die Beträge beider Ablenkungen sind in Abb. 70 eingeschrieben. Zugleich sehen wir noch, dass der ursprünglich rechte Winkel in einen spitzen übergeht, wenn beide Differentialquotienten positiv sind.

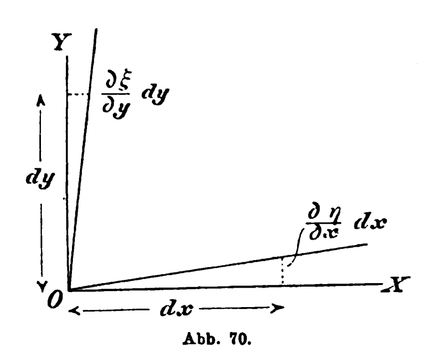


Abb. 70.

Die Richtungsänderungen sind sehr klein; wir können daher die zugehörigen Winkel in Bogenmaass gleich ihren trigonometrischen Tangenten setzen. Die Richtungsänderung von dx trägt daher $\frac{\partial \eta}{\partial x}$ zu γ_{xy} bei und ähnlich ist es mit dy. Im Ganzen haben wir daher

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

und diese Formel ist als streng richtig zu betrachten, falls $\xi \eta \zeta$ unendlich klein gegenüber $x y z$ sind. Diese Voraussetzung trifft nun freilich bei der wirklichen Formänderung eines elastischen Körpers nicht absolut genau zu; sie ist aber in der Regel immerhin nahezu erfüllt und man sieht ein, dass ein Fehler, der etwa hieraus entspringen könnte, gewöhnlich gar nicht in Betracht kommen wird. — Natürlich lässt sich dieselbe Betrachtung auch für die Winkeländerungen zwischen den Richtungen von dx und dz und von dy und dz wiederholen. Es ist aber gar nicht nöthig, dies wirklich auszuführen, da keine Coordinatenrichtung vor der anderen etwas voraus hat, so dass sich das vorige Resultat ohne Weiteres auch auf γ_{xz} und γ_{yz} übertragen lässt. Mit Wiederholung der vorigen Formel haben wir daher den Gleichungssatz

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}; \; \gamma_{xz} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \; \gamma_{yz} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \qquad (286)$$

Ausserdem soll noch die specifische Volumenänderung berechnet werden, die der Körper an der betrachteten Stelle erfährt. Man denke sich ein rechtwinkliges Parallelepiped von den Kantenlängen dx, dy, dz. Mit diesem denken wir uns zuerst die Winkeländerungen γ_{xy} u. s. f. zwischen den Kanten vorgenommen. Wenn γ_{xy} endliche Grössen wären, würde dadurch das Volumen geändert. So würde z. B. die Rechteckfläche $dx \cdot dy$ in ein Parallelogramm von der Fläche

$$dx \cdot dy \cdot \cos \gamma_{xy}$$

übergehen. Wenn γ_{xy} klein von der ersten Ordnung ist, weicht aber der Cosinus dieses Winkels nur um eine Grösse zweiter Ordnung von der Einheit ab. Die Aenderung des Volumens durch diese Richtungsänderungen kann daher vernachlässigt werden; streng ist dies freilich auch wieder nur dann zulässig, wenn $\xi \eta \zeta$ wirklich unendlich klein sind.

Hierauf sollen die Kantenlängen um Δdx u. s. f. geändert werden. Dadurch tritt eine Aenderung des Volumens ein, die

im Vergleiche zum ursprünglichen Volumen nur von der ersten Ordnung klein ist. Diese Aenderung kommt daher allein in Betracht. Das Volumen nach der Streckung der Kanten ist

$$dx(1+\varepsilon_x)\,dy(1+\varepsilon_y)\,dz(1+\varepsilon_z)$$

oder, wenn wir ausmultipliciren und die kleinen Grössen höherer Ordnung fortlassen

$$dx\,dy\,dz(1+\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z).$$

Als specifische Volumenänderung e bezeichnen wir das Verhältniss zwischen der Aenderung des Volumens und dem ursprünglichen Volumen und wir haben daher

$$e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z$$

oder nach den Gl. (285)

$$e=\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}. \tag{287}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir jetzt auch die Spannungscomponenten in $\xi\,\eta\,\zeta$ ausdrücken. Am einfachsten gelingt dies mit den Schubspannungen, denn nach Gl. (12), die wegen des Superpositionsgesetzes ohne Weiteres auf unseren Fall übertragen werden kann, ist z. B.

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G}$$

und mit Rücksicht auf die Gl. (286) erhalten wir daher

$$\left.\begin{aligned}\tau_{xy}=\tau_{yx}=G\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}+\frac{\partial\eta}{\partial x}\right);\quad \tau_{xz}=\tau_{zx}=G\left(\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right);\\ \tau_{yz}=\tau_{zy}=G\left(\frac{\partial\eta}{\partial z}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right).\end{aligned}\right\} \tag{288}$$

Nach dem Hooke'schen Elasticitätsgesetze bestehen zwischen den specifischen Dehnungen und den Normalspannungen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}E\varepsilon_x&=\sigma_x-\frac{1}{m}(\sigma_y+\sigma_z)\\ E\varepsilon_y&=\sigma_y-\frac{1}{m}(\sigma_x+\sigma_z)\\ E\varepsilon_z&=\sigma_z-\frac{1}{m}(\sigma_x+\sigma_y)\end{aligned}\right\}. \tag{289}$$

Wenn wir sie addiren und für die Summe der specifischen Dehnungen die specifische Volumenänderung e einführen, erhalten wir daraus

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \frac{m}{m-2} Ee. \tag{290}$$

Die erste der vorausgehenden Gleichungen lässt sich aber schreiben

$$E\varepsilon_x = \frac{m+1}{m}\sigma_x - \frac{1}{m}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{m+1}{m}\sigma_x - \frac{Ee}{m-2}$$

und deren Auflösung nach σ_x liefert

$$\sigma_x = \frac{mE}{m+1}\left(\varepsilon_x + \frac{e}{m-2}\right). \tag{291}$$

Man kann diesen Ausdruck noch etwas vereinfachen, wenn man sich erinnert, dass nach Gl. (34)

$$G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

gesetzt werden kann. — Die Gl. (289) waren für $\sigma_x\, \sigma_y\, \sigma_z$ ganz symmetrisch gebaut; wir können daher die Lösung (291) ohne weitere Bemühungen sofort auch auf die beiden anderen Unbekannten σ_y und σ_z übertragen. Mit Benutzung der angeführten Vereinfachung und mit Rücksicht auf die Gl. (285) erhalten wir daher die Ausdrücke für die Normalspannungscomponenten

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_y &= 2G\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_z &= 2G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{292}$$

Damit ist die Aufgabe, die wir uns zunächst gestellt hatten, gelöst. Wir haben jetzt die unbekannten Spannungscomponenten auf nur noch drei unbekannte Grössen $\xi\, \eta\, \zeta$ zurückgeführt und es bleibt uns nur noch übrig, diese Ausdrücke in die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen, die durch die Gl. (5) ausgesprochen werden, einzusetzen.

Die Gl. (5) lauteten

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0.$$

Durch Einsetzen der durch die Gl. (288) und (292) gegebenen Werthe geht die erste von ihnen über in

$$2G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{1}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x}\right) + G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}\right) + G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z}\right) + X = 0.$$

Um diese auf eine übersichtlichere Form zu bringen, nehmen wir noch einige kleine Aenderungen mit ihr vor. Zunächst erhält man durch Division mit G und etwas geänderte Zusammenfassung der einzelnen Glieder

$$\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial z}\right) + \frac{2}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0.$$

Für die drei in der ersten Klammer zusammengefassten Glieder benutzen wir eine in der mathematischen Physik sehr häufig gebrauchte Bezeichnung. Es macht sich nämlich fast in allen physikalischen Theorien nöthig, von den unbekannten Functionen, die in ihnen auftreten, die Summe der drei zweiten Differentialquotienten nach den drei Axenrichtungen zu nehmen. Zuerst geschah dies in der Potentialtheorie von Laplace. Man bezeichnet daher die Rechenvorschrift, die Summe dieser drei zweiten Differentialquotienten nach den Axenrichtungen zu bilden, als die Laplace'sche Operation. Um diese Rechenvorschrift anzugeben, setzen wir vor die Function, auf die sie Anwendung finden soll, das Zeichen ∇^2. Oft wird dafür auch nur einfach Δ geschrieben; wegen des Zusammenhangs mit anderen Lehren, auf die es hier nicht weiter ankommt, entscheide ich mich aber für das zuerst genannte

Zeichen. Um kurz anzudeuten, was ich eben ausführlicher auseinandersetzte, kann man

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{293}$$

schreiben. Natürlich ist dies in solcher Form noch keine Gleichung im eigentlichen Sinne; man hat vielmehr in Gedanken überall hinter die Operationszeichen die Veränderlichen zu setzen, auf die sich die Operationen beziehen sollen.

Ich komme jetzt zu den in der zweiten Klammer zusammengefassten Gliedern der vorausgehenden Gleichung. Jedes dieser Glieder ist ein Differentialquotient nach x und ihre Summe kann daher gleich

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\right) \text{ oder gleich } \frac{\partial e}{\partial x}$$

gesetzt werden. Diese Summe kann daher mit dem nächstfolgenden Gliede der Gleichung zusammengefasst werden. Hiermit nimmt die Gleichung, die die Gleichgewichtsbedingung zwischen den Spannungen gegen ein Verschieben nach der X-Richtung ausspricht, die übersichtlichere Form an

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} = 0 \\ \nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial y} + \frac{Y}{G} = 0 \\ \nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial z} + \frac{Z}{G} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{294}$$

Ich habe sofort die für die beiden anderen Coordinatenrichtungen geltenden Gleichungen hinzugefügt, die genau auf dieselbe Weise gefunden werden wie die erste.

Die Gl. (294) bilden die Ausgangsgleichungen für alle ferneren Untersuchungen der mathematischen Elasticitätstheorie. Ich möchte noch einmal betonen, dass sie nichts anderes sind, als die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben, die früher in den Gl. (5) ihren Ausdruck gefunden hatten. In der neuen Form sieht man den Gl. (294) ihre physikalische Bedeutung nicht so leicht an; es ist aber durchaus nöthig, dass man sich diesen Sinn der Gleichungen stets

vor Augen hält und es ist daher sehr anzurathen, dass man sich die vorausgegangene Ableitung so lange genau im Einzelnen überlegt, bis man nicht mehr darüber im Zweifel sein kann.

Schliesslich bemerke ich noch, dass man die drei Componentengleichungen (294) auch zu einer einzigen Gleichung zwischen gerichteten Grössen zusammenfassen kann, deren physikalische Bedeutung dann darauf hinausläuft, dass die geometrische Summe aller an dem Umfang eines Körperelements auftretenden Spannungen gleich Null sein muss. Wird nämlich die Verschiebung des Punktes xyz der Grösse und Richtung nach mit $\mathfrak{v}$ bezeichnet, so also, dass $\xi \eta \zeta$ die Componenten von $\mathfrak{v}$ sind, ferner die äussere Kraft mit $\mathfrak{P}$, so gehen die Gl. (294) über in

$$\nabla^2 \mathfrak{v} + \frac{m}{m-2} \nabla e + \frac{\mathfrak{P}}{G} = 0. \tag{295}$$

Ich mache von dieser Form in der Folge nicht Gebrauch und will mich daher nicht damit aufhalten, die Bedeutung des Zeichens ∇ noch näher, als schon aus dem Zusammenhange hervorgeht, zu erklären. In der Dynamik wird dies geschehen. Auch nur ganz gelegentlich erwähne ich für Leser, die schon näher mit der mathematischen Physik auf anderen Gebieten (namentlich mit der Electricitätslehre) vertraut sind, dass Gl. (295) auch noch

$$\nabla^2 \mathfrak{v} + \frac{m}{m-2} \nabla \operatorname{div} \mathfrak{v} + \frac{\mathfrak{P}}{G} = 0 \tag{296}$$

geschrieben werden kann. Obschon ich übrigens in diesen Vorlesungen von dem Rechnen mit gerichteten Grössen keinen Gebrauch gemacht habe, wird man doch schon bei einem einfachen Vergleiche der Gl. (295) oder (296) mit (294) begreiflich finden, dass es Leute gibt — zu denen ich gehöre — die es als einen Fortschritt der Theorie betrachten, wenn mit den gerichteten Grössen unmittelbar gerechnet wird, anstatt dass man jede einzelne Thatsache durch drei verschiedene Gleichungen zum Ausdruck bringt.

§ 64. Wellenbewegungen in elastischen Körpern.

Bei den meisten Aufgaben der Festigkeitslehre spielt die auf die Masse des Körpers übertragene Fernkraft $\mathfrak{P}$ mit den Componenten $X\,Y\,Z$ gar keine Rolle. Gewöhnlich besteht sie nur aus dem Gewichte des Körpers und häufig genug würde sich der Spannungszustand kaum merklich ändern, wenn der Körper ganz gewichtslos wäre und nur die an der Oberfläche übertragenen äusseren Kräfte an ihm wirkten. In solchen Fällen vereinfachen sich die Gl. (294) bis (296) entsprechend, indem die letzten Glieder auf der linken Seite fortfallen. Mit derartigen Fällen werde ich mich in den folgenden Paragraphen ausschliesslich beschäftigen; hier soll aber auf eine Anwendung der Gl. (294) aufmerksam gemacht werden, bei der diese Glieder beibehalten werden müssen.

Wenn der Körper nicht im Gleichgewichte, sondern in ungleichförmiger Bewegung begriffen ist, müssen sich die an dem Umfange eines Körperelementes übertragenen Spannungen sammt dem Gewichte des Elementes zu einer Resultirenden zusammensetzen, die nach dem dynamischen Grundgesetze aus der Beschleunigung des Elementes berechnet werden kann. Ein rechtwinkliges Parallelepiped von den Kantenlängen $dx\,dy\,dz$ hat die Masse

$$\mu\,dx\,dy\,dz,$$

wenn mit μ die specifische Masse (das specifische Gewicht, getheilt durch die Beschleunigung der Schwere) bezeichnet wird. Die elastischen Verschiebungen $\xi\,\eta\,\zeta$ sollen jetzt nicht nur Functionen des Ortes, sondern auch Functionen der Zeit t sein. Die Componenten der Beschleunigung, die das Körperelement in einem gegebenen Augenblicke erfährt, werden durch die Differentialquotienten

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}$$

dargestellt und die Resultirende aller an dem Körperelement angreifenden Kräfte muss nach dem dynamischen Grundgesetze die Componenten

$$\mu \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} dx\, dy\, dz,\ \mu \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} dx\, dy\, dz,\ \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} dx\, dy\, dz$$

haben. Anstatt die Aussage in dieser Form zu machen, kann man sich auch eine Kraft an jedem Körperelemente zugefügt denken, deren Componenten den vorher angegebenen entgegengesetzt sind. Die wirklich vorhandenen Kräfte mit Einschluss dieser willkürlich zugefügten müssen dann im Gleichgewichte stehen. Das ist die Ueberlegung, nach der man jeden Fall der Bewegung auf einen Gleichgewichtsfall zurückführen kann. In der Dynamik wird davon weiter die Rede sein; ich will aber jetzt schon erwähnen, dass man eine solche Schlussweise mit dem Namen des d'Alembert'schen Princips bezeichnet.

Die willkürlich zugefügte Kraft, durch die wir den Fall auf einen Gleichgewichtsfall zurückführen, ist wie das Gewicht und wie andere Fernkräfte dem Volumen des Körperelementes proportional. Es ist daher am einfachsten, wenn wir sie unmittelbar mit $\mathfrak{P}$, oder ihre Componenten mit $X\,Y\,Z$ vereinigen. Man hat dann nur den Factor $dx\, dy\, dz$ von den vorausgehenden Ausdrücken zu streichen, um die Kraft auf die Volumeneinheit zu beziehen und die zurückbleibenden Factoren mit gewechseltem Vorzeichen zu X bezw. Y oder Z zu addiren.

Gegenüber diesen nach dem d'Alembert'schen Princip zugefügten Massenkräften, die bei schnellen Schwingungen sehr gross werden können, ist das Eigengewicht des Körperelements gewöhnlich unbedeutend. Dieses hat übrigens ohnehin auf die elastischen Schwingungen, die wir untersuchen wollen, keinen Einfluss, da es keinem periodischen Wechsel unterworfen ist, sondern stets unter den gleichen Bedingungen und in gleicher Richtung und Grösse auf den Körper einwirkt. Wir können uns daher den Körper ebenso gut auch als gewichtslos — aber nicht als masselos! — denken, d. h. wir können uns ihn etwa auf den Mond oder an eine andere Stelle mit noch kleinerer Beschleunigung der Schwere versetzt denken, ohne dass sich an den elastischen Bewegungen etwas ändern würde, vorausgesetzt, dass nur alle übrigen Bedingungen ungeändert blieben.

Dann bleibt als Massenkraft nur die Kraft $-\mu\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$ in der Richtung der X-Axe u. s. f. zurück und die Gl. (294) nehmen die Form an

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\xi+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x}=\frac{\mu}{G}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}\\ \nabla^2\eta+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial y}=\frac{\mu}{G}\frac{\partial^2\eta}{\partial t^2}\\ \nabla^2\zeta+\frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial z}=\frac{\mu}{G}\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}\end{aligned}\right\}. \qquad (297)$$

Diese Gleichungen sprechen das Gesetz aus, nach dem sich eine elastische Formänderung im Verlaufe der Zeit innerhalb eines elastischen Körpers ausbreiten muss. Wir wissen schon aus der Erfahrung, dass dies in Form einer Welle geschieht; eine besondere Art dieser Wellen kennen wir als die Schallwellen. Wir wollen zunächst sehen, was aus den Gl. (297) über die Schallwellen zu schliessen ist.

Betrachten wir eine ebene Schallwelle, die sich in der Richtung der X-Axe ausbreitet und erinnern wir uns, dass nach den Lehren der Experimentalphysik die Schallbewegung als eine periodische Bewegung aufzufassen ist, die bei einem einfachen Tone als eine Sinusfunction der Zeit dargestellt werden kann, so werden wir zu der Ansicht geführt, dass

$$\xi=A\sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{t}{\tau}\right);\quad \eta=0,\quad \zeta=0 \qquad (298)$$

eine mögliche Schwingungsform des elastischen Körpers darstellen müsse. Wenn ich vorher sagte, dass die Sinusfunction aus den Versuchen zu entnehmen wäre, so ist damit natürlich nur gemeint, dass sich die Versuchsergebnisse ungefähr so darstellen lassen. Ob der gewählte Ansatz genau richtig ist, kann erst geschlossen werden, indem man prüft, ob er die Gl. (297) erfüllt. Im Uebrigen bemerke ich noch zu den Constanten, die in den Ausdruck für ξ aufgenommen wurden, dass A den grössten Werth darstellt, den ξ während der Schwingung erreicht; man nennt A die Amplitude oder den Ausschlag der Schwingung. Die Constante λ hat die Bedeutung der Wellenlänge der Schwingung, denn wenn man x um λ vermehrt,

ohne die Zeit zu ändern, vergrössert sich der Winkel, von dem der Sinus genommen werden soll, um 2π, die frühere Werthreihe des Sinus wiederholt sich also von diesem Punkte an wieder, wenn wir darüber hinausgehen. Ebenso hat τ die Bedeutung der Dauer einer vollen Schwingung, da die Aenderung von t um τ oder um ein Vielfaches davon nichts an dem Sinus oder an ξ ändert. Denkt man sich gleichzeitig x und t ein wenig vermehrt, so kann ξ denselben Werth beibehalten; man sagt dann, die Welle habe sich in der Zeit Δt um die Strecke Δx fortbewegt. In der That finden sich nach Δt alle Zustände (alle Phasen, wie man zu sagen pflegt) in derselben Aufeinanderfolge, aber um die Strecke Δx in der Richtung der X-Axe verschoben, wieder, falls nur

$$\frac{\Delta x}{\lambda} - \frac{\Delta t}{\tau} = 0$$

ist. Man kann nun auch von der Geschwindigkeit reden, mit der sich die Welle fortpflanzt. Dabei muss man nur beachten, dass hier nicht, wie sonst in der Mechanik, darunter die Bewegung eines Körpers, also etwa die Bewegung gemeint ist, die das Volumenelement im gegebenen Augenblicke ausführt, sondern nur die Geschwindigkeit, mit der ein gewisser genau definirbarer Zustand fortschreitet. Bezeichnet man die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Schallbewegung mit v, so ist v bestimmt durch

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

oder, wenn man das Verhältniss der Werthe Δx und Δt aus der vorausgehenden Gleichung entnimmt,

$$v = \frac{\lambda}{\tau}. \tag{299}$$

Nach diesen Vorbemerkungen müssen wir prüfen, ob der durch die akustischen Erscheinungen nahegelegte Ansatz (298) die Gl. (294) befriedigt. Dabei ist wohl zu bedenken, dass diese Gleichungen auf allgemeinen Gesetzen der Mechanik, an deren strenger Gültigkeit kein Zweifel bestehen kann und ausserdem nur noch auf dem Hooke'schen Elasticitätsgesetze

beruhen. Sofern auch dieses letzte bei dem betreffenden Stoffe erfüllt ist, können wir den Ergebnissen der Gleichungen (294) unbedingtes Vertrauen entgegenbringen. — Wir bilden zunächst die specifische Volumenänderung e. Durch Einsetzen der Werthe (298) in Gl. (287) finden wir

$$e = A\frac{2\pi}{\lambda}\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right)$$

und hiermit werden die Differentialquotienten von e

$$\frac{\partial e}{\partial x} = -A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right); \quad \frac{\partial e}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial e}{\partial z} = 0.$$

Die zweite und dritte der Gleichungen (294) sind erfüllt, da sich jedes der in ihnen vorkommenden Glieder auf Null reducirt. Ferner ist nach (298)

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = A\frac{2\pi}{\lambda}\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right); \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = 0.$$

Daher reducirt sich in diesem Falle $\nabla^2 \xi$ auf

$$\nabla^2 \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = -A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right),$$

d. h. auf denselben Werth wie $\frac{\partial e}{\partial x}$. Auch nach t lässt sich ξ ohne Weiteres differentiiren und wenn man diese Werthe alle in die erste der Gl. (297) einsetzt, geht sie über in

$$-\frac{2m-2}{m-2}A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right) = -\frac{\mu}{G}A\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \sin 2\pi\left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right).$$

Man sieht, dass diese Gleichung in der That identisch erfüllt ist, ohne Rücksicht auf den Werth der Amplitude A, d. h. der Stärke des Schalls, falls nur die Bedingungsgleichung

$$\frac{2m-2}{m-2}\cdot\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{\mu}{G}\cdot\left(\frac{1}{\tau}\right)^2$$

zwischen Wellenlänge λ und Schwingungsdauer τ befriedigt ist. Beide müssen nothwendig von einander abhängen und zwar so, dass das Verhältniss $\frac{\lambda}{\tau}$ oder die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v unabhängig von der Wellenlänge und nur

von den physikalischen Eigenschaften des Stoffs abhängig ist. Durch Auflösen der Gleichung nach $\frac{\lambda}{\tau}$ erhält man

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\frac{G}{\mu} \cdot \frac{2m-2}{m-2}}. \tag{300}$$

Diese Folgerung der Theorie ist nun in der That in bester Uebereinstimmung mit der Erfahrung; namentlich der Schluss, dass lange und kurze Wellen ebenso wie schwache oder starke Wellen mit derselben Geschwindigkeit fortgepflanzt werden müssen, hat sich bisher vollständig bewährt.

Natürlich gilt diese ganze Ableitung nur für die Schallwellen in den elastischen festen Körpern; für die Schallwellen in der Luft lässt sich eine ähnliche Entwickelung anstellen, die ebenfalls zu einer mit Gl. (300) verwandten Gleichung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v führt. — Nimmt man für Flusseisen $m = \frac{10}{3}$; $G = 850000$ atm und das specifische Gewicht $= 7{,}7$, d. h. die specifische Masse

$$\mu = \frac{0{,}0077 \text{ kg}}{1 \text{ cm}^3 \cdot 981 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}} = 785 \cdot 10^{-8} \frac{\text{kg sec}^2}{\text{cm}^4},$$

so wird

$$v = \sqrt{\frac{850000 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}}{785 \cdot 10^{-8} \frac{\text{kg sec}^2}{\text{cm}^4}} \cdot 3{,}5} = 616 \, . \, 10^3 \frac{\text{cm}}{\text{sec}} = 6160 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Die Schallgeschwindigkeit in der Luft ist bekanntlich $333 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$. Die im Flusseisen haben wir fast 20mal so gross berechnet. In der That zeigt aber auch der Versuch, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in festen Körpern viel grösser ist als in der Luft.

Der Umstand, dass die Fortpflanzungsgesetze für den Schall auch bei Steinen, Mauerwerk u. s. f. ganz gut mit den aus dem Hooke'schen Gesetze abgeleiteten Folgerungen übereinstimmen, gibt den stärksten Grund für die Vermuthung ab, dass auch diese Körper bei sehr kleinen elastischen Formänderungen, wie

sie bei Schallschwingungen vorkommen, ziemlich genau dem Hooke'schen Gesetze gehorchen, obschon sie bei grösseren Formänderungen erheblich davon abweichen. Wer die Versuchswerthe in ein empirisches Elasticitätsgesetz für solche Körper zusammenfassen will, sollte diesen Satz wohl im Auge behalten; die im zweiten Abschnitt behandelte Formel von Schüle verstösst gegen diesen Satz und wenn man sie trotzdem aufrecht erhalten will, ist man den Nachweis schuldig, dass auch unter der Voraussetzung dieses Gesetzes Schallschwingungen zu Stande kommen könnten, die den Beobachtungen nicht widersprechen. Die Rechnung dürfte ja wohl, wenn sie in geschickter Weise angestellt wird, keine zu grossen Schwierigkeiten bereiten.

Setzt man in Gl. (300) $m = 2$, so liefert sie $v = \infty$. Wir sahen schon früher (siehe S. 59), dass m nie kleiner als 2 werden kann, und dass bei $m = 2$ der Körper keine Volumenänderungen unter dem Einflusse des Spannungszustandes erfährt, dass er also unzusammendrückbar ist. In einem unzusammendrückbaren (raumbeständigen) Körper würde sich also eine longitudinale Welle, wie wir sie jetzt behandelten, mit unendlich grosser Geschwindigkeit fortpflanzen, d. h. von einer eigentlichen Wellenbewegung könnte gar nicht mehr die Rede sein, sondern nur von einer augenblicklichen Uebertragung der an einer Stelle hervorgebrachten Störung über den ganzen Raum, den der Körper einnimmt.

Ausser den longitudinalen kommen in der Physik noch die transversalen Wellenbewegungen vor. Um eine Transversalwelle analytisch darzustellen, setze ich

$$\xi = A \sin 2\pi\left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right); \quad \eta = 0; \quad \zeta = 0. \tag{301}$$

Die Schwingungen erfolgen hier immer noch, wie bei den Gl. (298), in der Richtung der X-Axe; dagegen fällt der Wellenzug jetzt in die Richtung der Y-Axe. Weil die Schwingungsrichtung senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der Welle steht, wird die Welle als Transversalwelle bezeichnet. Für die Constanten A, λ und τ gelten dieselben Bemerkungen wie

vorher; namentlich ist auch hier immer noch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v

$$v = \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\tau}.$$

Wir überzeugen uns, ob der Ansatz (301) die Gleichungen (297) erfüllt. Für e erhalten wir hier

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0.$$

Die Transversalwellen haben also die Eigenthümlichkeit, dass sie ohne Aenderung des specifischen Volumens vor sich gehen. Die longitudinalen Wellen werden daher im Gegensatze zu ihnen auch als Compressionswellen bezeichnet. Ein unzusammendrückbarer Körper, wie man sich bei der Elasticitätstheorie des Lichts den Lichtäther dachte, kann daher wohl transversale, aber keine longitudinalen Wellen fortpflanzen. Damit stimmte überein, dass das Licht aus den Polarisationserscheinungen als transversale Wellenbewegung erkannt wurde. Im Sinne dieser älteren theoretischen Optik beschrieben die Gleichungen (301) einen einfarbigen, eben polarisirten Lichtstrahl; einfarbig, weil nur Schwingungen von derselben Wellenlänge λ vorkommen und eben polarisirt, weil die Schwingungen nur in der Richtung der X-Axe oder, wie man auch sagen kann, in der XY-Ebene erfolgen. Als Polarisationsebene wurde nach der Theorie von Fresnel die XZ-Ebene, nach der Neumannschen dagegen die XY-Ebene selbst angesehen. Mit Rücksicht auf $e = 0$ vereinfachen sich für die Transversalwellen die Gleichungen (297) zu

$$\nabla^2 \xi = \frac{\mu}{G}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}; \quad \nabla^2 \eta = \frac{\mu}{G}\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2}; \quad \nabla^2 \zeta = \frac{\mu}{G}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \qquad (302)$$

und diese bilden die Grundlage der theoretischen Optik und zwar nicht nur der älteren, sondern auch der neueren elektromagnetischen Lichttheorie. Merkwürdigerweise führt nämlich die letztgenannte Theorie von ganz verschiedenen Ausgangspunkten doch zu fast genau denselben Gleichungen wie die Elasticitätstheorie. Die Gleichungen (302) sind daher auch allgemein unter dem Namen der Wellengleichungen bekannt.

Durch den Ansatz (301) sind die beiden letzten der Wellengleichungen ohne Weiteres befriedigt. Für die in der ersten vorkommende Grösse $\nabla^2 \xi$ erhalten wir

$$\nabla^2 \xi = \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -A\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \sin 2\pi\left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right)$$

und ebenso

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -A\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 \sin 2\pi\left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right).$$

Die Wellengleichungen sind also identisch erfüllt, wenn

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \frac{\mu}{G}\left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2$$

gesetzt wird und daraus folgt für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_t der Transversalwellen

$$v_t = \sqrt{\frac{G}{\mu}}. \tag{303}$$

Diese ist also immer kleiner als die Fortpflanzung der Schallwellen. Flüssigkeiten können keine Transversalwellen, sondern nur longitudinale Wellen fortleiten; so kommt es, dass die Transversalschwingungen der gewöhnlichen festen elastischen Körper zu keinen Sinnesempfindungen Anlass geben, weil sie durch die Luft nicht zu den Sinnesorganen (also etwa zum Ohre) fortgepflanzt werden.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes ist der Grösse nach bekannt. Als man früher noch annahm, dass das Licht eine den Elasticitätsgesetzen gewöhnlicher fester Körper gehorchende Wellenbewegung des Lichtäthers sei, konnte man daher Gl. (303) benutzen, um die specifische Masse des Aethers zu berechnen, vorausgesetzt, dass der Schubelasticitätsmodul G auf anderem Wege gefunden wurde. Zu einer Schätzung dieser Art gab es nun in der That einen Weg. Man weiss z. B., wie viel Energie bei klarem Wetter der Erde von der Sonne in der Secunde zugestrahlt wird. Diese Energie legt, ehe sie bei uns ankommt, den ganzen Weg zwischen Sonne und Erde zurück und ist in der Zwischenzeit theils als Formänderungsarbeit theils als lebendige Kraft im Aether aufgespeichert. Für die specifische Formänderungsarbeit hat man

aber nach Gl. (45) $\frac{\tau^2}{2G}$, wofür auch $\frac{1}{2}G\gamma^2$ geschrieben werden kann. Sobald man daher die Winkeländerung γ zu messen oder wenigstens zu schätzen vermochte, konnte man auch die Grössen G und μ ableiten. Die hiernach vorgenommenen Schätzungen führten stets zu äusserst kleinen Werthen für die specifische Masse des Aethers und man erblickte darin einen Grund für die Zulässigkeit der ganzen Theorie. Seit man den Zusammenhang der optischen mit den elektromagnetischen Erscheinungen erkannt und experimentell nachgewiesen hat, kommt indessen allen diesen Betrachtungen nur noch ein historischer Werth zu.

§ 65. Die Eindeutigkeit der Lösung des Problems.

Bei allen folgenden Untersuchungen nehme ich an, dass die Körper in Ruhe sind und dass das Eigengewicht jenes Körpers, dessen Spannungs- und Formänderungszustand untersucht werden soll, unerheblich gegenüber den Lasten ist, die an seiner Oberfläche auf ihn übertragen werden. Diese Lasten sind ausserdem überall als gegeben zu betrachten.

Man nehme nun an, dass irgend ein System von Verschiebungen $\xi\eta\zeta$ vorgeschlagen sei, von dem sich nachweisen lässt, dass es die Grundgleichungen befriedigt. Diese Grundgleichungen selbst lassen sich hier übrigens mit Rücksicht auf die ausgesprochene Voraussetzung in der einfacheren Form

$$\left.\begin{aligned}\nabla^2\xi + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} = 0\\ \nabla^2\eta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial y} = 0\\ \nabla^2\zeta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial z} = 0\end{aligned}\right\} \qquad (304)$$

anschreiben. Wir wollen der kürzeren Ausdrucksweise wegen ein solches System von Verschiebungen, das diese Gleichungen befriedigt, ein mögliches nennen. Damit wird nur gesagt, dass dieses System nicht gegen die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen verstösst, die zwischen den Spannungen an jedem

Körperelemente bestehen müssen, — unter der Voraussetzung natürlich, dass der Stoff, aus dem der Körper besteht, dem Hooke'schen Elasticitätsgesetze gehorcht. Die wirklichen Verschiebungen müssen also jedenfalls zu den möglichen gehören; es fragt sich aber noch, ob die vorgeschlagenen Werthe von $\xi \eta \zeta$ mit den wirklichen übereinstimmen.

Um dies zu prüfen, erinnern wir uns, dass nach den Gl (288) und (292) zu jedem Zwangszustande — wie wir den durch die Verschiebungen $\xi \eta \zeta$ beschriebenen Zustand nennen können — ein eindeutig bestimmter Spannungszustand gehört. Mit der Annahme eines Zwangszustandes $\xi \eta \zeta$ erhalten wir daher auch überall an der Oberfläche des Körpers Spannungen, die dort mit den von aussen her übertragenen Lasten im Gleichgewichte stehen müssen. Diese Gleichgewichtsbedingungen an der Körperoberfläche werden durch die Gleichungen (6) ausgesprochen und sie müssen ebenfalls an jeder Stelle des Umfangs erfüllt sein, wenn der mögliche Spannungszustand mit dem wirklichen, der der besonderen Art der Belastung entspricht, übereinstimmen soll. Wir wollen jetzt annehmen, dass der aus dem vorgeschlagenen Zwangszustande abgeleitete Spannungszustand auch dieser Bedingung überall genüge. Dann lässt sich in der That behaupten, dass der vorgeschlagene Zwangszustand mit dem wirklichen übereinstimmt. Mit anderen Worten heisst dies, dass es nur ein einziges System von Verschiebungen $\xi \eta \zeta$ gibt, das die Grundgleichungen (304) befriedigt und zugleich zu Spannungen führt, die an der Oberfläche des Körpers den dort bestehenden Grenzbedingungen genügt.

Um dies zu beweisen, wollen wir zunächst annehmen, es wäre noch ein zweites System von Verschiebungen $\xi' \eta' \zeta'$ möglich, das alle Bedingungen ebenfalls erfüllte. Dann geben auch die Differenzen

$$\xi'' = \xi - \xi'; \quad \eta'' = \eta - \eta'; \quad \zeta'' = \zeta - \zeta'$$

ein mögliches System von Verschiebungen an, wie man durch Einsetzen dieser Werthe in die Grundgleichungen (304) erkennt. Denn man hätte z. B.

$$e'' = e - e' \quad \text{und} \quad \nabla^2 \xi'' = \nabla^2 \xi - \nabla^2 \xi'$$

und die erste der Grundgleichungen würde für das neue Verschiebungssystem übergehen in

$$\nabla^2 \xi - \nabla^2 \xi' + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} - \frac{m}{m-2} \frac{\partial e'}{dx} = 0.$$

Nach der Voraussetzung, dass schon ξ und ξ' mögliche Verschiebungen waren, muss aber für sich

$$\nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \nabla^2 \xi' + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e'}{\partial x} = 0$$

sein. In der That ist also dann auch

$$\nabla^2 \xi'' + \frac{m}{m-2} \frac{\partial e''}{\partial x} = 0$$

und ebenso bei den beiden anderen Gleichungen. Der Grund für die Möglichkeit dieser Superposition liegt darin, dass die Grundgleichungen linear sind.

Dem möglichen Verschiebungssysteme $\xi'' \eta'' \zeta''$ entspricht nun auch ein bestimmter Spannungszustand des Körpers. Auch diese Spannungen folgen aus den früheren, für beide Fälle bestehenden durch Bildung der Differenzen, wie aus den Gl. (288) und (292) hervorgeht. Man hat also z. B.

$$\sigma_x'' = \sigma_x - \sigma_x'$$

u. s. f. Wir nahmen ferner an, dass $\xi \eta \zeta$ und $\xi' \eta' \zeta'$ auch allen Grenzbedingungen genügen sollten. An jeder Stelle der Körperoberfläche bilden also sowohl die Spannungen σ_x u. s. f. als die σ_x' u. s. f. ein Gleichgewichtssystem mit den von aussen her übertragenen Druckkräften. Die Spannungen σ_x'' u. s. f. verlangen daher, wenn sie an der Oberfläche des Körpers auftreten sollen, dass dort gar keine Druckkräfte von aussen her übertragen werden. Gehörte zu den Grenzbedingungen, dass ein bestimmter Punkt des Körpers festgehalten sei, so musste dort sowohl $\xi = 0$ als $\xi' = 0$ u. s. f. und daher auch $\xi'' = \xi - \xi' = 0$ sein.

Wir haben also in dem Zwangs- und Spannungszustande, der durch die Werthe ξ'' u. s. f. und σ_x'' u. s. f. beschrieben ist, einen Zustand des Körpers vor uns, bei dem gar keine äusse-

ren Kräfte auf diesen übertragen werden; mit anderen Worten, dieser Zustand entspricht dem natürlichen Zustande des Körpers. Nun habe ich freilich schon früher einmal darauf aufmerksam gemacht, dass selbst im unbelasteten Zustande des Körpers unter Umständen Spannungen bestehen können, z. B. die sogenannten Gussspannungen. Diese hängen aber von Umständen ab, die mit unserer Aufgabe nichts zu thun haben und deren Berechnung daher auch nicht verlangt werden kann. Wir wollen nur jene Spannungen ermitteln, die durch die Lasten hervorgerufen werden. Wir nehmen daher an, dass im natürlichen Zustande keine Spannungen auftreten und setzen σ_x'' u. s. f. $= 0$. Ausdrücklich müssen wir uns dabei freilich daran erinnern, dass etwaige Eigenspannungen von unserer Untersuchung überhaupt nicht berührt werden. Mit $\xi'' = 0$, $\eta'' = 0$, $\zeta'' = 0$ folgt aber

$$\xi' = \xi; \quad \eta' = \eta; \quad \zeta' = \zeta,$$

d. h. die beiden vorgeschlagenen Zwangszustände, die alle Bedingungen mit Einschluss der Grenzbedingungen erfüllen sollten, müssen identisch miteinander sein. Die Lösung der Aufgabe ist daher eine eindeutige und wir sind sicher, den wahren Spannungszustand ermittelt zu haben, wenn wir nachweisen können, dass er allen aufgestellten Bedingungen entspricht.

§ 66. Die Lösung von de Saint-Vénant.

Als in den vorausgehenden Abschnitten die Biegung und die Verwindung eines Stabes untersucht wurde, nahm ich überall ohne weiteren Beweis an, dass die parallel zur Stabaxe verlaufenden Fasern keinen merklichen Querdruck oder Querzug und auch keine Schubspannungen in der Richtung quer zur Stabaxe aufeinander übertrügen. Mit anderen Worten, wenn wie seither stets die X-Axe in die Richtung der Stabmittellinie gelegt ist, wurde

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0 \tag{305}$$

gesetzt. Wenn dies auch nicht gerade ausdrücklich ausgesprochen wurde, so wurde doch auf Spannungen in diesen

Richtungen weder bei der Biegung noch bei der Torsion jemals Rücksicht genommen. Sie wurden stillschweigend entweder als nicht vorhanden oder doch als unerheblich gegenüber jenen Spannungen angesehen, deren Berechnung durchgeführt wurde.

Man kann sich jetzt nachträglich darüber Rechenschaft geben, inwiefern dies nach der strengen Theorie zulässig ist und zu welchen weiteren Schlüssen diese strenge Theorie für einen solchen Spannungszustand führt, bei dem die Gl. (305) genau erfüllt sind. Diesen Weg hat de Saint-Vénant bei seiner berühmten Untersuchung eingeschlagen.

Zunächst ist klar, dass ein solcher Spannungszustand genau nur dann verwirklicht sein kann, wenn auf die Mantelfläche des Stabes keine Druckkräfte und auch keine Reibungen oder überhaupt keine tangentialen Kräfte in der Richtung quer zur Stabaxe übertragen werden, denn sonst müssten, zunächst wenigstens an der Mantelfläche selbst, wo solche äussere Kräfte angebracht wären, die in (305) aufgeführten Spannungscomponenten von Null verschieden sein, um die durch die Gl. (6) ausgesprochenen Grenzbedingungen zu erfüllen. Die Saint-Vénant'sche Theorie kann daher nur für solche Stäbe genau richtig sein, bei denen nur an den beiden Endquerschnitten von aussen her Lasten übertragen werden; allenfalls können dazu noch tangentiale äussere Kräfte an der Mantelfläche treten, die der Stabaxe parallel sind. Der letzte Fall kommt aber bei den Anwendungen kaum in Frage.

Wenn wir die Spannungen mit Hülfe der Gl. (288) und (292) in den Verschiebungen ausdrücken, können wir die Gl. (305) auch durch die folgenden

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-2} = 0; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$$

ersetzen oder mit Rücksicht auf die Bedeutung von e auch durch

$$e = \frac{m-2}{m}\frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{1}{m}\frac{\partial \xi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0. \qquad (306)$$

Die Grundgleichungen (304) gehen hiermit über in

$$\left.\begin{aligned} 2\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}=0 \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}+\frac{m-1}{m}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}=0 \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}+\frac{m-1}{m}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z}=0 \end{aligned}\right\} \tag{307}$$

Hier sind die Werthe von e, von $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ und von $\frac{\partial \zeta}{\partial z}$ aus den Gleichungen (306) schon eingesetzt. Dagegen ist auf die letzte der Gl. (306) noch keine Rücksicht genommen. Wir müssen uns jetzt davon überzeugen, ob die Gl. (307) mit den Gl. (306) in der That vereinbar sind, ob also kein Widerspruch zwischen beiden besteht und welche Bedingungen erfüllt sein müssen, damit dies zutreffe. Zu diesem Zwecke ist es am besten, zunächst alle Differentialquotienten nach Möglichkeit in solchen von ξ auszudrücken, um zu Gleichungen zu gelangen, die diese Veränderliche allein enthalten. Wir beginnen mit denen von η. Nach der letzten der Gleichungen (306) ist

$$\frac{\partial \eta}{\partial z}=-\frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad \text{also} \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}=-\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y \partial z}$$

und daher, unter Berücksichtigung der zweiten der Gleichungen (306)

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}=+\frac{1}{m}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}. \tag{308}$$

Setzen wir diesen Werth in die zweite der Gleichungen (307) ein, so geht sie über in

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y}. \tag{309}$$

Gerade so verfahren wir, um die Differentialquotienten von ζ in ξ auszudrücken. Aus der letzten der Gl. (306)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y}=-\frac{\partial \eta}{\partial z} \quad \text{oder} \quad \frac{\partial^2 \zeta}{d y^2}=-\frac{\partial^2 \eta}{\partial y \partial z}$$

folgt mit Rücksicht auf die zweite der Gl. (306)

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}=+\frac{1}{m}\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z} \tag{310}$$

und, wenn wir dies in die letzte der Gl. (307) einsetzen, auch

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = - \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial z}. \tag{311}$$

Ausserdem liefert die letzte der Gl. (306), wenn wir sie zweimal nach x differentiiren,

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

und hier können wir für die zweiten Differentialquotienten nach x ihre Werthe aus den Gl. (309) und (311) einsetzen. Die Gleichung geht dann über in

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y \partial z} = 0 \tag{312}$$

und damit haben wir schon eine sehr einfache Bedingung gefunden, der die Verschiebung ξ parallel zur Stabaxe jedenfalls genügen muss, wenn der durch die Gl. (305) ausgedrückte de Saint-Vénant'sche Gleichgewichtszustand verwirklicht sein soll. Wir können aber sofort auch noch einige andere Beziehungen angeben, denen die dritten Differentialquotienten von ξ unterworfen sein müssen.

Zunächst ist nach Gl. (309)

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} = - \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2}$$

und andererseits nach der zweiten der Gl. (306) bei zweimaliger Differentiation nach x

$$\frac{\partial^3 \eta}{\partial x^2 \partial y} = - \frac{1}{m} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}.$$

Der Vergleich beider Werthe liefert

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} = \frac{1}{m} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}. \tag{313}$$

In derselben Weise finden wir aus Gl. (311)

$$\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial z} = - \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial z^2}$$

und aus der zweiten der Gl. (306) durch Differentiation

$$\frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^2 \partial z} = - \frac{1}{m} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3},$$

also aus dem Vergleiche beider Werthe

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial z^2} = \frac{1}{m} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3}. \qquad (314)$$

Bis jetzt haben wir noch keinen Gebrauch von der ersten der Gleichungen (307) gemacht, die überhaupt nur Differentialquotienten von ξ enthält. Da wir schon ziemlich viel über die dritten Differentialquotienten dieser Veränderlichen ausgemacht haben, wollen wir diese Gleichung noch einmal nach x differentiiren; wir finden dann

$$2 \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial z^2} = 0$$

und hier können wir für das zweite und dritte Glied auf der linken Seite die in den Gl. (313) und (314) gefundenen Werthe einsetzen. Die Gleichung geht dann über in

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} = 0 \qquad (315)$$

und damit zugleich folgt auch

$$\frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial^3 \xi}{\partial x \partial z^2} = 0. \qquad (316)$$

Durch die Gl. (312), (315) und (316) wird über die Eigenschaften der Unbekannten ξ schon ein recht genauer Einblick gewonnen. Wir können diese Gleichungen übersichtlich in folgender Weise zusammenfassen:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \partial z}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = 0. \qquad (317)$$

Die Form der Function ξ selbst lässt sich daraus zwar noch nicht bestimmen, wohl aber, was fast noch wichtiger ist, der analytische Ausdruck von $\frac{\partial \xi}{\partial x}$, d. h. von der specifischen Dehnung in der Richtung der Stabmittellinie. Diese kann nämlich, wie aus den Gl. (317) hervorgeht, x nur in der ersten Potenz enthalten (denn der zweite Differentialquotient nach x verschwindet nach diesen Gleichungen) und ebenso muss sie linear in Bezug auf y und auf z sein. Ausserdem kann auch kein Glied darin auftreten, das y und z zugleich enthielte. Der

allgemeinste Ausdruck, der mit den Gl. (317) verträglich ist, lautet daher

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 xy + a_5 xz, \quad (318)$$

in der die a constante Grössen, also unabhängig von $x\,y\,z$ sind, während sie von der Grösse der Belastung des Stabes abhängig sein können und müssen.

Betrachten wir nun noch etwas näher, was wir hiermit gefunden haben. Nach dem Elasticitätsgesetze ist

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = E\frac{\partial \xi}{\partial x},$$

da die andern Spannungen σ_y und σ_z Null sind. Durch Multiplication von Gl. (318) mit E finden wir daher auch die Normalspannungen σ_x. Uns interessirt jetzt nur der Umstand, dass σ_x hierdurch als eine lineare Function der Querschnittscoordinaten dargestellt wird. Das war aber die Annahme, von der wir willkürlich bei den Untersuchungen des dritten Abschnittes über die Biegungsfestigkeit der Stäbe ausgingen und wir finden jetzt nachträglich, dass diese Annahme gar nicht so willkürlich ist, wie sie damals hingestellt wurde, dass sie vielmehr für Körper, die dem Hooke'schen Gesetze folgen, eine nothwendige Folge aus der anderen Annahme ist, dass kein Anlass zur Uebertragung von Spannungen σ_y, σ_z und τ_{yz} zwischen den einzelnen Fasern gegeben sei.

Damit ist für den Fall der Biegung jede weitere Untersuchung überflüssig gemacht. Wir müssten, wenn wir die Betrachtung nach dieser Richtung hin fortsetzen wollten, nothwendig wieder zu den früheren Ergebnissen gelangen, denn nachdem die Annahme von der linearen Spannungsvertheilung einmal hypothetisch eingeführt war, schloss sich daran das Uebrige folgerichtig und es zeigte sich namentlich, dass sich überall Gleichgewicht herstellen lässt, ohne dass Kräfte $\sigma_y\,\sigma_z\,\tau_{yz}$ zu Hülfe genommen werden mussten. Wir brauchen daher jetzt nicht noch einmal nachzuweisen, dass die Gl. (306) und

(307), falls man die nothwendige Bedingung (318) erfüllt, in der That in Uebereinstimmung miteinander sind und einem möglichen Gleichgewichtszustande entsprechen, der bei passender Anbringung der äusseren Kräfte an den Endquerschnitten des Stabes auch sofort verwirklicht werden kann.

§ 67. Rückblick auf die vorige Entwickelung.

Wer die Entwickelungen des vorigen Paragraphen zum ersten Male kennen lernt, wird sie zunächst umständlich und langwierig finden. Nachdem man sich aber einmal dazu entschlossen hat, Schritt für Schritt die ganze Betrachtung nachzuprüfen, wird man sich überzeugen, dass jeder Schritt für sich genommen ganz einfach und leicht verständlich ist. Nur die Aufeinanderfolge der einzelnen Schlüsse liegt nicht so klar zu Tage; man sieht zuerst nicht recht ein, zu was es nützen soll, die verschiedenen Differentiationen auszuführen und die Ergebnisse in der Weise, wie es geschehen war, miteinander zu vergleichen. Man bedenke aber, dass es sich darum handelte, die Verträglichkeit von 6 Gleichungen zwischen 3 Unbekannten miteinander zu prüfen. Auch wenn es sich gar nicht um Differentialgleichungen, sondern um gewöhnliche Gleichungen der Algebra gehandelt haben würde, hätte man in diesem Falle danach streben müssen, zwei der Unbekannten zu eliminiren, um zu Beziehungen zu gelangen, die für die dritte Unbekannte erfüllt sein müssen. Von diesem Bestreben ist der ganze Gedankengang des vorigen Paragraphen beeinflusst und es kann nach den Erfahrungen, die man schon in der gewöhnlichen Algebra beim Auflösen von Gleichungen macht, nicht überraschen, dass gewisse Verbindungen, die den Eindruck von Kunstgriffen machen, schneller zu dem gewünschten Ziele führen, als wenn eine solche Anleitung fehlte. Ohne Zweifel hat de Saint-Vénant selbst, als er die Aufgabe zum ersten Male in Angriff nahm, mit viel mehr Schwierigkeiten zu kämpfen gehabt, um zu seinen Ergebnissen zu gelangen, als sie uns jetzt entgegentreten, wenn wir diese Ergebnisse

auf dem inzwischen herausgefundenen einfachsten Wege nachprüfen. Wenn man sich dieses Sachverhältniss vor Augen hält, wird man keinen Anstoss mehr daran nehmen, dass es nicht wohl möglich wäre, die ganze Betrachtung selbst ohne Weiteres aus dem Stegreife herzuleiten, sondern dass man einen kundigen Führer auf diesem etwas verschlungenen Pfade nöthig hat.

Es fragt sich ferner, was nun mit dem Resultate, zu dem wir gelangt sind, für die Biegungstheorie gewonnen ist. Dabei müssen wir uns vor allen Dingen daran erinnern, dass nach den Untersuchungen von § 65 jede mögliche Lösung zur wirklichen Lösung wird, sobald die von aussen her auf die Körperoberfläche übertragenen Lasten an jeder Stelle in Uebereinstimmung mit dem Spannungszustande stehen, der zu dieser Lösung gehört. Denken wir uns etwa einen Balken, der auf der einen Seite eingemauert ist und an dem frei hinauskragenden Ende eine Last trägt. Wenn die Saint-Vénant'sche Lösung die wirkliche für diesen Balken sein soll, muss zunächst die ganze Mantelfläche des Balkens frei von Lasten sein, was hier von vornherein erfüllt ist. Ferner darf aber auch an dem Endquerschnitte die Last nicht in beliebiger Weise angebracht sein, sie muss vielmehr über die ganze Fläche dieses Endquerschnitts in der Weise vertheilt sein, wie wir sie früher für die Vertheilung der Schubspannungen im gebogenen Balken gefunden haben. Und schliesslich muss auch die Befestigung an der Einmauerungsstelle so beschaffen sein, dass die zu der möglichen Lösung gehörigen Formänderungen, also die Querdehnung der gezogenen Fasern und die Querverkürzung der gedrückten dadurch nicht gehindert wird.

Wenn alle diese Bedingungen genau erfüllt wären, ausserdem auch der Stoff, aus dem der Balken hergestellt ist, dem Hooke'schen Gesetze gehorchte, könnte kein Zweifel darüber bestehen, dass die Saint-Vénant'-sche Lösung streng richtig wäre. In den praktisch vorkommenden Fällen kann aber von einer strengen Erfüllung der genannten Bedingungen kaum jemals

die Rede sein und die ganze Betrachtung würde durch diesen Umstand sehr an Werth verlieren, wenn man nicht zeigen könnte, dass eine Verletzung dieser Bedingungen bis zu einem gewissen Grade ohne wesentlichen Einfluss auf den wirklichen Spannungszustand ist.

Man achte z. B. auf die Bedingung, dass sich die Last über den Endquerschnitt nach dem für die Schubspannungen gültigen Gesetze vertheilen muss. Wenn anstatt dessen ein Strick um das freie Stabende geschlungen ist, an dem die Last aufgehängt wird, kann kein Zweifel darüber bestehen, dass in unmittelbarer Nachbarschaft des Stabendes die Spannungsvertheilung durchaus von der de Saint-Vénant'schen verschieden ist, da der wirkliche Spannungszustand hier jetzt ganz andern Grenzbedingungen unterworfen ist. Je weiter man aber von dem Stabende abrückt, desto weniger Unterschied macht es aus, wie die Last in Wirklichkeit am Stabende angreift. Um dies zu erkennen, stelle man sich ein Gleichgewichtsystem äusserer Lasten vor, so dass ein Theil mit der de Saint-Vénant'schen Angriffsweise der Last am Endquerschnitte übereinstimmt, während der Rest überall genau entgegengesetzt mit den von dem Strick übertragenen Oberflächenkräften ist. Wenn man das so zusammengesetzte Lastensystem zu dem durch den Strick verursachten hinzufügt, kommt genau die de Saint-Vénant'sche Belastungsweise heraus. Der Unterschied zwischen den Spannungszuständen in beiden Fällen der Angriffsweise der Last an dem Ende wird daher durch jenen Spannungszustand angegeben, der dem angeführten Gleichgewichtssysteme der Lasten entspricht. Nun ist aber von vornherein klar, dass ein am Stabende dicht zusammengedrängtes Lastensystem, das dort im Gleichgewichte steht, zwar in der Nachbarschaft erhebliche Formänderungen und Spannungen hervorrufen kann, dass aber der Einfluss schnell verschwinden muss, wenn wir uns von dem Stabende entfernen. Mit anderen Worten: wenn ich etwa eine Schiene von einigen Metern Länge am einen Ende in einem Schraubstocke der Quere nach zusammendrücke oder sie sonst in irgend einer Weise bean-

spruche, so dass die hier übertragenen Kräfte unter sich im Gleichgewichte stehen, so muss der Einfluss der Behandlung, die dieses Schienenende erfährt, schnell verschwinden, je weiter entfernt von dem Ende gelegene Theile man in's Auge fasst. Damit ist aber gezeigt, dass die genauere Art der Lastübertragung von wesentlichem Einflusse nur in der nächsten Nachbarschaft der Angriffsstelle der Last ist. Auch bei einer anderen Art des Lastangriffs kann daher in einiger Entfernung von der Belastung die Saint-Vénant'sche Lösung noch als hinreichend genau zutreffend angesehen werden. Bei einer Entfernung, die etwa das Drei- bis Vierfache der grössten Querschnittsabmessung bildet, ist jedenfalls keine merkliche Abweichung mehr zu erwarten. Durch diesen Umstand gewinnt die im vorigen Paragraphen vorgetragene Theorie erst ihren vollen Werth.

Die Absicht, die uns bei dem Eintritt in die Untersuchungen der strengen Elasticitätstheorie leitete, nämlich eine befriedigendere Grundlage für die Formeln der Festigkeitslehre zu gewinnen, als sie die hypothetische Aufstellung von Formänderungs- oder Spannungsvertheilungsgesetzen für die besonderen Fälle bildet, ist jetzt erreicht. Freilich handelt es sich dabei bis jetzt mehr um eine nachträgliche bestätigende Kritik, als um die Gewinnung neuer Ergebnisse. Immerhin ist wohl zu betonen, dass nur das lineare Spannungsvertheilungsgesetz Navier's und nicht etwa die Bernouilli'sche Annahme, dass die Querschnitte eben blieben, nachträglich als richtig erkannt wurde. In der That ist vielmehr die Bernouilli'sche Annahme im Allgemeinen gar nicht richtig und dieser Sachverhalt sollte davor warnen, bei der elementaren Behandlung der Biegungsaufgaben von der Voraussetzung auszugehen, dass die Querschnitte eben blieben und aus dieser unzutreffenden Voraussetzung einen Scheinbeweis für die lineare Spannungsvertheilung abzuleiten, wie er leider heute noch in den meisten Büchern über technische Mechanik zu finden ist. Wenn die mathematische Elasticitätslehre auch nur den einen Nutzen brächte, über diesen

Punkt Klarheit zu verbreiten, wäre damit ihre Existenzberechtigung schon nachgewiesen. Wir werden aber jetzt sehen, dass sie auch nach anderen Richtungen hin zu sehr werthvollen Aufschlüssen geführt hat.

§ 68. Reine Verdrehungsbeanspruchung.

Die Untersuchungen in § 66 bezogen sich auf einen Stab, der gleichzeitig auf Biegung und auf Torsion beansprucht sein konnte. Nachdem wir die Folgerungen hervorgehoben haben, die sich aus der allgemeinen Untersuchung für die Biegungsspannungen ergeben, ist es besser, wenn wir jetzt weiterhin die Aufgabe dadurch vereinfachen, dass wir die Beanspruchung auf Verwinden für sich untersuchen. Zu diesem Zwecke setze ich also jetzt überall $\sigma_x = 0$, oder, was auf dasselbe hinaus kommt,

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0. \tag{319}$$

Mit Gl. (318) ist dieser Ansatz verträglich; er geht aus dieser Gleichung hervor, wenn man annimmt, dass in dem besonderen Falle, den wir fernerhin betrachten wollen, alle mit a bezeichneten Constanten verschwinden.

Aus Gl. (319) folgt

$$\xi = \varphi(y, z), \tag{320}$$

wenn φ irgend eine bis jetzt unbekannte Function der Querschnittscoordinaten bedeutet. Mit Gl. (319) gehen ferner die Gl. (306), die den von de Saint-Vénant untersuchten Spannungszustand näher beschreiben, in die einfachere Form

$$e = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0 \tag{321}$$

über. Auch die durch die Gl. (307) ausgesprochenen allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen vereinfachen sich hier erheblich. Sie lauten jetzt

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}=0\\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}=0\\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}=0\end{aligned}\right\}. \tag{322}$$

Ausserdem gelten auch alle übrigen Gleichungen, die wir in § 66 gefunden haben, da der hier zu behandelnde Fall in dem früheren mit enthalten ist. So erhalten wir aus den Gl. (308) und (309)

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial z^2}=0; \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}=0 \tag{323}$$

und aus den Gl. (310) und (311)

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}=0; \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}=0. \tag{324}$$

Wir wissen jetzt so viel von den Differentialquotienten der Functionen η und ζ, dass wir deren analytische Form im Allgemeinen angeben können. Die Function η muss nämlich nach (321) unabhängig von y sein und nach (323) muss sie linear sein in Bezug auf x und z. Sie ist daher von der Form

$$\eta = b_0 + b_1 x + z(b_2 + b_3 x), \tag{325}$$

in der die b unbekannte, aber constante Grössen sind. Ebenso folgt für ζ

$$\zeta = c_0 + c_1 x + y(c_2 + c_3 x). \tag{326}$$

Fügen wir dazu noch die Gl. (320)

$$\xi = \varphi(yz),$$

so ist damit ein Werthsystem der Verschiebungen $\xi \eta \zeta$ angegeben, das zunächst einem möglichen Zwangszustande entspricht, falls nur die unbekannte Function $\varphi(yz)$ so gewählt wird, dass sie der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi(yz)}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \varphi(yz)}{\partial z^2}=0 \tag{327}$$

genügt, und das ausserdem auch die Bedingungsgleichungen (321) befriedigt, falls wir die Constanten b und c so wählen, dass

$$\frac{\partial \eta}{\partial z}+\frac{\partial \zeta}{\partial y}=0$$

wird. Nach Einsetzen aus (325) und (326) geht diese Bedingungsgleichung über in

$$b_2 + b_3 x + c_2 + c_3 x = 0,$$

und da diese identisch erfüllt sein muss, folgt für die Constanten

$$c_2 = -b_2 \quad \text{und} \quad c_3 = -b_3. \tag{328}$$

Die Verschiebungen $\xi \eta \zeta$ wollten wir (vgl. § 63) auf ein Coordinatensystem beziehen, das auf dem Körper selbst festgelegt ist. Im Ursprunge ist daher

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Da ferner die X-Axe stets durch denselben unendlich benachbarten Punkt gehen sollte, so wird im Ursprunge auch

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0,$$

und da schliesslich die XY-Ebene durch einen dritten unendlich benachbarten Punkt geführt sein sollte, muss im Ursprunge auch

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0$$

sein. Diese Festsetzungen gestatten die Bestimmung der meisten Constanten b und c. Aus der ersten Reihe folgt nämlich

$$b_0 = 0; \quad c_0 = 0,$$

aus der zweiten

$$b_1 = 0; \quad c_1 = 0,$$

und aus der dritten Bedingung

$$c_2 = 0.$$

Hierdurch und durch die Gl. (328) werden alle Constanten b und c bis auf eine, nämlich $b_3 = -c_3$ bekannt. Diese eine noch unbekannt gebliebene Constante sei kurz mit c bezeichnet. Dann vereinfachen sich die Werthe für die Verschiebungscomponenten wie folgt

$$\eta = cxz; \quad \zeta = -cxy; \quad \xi = \varphi(yz). \tag{329}$$

Die einzige erhebliche Schwierigkeit des Problems besteht jetzt noch in der Bestimmung der Function $\xi = \varphi(yz)$, die der Differentialgleichung (327) genügen muss. Man beachte,

dass $\xi = \varphi(yz)$ für $x = 0$ die Gleichung der Fläche angibt, in die der Querschnitt $x = 0$ durch die Formänderung übergeht. Alle anderen Querschnitte nehmen dieselbe Gestalt an, da ξ unabhängig von x ist. Früher, als die heute als richtig erkannte de Saint-Vénant'sche Theorie der Torsion noch nicht bekannt war, nahm man an, dass die Querschnitte eben blieben. Wir wollen zusehen, inwiefern dies richtig sein konnte. Nach dieser Annahme müsste ξ eine lineare Function von y und z sein; wir setzen also versuchsweise

$$\xi = \varphi(yz) = a_1 y + a_2 z, \tag{330}$$

ein Ansatz, der die Differentialgleichung (327) in der That befriedigt, also zu einem möglichen Spannungszustande führt. Nun haben wir aber noch die Grenzbedingungen an der Oberfläche der Welle zu erfüllen. Bei gewöhnlichen Torsionsaufgaben ist die Mantelfläche der Welle, abgesehen von den Stellen, wo Räder oder Riemenscheiben aufgekeilt sind, frei von äusseren Kräften. Ausser den schon von vornherein gleich Null gesetzten Spannungscomponenten $\sigma_y \sigma_z \tau_{yz}$ muss also an der Oberfläche auch noch jene Schubspannungscomponente gleich Null sein, die in der durch die Stabaxe und die Normale zur Oberfläche bestimmten Ebene liegt. Oder mit anderen Worten: die Schubspannung muss über den Querschnitt jedenfalls so vertheilt sein, dass sie den Umfang überall berührt. Das war die Grenzbedingung, die wir bei der Behandlung der Torsionsfestigkeit im neunten Abschnitte überall voranstellten und sie muss natürlich auch hier noch berücksichtigt werden. Bisher war von ihr noch nicht die Rede; sie ist es aber gerade, die die noch ausstehende Bestimmung der unbekannten Function ξ oder φ ermöglicht oder die umgekehrt lehrt, unter welchen Umständen eine solche Lösung der partiellen Differentialgleichung (327) wie die in (330) gegebene der Wirklichkeit entspricht.

Um diese Bedingung in Form einer Gleichung ausdrücken zu können, gehe ich auf die Werthe für die Spannungscomponenten τ_{xy} und τ_{xz} in den Gl. (288) zurück. Danach war

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right); \quad \tau_{xz} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right).$$

Wenn die Gleichung des Querschnittsumrisses (oder auch eines Theiles des ganzen Querschnittsumrisses) in der Form

$$z = f(y)$$

angeschrieben wird, so muss, damit die aus den Componenten τ_{xy} und τ_{xz} resultirende Schubspannung den Querschnittsumfang berührt,

$$\frac{\tau_{xz}}{\tau_{xy}} = \frac{dz}{dy} \tag{331}$$

sein. Also haben wir noch für den Querschnittsumfang die Bedingungsgleichung

$$\frac{\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}}{\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}} = \frac{dz}{dy}, \tag{332}$$

oder, wenn man die Werthe von η und ζ aus (329) einsetzt

$$\frac{\frac{\partial \xi}{\partial z} - cy}{\frac{\partial \xi}{\partial y} + cz} = \frac{dz}{dy}. \tag{333}$$

Dieser Gleichung muss ξ überall an der Oberfläche genügen, wenn die Oberfläche frei von äusseren Kräften sein soll und zwar nicht nur für den besonderen Fall, den wir hier untersuchen, sondern ganz allgemein.

Wir prüfen jetzt, unter welchen Umständen der in Gl. (330) aufgestellte Werth von ξ auch dieser Grenzbedingung genügt. Gl. (333) geht hier über in

$$\frac{a_2 - cy}{a_1 + cz} = \frac{dz}{dy}.$$

Diese gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung kann sofort integrirt werden. Durch Trennung der Variablen erhält man

$$(a_2 - cy)\,dy = (a_1 + cz)\,dz$$

oder nach Integration

$$a_1 z + \frac{c}{2} z^2 - a_2 y + \frac{c}{2} y^2 = K.$$

Das ist aber, wie man aus der Gleichheit der Coefficienten von y^2 und z^2 erkennt, die Gleichung eines Kreises. Damit ist bewiesen, dass nur bei kreisförmigen Querschnitten nach der Torsion alle Punkte, die vorher auf einem Querschnitte lagen, auch nachher noch in einer Ebene enthalten sein können. In allen anderen Fällen geht die Querschnittsebene in eine gekrümmte Fläche über. Die Kritik, die wir jetzt üben, fällt daher bei der Verdrehung ganz anders aus als bei der Biegung. Während dort wenigstens die Spannungsvertheilung der Navier'schen Theorie bestätigt wurde, erkennen wir hier, dass die ältere Theorie der Torsion falsch war mit einziger Ausnahme des kreisförmigen Querschnitts und man muss wohl beachten, dass dieser wichtige Aufschluss, der inzwischen freilich schon auf die ganze Gestaltung der elementaren Theorie der Torsion zurückgewirkt hat, erst durch die strenge Elasticitätstheorie gegeben wurde. — Zugleich bildet übrigens das eben gewonnene Resultat eine willkommene Bestätigung der früher vorgetragenen Theorie der Torsion für Wellen von kreisförmigem Querschnitt.

§ 69. Fortsetzung für den elliptischen Querschnitt.

Für Gl. (327) kann man beliebig viele Lösungen angeben. Jede dieser Lösungen entspricht einem möglichen Spannungszustande. Damit dieser wirklich zu Stande komme, muss man aber noch für die Erfüllung der Grenzbedingungen an der Körperoberfläche Sorge tragen. Besteht die Grenzbedingung an der Mantelfläche des Stabes darin, dass diese frei von äusseren Kräften sein soll, so wird sie, wie wir schon sahen, durch Gl. (333) zum Ausdrucke gebracht. Man kann nun entweder so verfahren, dass man irgend eine beliebige Lösung der partiellen Differentialgleichung (327) annimmt und dann nach Gl. (333) die Gestalt des Querschnitts bestimmt, für die diese Lösung

zutrifft oder man kann umgekehrt verlangen, für eine gegebene Querschnittsform die passende Lösung der Gl. (327) zu finden. Die letzte Aufgabe ist indessen weitaus schwieriger zu lösen und für beliebig gegebene Querschnittsformen, also z. B. für einen I-förmigen Querschnitt o. dgl. ist sie bisher überhaupt nicht streng gelöst worden. Für den rechteckigen Querschnitt ist dies allerdings gelungen, aber nur durch Reihenentwickelungen von schwieriger Art, mit denen sich weiterhin doch nicht viel anfangen lässt.

Viel einfacher ist dagegen das andere Verfahren, zunächst irgend eine Lösung der Gl. (327) anzunehmen und dann die Gestalt des Querschnitts aufzusuchen, für die diese Lösung zutrifft. Die allgemeinste Lösung der Gl. (327) ist nämlich wohlbekannt; sie lautet

$$\xi = \varphi(yz) = f_1(y + iz) + f_2(y - iz), \tag{334}$$

wenn i die imaginäre Einheit und f_1 und f_2 ganz beliebige Functionszeichen sind. Dass Gl. (334) die Differentialgleichung (327) befriedigt, folgt durch Einsetzen des Werthes und dass Gl. (334) zugleich die allgemeinste Lösung angibt, folgt daraus, dass sie zwei willkürliche Functionen enthält. Je nach den Formen der Functionen f_1 und f_2 kann man nun beliebig viele partikuläre Lösungen angeben und zwar bildet sowohl der reelle als der imaginäre Theil von (334) für sich genommen eine Lösung. Man kann also z. B. auch die allgemeinste Form von Potenzreihen, die mit Gl. (327) verträglich ist, hiernach ohne Weiteres anschreiben, nämlich, wenn wir uns auf ganze positive Exponenten beschränken,

$$\left.\begin{aligned}\xi = a_0 + a_1(y + iz) + a_2(y + iz)^2 + \cdots\cdot \\ + b_1(y - iz) + b_2(y - iz)^2 + \cdots\cdot\end{aligned}\right\} \tag{335}$$

in der die a und b ganz beliebige Coefficienten sein können.

In diesen vielgestaltigen Formen ist als eine der einfachsten auch die folgende enthalten

$$\xi = \varphi(yz) = ayz. \tag{336}$$

Dass sie überhaupt Gl. (327) befriedigt, erkennt man beim Einsetzen in diese Gleichung sofort. Dass sie aber auch in der

Form (335) mit enthalten ist, folgt daraus, dass man sie als den imaginären Antheil von

$$\xi = \frac{a}{4}(y + iz)^2 - \frac{a}{4}(y - iz)^2$$

betrachten kann. Wir wollen für diese besondere Form des Werthes von ξ den zugehörigen Querschnittsumriss nach Gl. (333) bestimmen. Diese Gleichung geht hier über in

$$\frac{(a-c)y}{(a+c)z} = \frac{dz}{dy}, \tag{337}$$

die sich auch in der Form

$$(a + c)z dz + (c - a) y dy = 0$$

schreiben lässt. Die Integration liefert

$$(a + c)\frac{z^2}{2} + (c - a)\frac{y^2}{2} = K,$$

wofür man auch

$$\frac{y^2}{a+c} + \frac{z^2}{c-a} = \frac{2K}{(a+c)(c-a)} = K' \tag{338}$$

schreiben kann, wenn K' irgend eine neue unbekannte Integrationsconstante bedeutet. In Gl. (338) erkennt man aber die Mittelpunktsgleichung einer Ellipse, deren Axen in die Richtungen der Coordinatenaxen fallen. Das Axenverhältniss ist $\sqrt{c+a} : \sqrt{c-a}$. Voraussetzung ist, dass a dem Absolutwerth nach jedenfals kleiner ist, als c.

Für die Schubspannungscomponenten erhält man durch Einsetzen in die früheren Formeln

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + cz\right) = G(a + c)z \\ \tau_{xz} &= G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - cy\right) = -G(c-a)y \end{aligned}\right\}. \tag{339}$$

Damit diese Lösung eine wirkliche sei, ist jetzt nur noch erforderlich, dass an den Endquerschnitten des Stabes das verdrehende Moment der äusseren Kräfte in derselben Vertheilung über den Querschnitt angebracht sei, wie wir sie hier für die Schubspannungsvertheilung in irgend einem anderen Querschnitte gefunden haben. Thatsächlich wird dies freilich

in praktisch vorkommenden Fällen nicht zutreffen. Man muss sich aber dann an die Auseinandersetzungen in § 67 erinnern, nach denen es für solche Stellen, die weit genug vom Lastangriff entfernt liegen, ziemlich gleichgültig ist, auf welche besondere Art die Last angebracht ist.

Wenn wir das Resultat, zu dem wir jetzt gelangt sind, mit der früheren Untersuchung über die Verdrehungsfestigkeit der elliptischen Welle vergleichen, finden wir, dass die damals hypothetisch angesetzten Gleichungen (233), S. 324.

$$\tau_{xy} = ka^2 z; \quad \tau_{xz} = -kb^2 y$$

der Form nach vollständig mit den Gl. (339) übereinstimmen. Jener willkürliche Ansatz hat sich daher bei der eingehenderen Untersuchung jetzt als genau richtig erwiesen. Es ist daher nicht nöthig, hier noch weitere Folgerungen aus den Gl. (339) zu ziehen; vielmehr genügt es, auf die früheren Darlegungen im neunten Abschnitte zu verweisen.

Nur eine Bemerkung möge hier noch Platz finden. Gl. (336) ist zugleich die Gleichung der krummen Fläche, in die der vormals ebene Querschnitt durch die Verdrehung übergeht. Das ist aber die Gleichung eines hyperbolischen Paraboloides. Denkt man sich, nachdem die Verwindung erfolgt ist, von Neuem eine Anzahl ebener Schnitte senkrecht zur Axe gelegt, so schneiden diese die krummen Flächen, in die die vorher ebenen Querschnitte übergegangen sind, in gleichseitigen Hyperbeln; Schnitte, die durch die Axe gelegt sind, ergeben Parabeln.

§ 70. Hydrodynamisches Gleichniss.

In letzter Linie interessirt uns bei dem Torsionsprobleme eigentlich doch nur die Vertheilung der Schubspannungen über den Querschnitt. Es ist daher nützlich, diese Frage nach allen Seiten hin zu beleuchten und die nahe Verwandtschaft, die zwischen unserer Aufgabe und einer Aufgabe der Hydrodynamik besteht, wird sich dazu recht nützlich erweisen.

Man denke sich nämlich, von einem Punkte des Querschnittes ausgehend, eine Linie gezogen, die in der Richtung der resultirenden Schubspannung τ immer weiter verlängert wird. Alle Linien, die sich in dieser Weise ziehen lassen, wollen wir uns in den Querschnitt eingetragen denken, so dass durch jeden Punkt eine davon geht. Der einfacheren Bezeichnung wegen sollen diese Linien die Spannungslinien und die Gesammtheit der Linien, die den ganzen Querschnitt ausfüllen, das Spannungsfeld genannt werden. Von solchen Constructionen macht man oft Gebrauch, um sich über die Vertheilung einer gerichteten Grösse von irgend einer Art in einem gegebenen Gebiete Klarheit zu verschaffen. Am meisten bekannt ist dieses Verfahren in der Lehre vom Magnetismus, wo es sich heute schon bis in den elementaren Unterricht hinein festgewurzelt hat. Beim Magnetismus bezeichnet man die in dieser Weise gezogenen Linien als Kraftlinien. Unsere Spannungslinien dienen demselben Zwecke, wie diese. — Immer, wenn man von dieser Veranschaulichung Gebrauch macht, ist es nützlich, sich noch eines damit zusammenhängenden Bildes zu erinnern. Man kann sich nämlich eine Flüssigkeit vorstellen, die überall in der Richtung der Kraftlinien, oder hier der Spannungslinien strömt, so dass zugleich die Geschwindigkeit der Strömung überall proportional der Grösse der Kraft oder der Spannung ist. Diese Flüssigkeitsbewegung ist ebenfalls sehr geeignet, ein anschauliches Bild von dem Felde zu entwerfen, mit dem man es gerade zu thun hat und in der Lehre vom Magnetismus spielt in der That der daraus hervorgegangene Begriff des „Kraftflusses“ eine grosse Rolle.

Wir wollen jetzt sehen, wie wir die allgemeinen Bedingungsgleichungen, denen unsere Aufgabe unterworfen ist, umformen müssen, um sie der neu gewählten Darstellungsweise anzupassen. Am einfachsten gelingt dies mit der Grenzbedingung, die durch Gl. (333) ausgesprochen war. Wir können sie jetzt einfach dahin in Worte fassen, dass die Flüssigkeitsströmung am Umfange überall in der Richtung der Tangente erfolgen muss, d. h. gerade so wie eine Flüssigkeitsströmung

ohnehin erfolgt, wenn sie rings von festen Wänden eingeschlossen ist.

Wir hatten ferner

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + cz\right) \\ \tau_{xz} &= G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - cy\right) \end{aligned}\right\}. \tag{340}$$

Differentiirt man die erste dieser Gleichungen nach y und die zweite nach z und addirt, so erhält man

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = G\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}\right).$$

Die allgemeine Gleichgewichtsbedingung wurde für das Torsionsproblem durch Gl. (327) ausgesprochen und wir sehen jetzt auch, wie wir diese Bedingung bei der hydrodynamischen Darstellung zum Ausdruck bringen müssen. Nach Gl. (327) verschwindet nämlich die rechte Seite der vorigen Gleichung und man hat daher auch

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \tag{341}$$

als Ersatz für Gl. (327).

Bezeichnet man die Geschwindigkeitscomponenten einer Flüssigkeitsströmung mit uvw, so muss hier $u = 0$ sein und v und w sind proportional mit τ_{xy} und τ_{xz}; daher muss für die zur Abbildung des Torsionsproblems gewählte Flüssigkeitsbewegung nach (341) auch

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{341a}$$

sein. Das erste Glied ist nur der Vollständigkeit wegen beigefügt, obschon es für sich verschwindet. Der Ausdruck, der hier auf der linken Seite steht, gibt an, wie viel Flüssigkeit in der Zeiteinheit mehr aus der Volumeneinheit ausströmt, als einströmt. Dieser Ausdruck ist gleich Null, d. h. die Flüssigkeit bewegt sich so wie eine incompressible Flüssigkeit. Gl. (341) kann daher dahin gedeutet werden, dass eine gewöhnliche Wasserströmung der Abbildung des hier frag-

lichen Falles gerecht wird, ohne dass man Quellen oder Sickerstellen annehmen müsste, um den Fluss in dieser Form zu ermöglichen.

Damit allein sind die Bedingungen, denen die Wasserströmung unterworfen ist, aber noch nicht erschöpft. Man differentiire die erste der Gl. (340) nach z und die zweite nach y und subtrahire beide hierauf voneinander. Dadurch erhält man

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = -2Gc. \tag{342}$$

Die linke Seite dieser Gleichung hat eine besondere Bedeutung, die in der Hydrodynamik eingehender behandelt werden wird. Hier begnüge ich mich damit, zu erwähnen, dass die drei Grössen

$$\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

als die Wirbelcomponenten der Flüssigkeitsbewegung bezeichnet werden. Die beiden letzten, die sich auf die Y- und Z-Axe beziehen, sind bei unserer Flüssigkeitsbewegung gleich Null. Der Wirbel um die zur X-Axe parallelen Wirbellinien wird dagegen durch die linke Seite von Gl. (342) dargestellt und wir erkennen aus dieser Gleichung, dass die Flüssigkeit an allen Stellen mit derselben Stärke $2\,Gc$ wirbelt.

Hiermit ist die Flüssigkeitsbewegung vollständig beschrieben; nur auf eine einzige Art ist es nämlich möglich, dass die Wirbelstärke überall einen gegebenen constanten Werth hat, wenn die incompressible Flüssigkeit in dem durch den Querschnitt angegebenen Raume stetig herumfliessen soll und dabei rings von festen Wänden eingeschlossen ist.

Die Vorstellung unserer Aufgabe unter diesem Bilde kann nun insofern von Nutzen sein, als dadurch gewisse Schätzungen oder auch genaue Rechnungen nach den Lehren der Hydrodynamik erleichtert werden. Ich möchte hier besonders auf einen Aufsatz von Herrn R. Bredt in der Zeitschr. des Vereins deutscher Ingenieure 1896, Nr. 28, aufmerksam machen, der eine gute Anleitung dafür gibt, wie man solche Schätzungen

für I-Profile u. dergl. ausführen kann. Mit der Behauptung, dass Gl. (342) vor ihm noch nicht bekannt gewesen wäre, irrte sich Hr. Bredt freilich und ich musste ihm daher entgegentreten; diese ganze hydrodynamische Betrachtung, wie ich sie hier vorgeführt habe, ist schon längst von Thomson und Tait in ihrer „Natural Philosophy“ veröffentlicht worden. Um so lieber erkenne ich aber an, dass der angeführte Bredt'sche Aufsatz eine sehr tüchtige Leistung bildet und alle Beachtung verdient.

Zu einem besonders bemerkenswerthen Resultate gelangt man durch die hydrodynamische Betrachtung, wenn man sie auf den Fall anwendet, dass irgendwo im Querschnitte ein kleiner Sprung (Gussfehler o. dgl.) auftritt. Wir wollen annehmen, dass dieser Fehler durch ein kleines kreisförmiges Loch im Querschnitte dargestellt werden kann. Dadurch wird das Spannungsfeld nur in der Umgebung des Loches merklich geändert; die Spannungslinien können jetzt nicht mehr durch die Fläche des Loches weiter gehen, sondern müssen ausbiegen und um den Rand des Loches herumfliessen. Man sieht schon ohne Weiteres ein, dass an den Rändern des Loches die Geschwindigkeit dadurch gesteigert werden muss. Diese Geschwindigkeit entspricht aber der Spannung und damit der Beanspruchung des Materials in der verdrehten Welle. In der That kann man auch quantitativ den Einfluss des Sprunges leicht nachweisen; es zeigt sich, dass die Spannung am Rande dadurch gerade auf das Doppelte erhöht wird. Auf die Durchführung der Rechnung verzichte ich hier, da sie auf hydrodynamischen Betrachtungen beruht, die ich hier noch nicht als bekannt voraussetzen kann. Ueberhaupt bin ich aus diesem Grunde nur flüchtig auf die hier besprochenen Erscheinungen eingegangen.

§ 71. Theorieen von Boussinesq und von Hertz.

Zwei elastische Körper, für die das Hooke'sche Gesetz gilt, mögen sich im natürlichen Zustande in einem Punkte ihrer Oberflächen, die irgendwie gekrümmt sein können oder

auch längs einer Erzeugenden, wenn z. B. die Oberflächen cylinderförmig sind, berühren. Wenn hierauf beide mit einem gewissen Drucke aufeinander gepresst werden, tritt eine Abplattung ein und die Körper berühren sich jetzt in einer Fläche, in der sich jener Druck überträgt und die deshalb als die Druckfläche bezeichnet wird. Es entsteht nun die Aufgabe, den Formänderungs- und den Spannungszustand beider Körper unter den beschriebenen Umständen näher zu untersuchen.

Mit dieser Aufgabe beschäftigt sich die Theorie von Hertz und nahe verwandt damit ist die Theorie von Boussinesq, von der ich zunächst einen kurzen Abriss geben will, ohne jedoch tiefer darauf einzugehen, als es dem Plane dieses Buches entspricht.

Man denke sich einen Körper, der nach oben hin durch eine horizontale Ebene begrenzt ist und der so grosse Abmessungen hat, dass er nach allen übrigen Seiten hin als unbegrenzt angenommen werden kann. Wenn der Erdboden dem Hooke'schen Gesetze gehorchte, könnte man sich die ganze Erde unter diesem Körper vorstellen. Obschon dies nun freilich nach Versuchen, die ich nach dieser Richtung hin anstellte, nicht zutrifft, will ich doch der kürzeren Ausdrucksweise wegen den Körper als die Erde bezeichnen. An irgend einer Stelle dieses Erdbodens sei eine Last P aufgebracht. Die Oberfläche des Erdbodens senkt sich unter dieser Last etwas ein und wir wollen nun untersuchen, in welchen Zwangszustand die Erde in der Umgebung gerathen müsste, wenn das Hooke'sche Gesetz giltig wäre. Den Ursprung des Coordinatensystems lasse ich mit dem Angriffspunkte der Last P zusammenfallen und die Z-Axe soll senkrecht nach abwärts gehen. Ich sehe davon ab, das Coordinatensystem auf dem bewegten Körper selbst festzulegen, sondern denke mir es in absoluter Ruhe. Anstatt dessen kann ich auch sagen, dass sich die entfernter liegenden Theile der Erde unter der Belastung nicht mehr merklich gegen das Coordinatensystem verschieben sollen.

Die X- und die Y-Axe laufen horizontal und fallen im ursprünglichen Zustande in die Erdoberfläche. Die Entfernung irgend eines Punktes der Erde vom Coordinatenursprunge sei mit r bezeichnet, so dass also

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{343}$$

ist. Für $r = \infty$ müssen dann nach der Wahl des Coordinatensystems die elastischen Verschiebungen $\xi\,\eta\,\zeta$ verschwinden.

Diese Verschiebungen selbst müssen zunächst den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen entsprechen, die wir in der Form der Gl. (304) nochmals anschreiben wollen:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} &= 0, \\
\nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial y} &= 0, \\
\nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial z} &= 0, \\
e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} &+ \frac{\partial \zeta}{\partial z}.
\end{aligned}$$

Die Definitionsgleichung für die specifische Volumenänderung e habe ich am Schlusse noch einmal dazu gefügt.

Wenn p, q, n drei Constanten bedeuten, deren Werthe später passend zu bestimmen sind, gibt das System der Verschiebungen

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= -p\frac{x}{r(z+r)} + n\frac{zx}{r^3} \\
\eta &= -p\frac{y}{r(z+r)} + n\frac{zy}{r^3} \\
\zeta &= \quad q\cdot\frac{1}{r} + n\frac{z^2}{r^3}
\end{aligned}\right\}. \tag{344}$$

wie ich jetzt zeigen will, einen möglichen, also einen mit den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen verträglichen Zwangszustand an. Dazu sind einige etwas langwierige Rechnungen vorzunehmen, die aber an sich ganz einfach sind und nach allgemein bekannten Regeln ausgeführt werden können. Zunächst bilde ich

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -p\left(\frac{1}{rz + r^2} - \frac{x}{(rz + r^2)^2}(z + 2r)\frac{\partial r}{\partial x}\right) + n\left(\frac{z}{r^3} - 3\frac{zx}{r^4}\frac{\partial r}{\partial x}\right).$$

Um den partiellen Differentialquotienten von r nach x zu ermitteln, differentiire ich Gl. (343) partiell nach x und erhalte

$$2r\frac{\partial r}{\partial x} = 2x, \quad \text{also} \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}.$$

Setzt man dies in die vorausgehende Gleichung ein und zieht zusammen, so erhält man

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -p \cdot \frac{r^2(z + r) - x^2(z + 2r)}{(z + r)^2 r^3} + n\frac{z(r^2 - 3x^2)}{r^5} \tag{345}$$

Wir brauchen nur x mit y zu vertauschen, um sofort

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = -p\frac{r^2(z + r) - y^2(z + 2r)}{(z + r)^2 r^3} + n\frac{z(r^2 - 3y^2)}{r^5} \tag{346}$$

zu erhalten. Ebenso bilden wir durch Differentiiren

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = -q\frac{z}{r^3} + n\frac{z(2r^2 - 3z^2)}{r^5}. \tag{347}$$

Durch Addition der drei Werthe finden wir e. Vereinigt man zunächst die drei Glieder mit dem Factor n, so erhält man mit Rücksicht auf Gl. (343)

$$n\frac{z}{r^3}.$$

Die beiden Glieder mit dem Factor p dagegen liefern

$$-p\frac{2r^2(z + r) - (r^2 - z^2)(z + 2r)}{(z + r)^2 r^3}$$

und dies vereinfacht sich nach Ausmultipliciren im Zähler, Zusammenziehen und Herausheben von z zu

$$-p\frac{z(r^2 + 2rz + z^2)}{(z + r)^2 r^3}$$

oder nach Kürzen mit $(z + r)^2$ zu

$$-p\frac{z}{r^3}.$$

Im Ganzen haben wir daher für e

$$e = (n - p - q)\frac{z}{r^3}. \tag{348}$$

Wir müssen jetzt $\nabla^2 \xi$ bilden. Die unmittelbare Ausführung der Differentiationen würde zu allzulangen und daher

schwer zu übersehenden Formeln führen. Wir wollen uns desshalb hierzu einiger einfacher Hülfssätze bedienen. Wenn A und B zwei beliebige Functionen von $x\,y\,z$ sind, so ist

$$\frac{\partial}{\partial x}(AB) = A\frac{\partial B}{\partial x} + B\frac{\partial A}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(AB) = A\frac{\partial^2 B}{\partial x^2} + 2\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial x} + B\frac{\partial^2 A}{\partial x^2}.$$

Die gleichen Formeln gelten auch für die Differentiationen nach y und z. Fasst man daher die drei zweiten Differentialquotienten zusammen, so findet man

$$\nabla^2(AB) = A\nabla^2 B + B\nabla^2 A + 2\left(\frac{\partial A}{\partial x}\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{\partial B}{\partial z}\right). \quad (349)$$

Ferner sei die Differential-Operation ∇^2 an einem Bruche $\frac{1}{A}$ vorgenommen. Man hat

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{A}\right) = -\frac{1}{A^2}\frac{\partial A}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{A}\right) = -\frac{1}{A^2}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{2}{A^3}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2$$

und daher nach Zusammenfassen der Resultate für die Differentiationen nach allen drei Axenrichtungen

$$\nabla^2\left(\frac{1}{A}\right) = -\frac{1}{A^2}\nabla^2 A + \frac{2}{A^3}\left(\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^2\right). \quad (350)$$

Jetzt soll die Operation ∇^2 an r, das durch Gl. (343) definirt ist, ausgeführt werden. Wir fanden schon

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$$

und erhalten daraus durch nochmalige Differentiation

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{r^2 - x^2}{r^3}$$

und ähnlich für die beiden anderen Axenrichtungen. Im Ganzen wird daher mit Rücksicht auf Gl. (343)

$$\nabla^2 r = \frac{2}{r}. \quad (351)$$

Setzt man in Gl. (350) r an Stelle von A, so findet man nach einer kleinen Umrechnung

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0. \tag{352}$$

Dies ist, nebenbei bemerkt, eine der bekanntesten Gleichungen der Potentialtheorie. — Wir gehen jetzt näher auf unser Ziel los und bilden

$$\nabla^2(z + r) = \nabla^2 z + \nabla^2 r = \frac{2}{r}$$

und auf Grund von Gl. (350)

$$\nabla^2\left(\frac{1}{z+r}\right) = -\frac{1}{(z+r)^2}\cdot\frac{2}{r} + \frac{2}{(z+r)^3}\left(\left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{r+z}{r}\right)^2\right),$$

was sich nach einfacher Umformung vereinfacht zu

$$\nabla^2\left(\frac{1}{z+r}\right) = \frac{2}{r(z+r)^2}. \tag{353}$$

Ebenso bilden wir nach Gl. (349), mit Berücksichtigung von Gl. (352)

$$\nabla^2\left(\frac{x}{r}\right) = \nabla^2\left(x\cdot\frac{1}{r}\right) = -2\frac{x}{r^3}. \tag{354}$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir ohne zu grosse Weitläufigkeiten daran gehen, die Operation ∇^2 an ξ auszuführen. Wir finden zunächst für das erste Glied nach Gl. (349)

$$\nabla^2\frac{x}{r(z+r)} = \frac{x}{r}\cdot\nabla^2\left(\frac{1}{z+r}\right) + \frac{1}{z+r}\cdot\nabla^2\frac{x}{r} + 2\left\{-\left(\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}\right)\frac{x}{r(z+r)^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{xy}{r^3}\cdot\frac{y}{r(z+r)^2} + \frac{xz}{r^3}\cdot\frac{r+z}{r(z+r)^2}\right\}.$$

Mit Berücksichtigung der Gleichungen (353) und (354) vereinfacht sich dies zu

$$\nabla^2\frac{x}{r(z+r)} = \frac{2x}{r^2(r+z)^2} - \frac{2x}{r^3(r+z)} + 2x\frac{-r^2+x^2+y^2+z^2+rz}{r^4(z+r)^2}$$
$$= 2x\frac{r^2 - r(z+r) + rz}{r^4(z+r)^2}.$$

Die Glieder im Zähler heben sich gegeneinander weg und daher ist

$$\nabla^2\frac{x}{r(z+r)} = 0. \tag{355}$$

Wir können daraus sofort schliessen, dass auch

$$\nabla^2\frac{y}{r(z+r)} = 0 \tag{356}$$

sein muss.

Jetzt gehen wir dazu über, die Operation ∇^2 an dem zweiten Gliede des für ξ aufgestellten Ausdrucks auszuführen. Wir finden zunächst

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -3\frac{x}{r^5}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r^3}\right) = -\frac{3}{r^5} + 15\frac{x^2}{r^7}$$

und durch Zusammenfassen der drei Differentialquotienten

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{6}{r^5}. \tag{357}$$

Da $\nabla^2 zx = 0$ ist, erhalten wir nach Gl. (349)

$$\nabla^2\frac{zx}{r^3} = \frac{6xz}{r^5} - 2\left(z\frac{3x}{r^5} + x\frac{3z}{r^5}\right)$$

oder

$$\nabla^2\frac{zx}{r^3} = -\frac{6xz}{r^5}. \tag{358}$$

Jetzt endlich können wir dazu übergehen, die Werthe für die Verschiebungen in die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen einzusetzen, um uns davon zu überzeugen, ob diese dadurch befriedigt werden. Für den Differentialquotienten von e nach x hat man nach Gl. (348)

$$\frac{\partial e}{\partial x} = -3(n-p-q)\frac{zx}{r^5}.$$

Die erste der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen

$$\nabla^2\xi + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} = 0$$

wird nun in der That identisch befriedigt, wenn wir den soeben angegebenen Werth von $\frac{\partial e}{\partial x}$ und ausserdem den aus den vorausgehenden Betrachtungen abgeleiteten Werth

$$\nabla^2\xi = -6n\frac{zx}{r^5}$$

einsetzen, falls wir die Constanten pqn so wählen, dass sie die Bedingungsgleichung

$$2n + \frac{m}{m-2}(n-p-q) = 0 \tag{359}$$

erfüllen. Die Betrachtung der zweiten Gleichgewichtsbedingung

$$\nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial y} = 0$$

liefert nichts Neues, da x und y bezw. ξ und η ganz symmetrisch in allen Formeln auftreten und daher überall miteinander vertauscht werden können; die Erfüllung dieser Gleichung ist daher ebenfalls an die Bedingungsgleichung (359) gebunden.

Wir bilden jetzt $\nabla^2 \zeta$. Das erste Glied davon verschwindet nach Gl. (352). Beim zweiten erhalten wir nach Gl. (349)

$$\nabla^2 \frac{z^2}{r^3} = z^2 \nabla^2 \frac{1}{r^3} + \frac{1}{r^3} \cdot 2 - 4z \cdot \frac{3z}{r^5}$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (357)

$$\nabla^2 \frac{z^2}{r^3} = \frac{2r^2 - 6z^2}{r^5}. \tag{360}$$

Damit wird

$$\nabla^2 \zeta = n \frac{2r^2 - 6z^2}{r^5}.$$

Ferner ist nach Gl. (348)

$$\frac{\partial e}{\partial z} = (n - p - q)\left(\frac{1}{r^3} - 3\frac{z^2}{r^5}\right)$$

und wenn wir diese Werthe in die dritte der allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen

$$\nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial z} = 0$$

einsetzen, finden wir, dass diese ebenfalls identisch erfüllt wird, falls nur zwischen den Coefficienten $p\,q\,n$ die Bedingungsgleichung (359) besteht.

Es ist also jetzt nach diesen mühsamen Rechnungen in der That nachgewiesen, dass das System der Verschiebungen $\xi\,\eta\,\zeta$ in den Gl. (344) einen möglichen Zwangszustand darstellt. Es muss jetzt noch untersucht werden, ob es zugleich jener ist, der den Grenzbedingungen unserer Aufgabe entspricht. Dazu gehört vor allen Dingen, dass die wagrechte Erdoberfläche sonst überall, mit Ausnahme der Angriffsstelle der Last P, frei ist, dass also für $z = 0$ die Spannungen σ_z

mit Ausnahme der Nachbarschaft des Ursprungs des Coordinatensystems, verschwinden müssen, während zugleich die Spannungen τ_{zx} und τ_{zy} an der ganzen Oberfläche ohne Ausnahme überall gleich Null sein müssen. Wir prüfen zunächst die letzte Bedingung. Nach den Gl. (288) ist

$$\tau_{zx} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)$$

$$\tau_{zy} = G\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right).$$

Für die hierin vorkommenden Differentialquotienten findet man nach den Gleichungen (344)

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = p\frac{x}{r^2(z+r)^2}\left(r + \frac{z^2}{r} + 2z\right) + \frac{nx}{r^3} - 3n\frac{z^2x}{r^5}$$

$$= p\frac{x}{r^3} + nx\frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -q\frac{x}{r^3} - 3n\frac{z^2x}{r^5}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial z} = p\frac{y}{r^3} + ny\frac{r^2 - 3z^2}{r^5}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} = -q\frac{y}{r^3} - 3n\frac{z^2y}{r^5}.$$

Setzt man diese Werthe ein, so wird

$$\left.\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\frac{x}{r^3}\left\{p + n - q - 6n\frac{z^2}{r^2}\right\} \\ \tau_{zy} &= G\frac{y}{r^3}\left\{p + n - q - 6n\frac{z^2}{r^2}\right\} \end{aligned}\right\} \quad (361)$$

Für $z = 0$ sollen diese Spannungscomponenten überall verschwinden. Daher muss zwischen den Constanten $p\,q\,n$ die fernere Bedingungsgleichung

$$p + n - q = 0 \quad (362)$$

erfüllt sein. Wenn diese besteht, ist aber die fragliche Grenzbedingung in der That überall befriedigt.

Wir kommen jetzt zu der Normalspannung σ_z. Für diese hat man nach den Gleichungen (292)

$$\sigma_z = 2G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2}\right).$$

Der hierin vorkommende Differentialquotient ist nach den Gl. (344)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial z} = -q\frac{z}{r^3} + n\left(\frac{2z}{r^3} - \frac{3z^3}{r^5}\right).$$

Setzt man ferner noch e aus Gl. (348) ein, so wird

$$\sigma_z = 2G\frac{z}{r^3}\left\{-q + 2n + \frac{n-p-q}{m-2} - 3n\frac{z^2}{r^2}\right\}.$$

Dieser Ausdruck wird von selbst für $z = 0$ überall zu Null, mit Ausnahme der unmittelbaren Nachbarschaft des Ursprungs. Dort ist nämlich zugleich $r = 0$ und σ_z nimmt die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Mit Hilfe der Gl. (359) und (362), die zwischen den Coefficienten $p\,q\,n$ bestehen müssen, kann man den Ausdruck übrigens noch vereinfachen. Die Auflösung dieser Gleichungen

$$2n + \frac{m}{m-2}(n-p-q) = 0$$

$$p + n - q = 0$$

nach p und q liefert nämlich

$$p = \frac{m-2}{m}n; \qquad q = \frac{2m-2}{m}n. \tag{363}$$

Setzt man diese Werthe in die Gleichung für σ_z ein, so geht diese über in

$$\sigma_z = -6Gn\frac{z^3}{r^5}, \tag{364}$$

da sich die anderen Glieder alle gegeneinander wegheben.

Die Bestimmung der Vertheilung der Druckkräfte σ_z innerhalb der Druckfläche selbst können wir auf Grund dieses Ausdrucks nicht versuchen, da die ganze Betrachtung von vornherein darauf verzichtete, die Erscheinungen in nächster Nähe der Angriffsstelle der Belastung darzustellen. Sonst hätte der Ansatz (344) für die Verschiebungscomponenten überhaupt nicht in solcher Art gemacht werden dürfen, da er schon die Verschiebungscomponenten im Ursprung in der Form $\frac{0}{0}$ ergibt. Die Untersuchung lässt es vielmehr dahingestellt, wie sich die Verhältnisse an der Angriffsstelle der Last in Wirk-

lichkeit gestalten und beschränkt sich auf die Behandlung des Zwangszustandes an den weiter ab liegenden Stellen. Dabei verlässt man sich darauf, dass es für diese ferner liegenden Stellen ohnehin ganz gleichgültig ist, welche genauere Art der Lastvertheilung an der Angriffsstelle vorliegt, ganz so wie es auch schon bei der Saint-Vénant'schen Theorie geschehen war.

Dagegen bleibt jetzt noch die Constante n zu bestimmen in der Art, dass jedenfalls der ganze übertragene Druck gleich P ist. Wir führen dies, um nicht mit den Verhältnissen an der Druckfläche in Berührung zu kommen, so aus, dass wir eine horizontale Ebene im festen Abstande z vom Ursprunge ziehen und den ganzen Druck σ_z, der durch diese Ebene übertragen wird, gleich P setzen. Denn offenbar muss, wenn vom Eigengewichte abgesehen wird, derselbe Druck P von jeder horizontalen Schicht auf die folgende weiter geleitet werden.

In dieser horizontalen Ebene sei ein Kreis vom Halbmesser ϱ gezogen, dessen Mittelpunkt auf der Z-Axe liegt. Dann ist

$$\varrho^2 = r^2 - z^2 \tag{365}$$

und an allen Stellen dieses Kreises hat σ_z nach Gl. (364) denselben Werth. In einem ringförmigen Streifen, der von den Radien ϱ und $\varrho + d\varrho$ eingeschlossen wird, überträgt sich daher der Druck

$$6 G n \frac{z^3}{(\varrho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \cdot 2\pi\varrho d\varrho$$

und das Integral dieses Ausdrucks von $\varrho = 0$ bis $\varrho = \infty$ muss für jedes constante z gleich P sein. Von der Berücksichtigung des negativen Vorzeichens in Gl. (364) wurde jetzt abgesehen; es drückt nur aus, dass σ_z eine Druckspannung bedeutet, wenn n positiv ist. Die Integration ist leicht auszuführen; man hat

$$\int \frac{2\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = -\frac{2}{3}(\varrho^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}.$$

Wenn man die Grenzen einsetzt, wird daher

$$\int_0^\infty \frac{2\varrho\, d\varrho}{(\varrho^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2}{3 z^3}$$

und die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht der Spannungen σ_z mit P lautet

$$6 G n z^3 \pi \cdot \frac{2}{3 z^3} = P.$$

Diese Gleichung ist nun in der That für jedes z erfüllt, wenn man

$$n = \frac{P}{4\pi G} \tag{366}$$

setzt. Hiermit sind alle Constanten $p\,q\,n$ den Grenzbedingungen entsprechend bestimmt.

Die ergänzten und vollständig durchgeprüften Verschiebungscomponenten $\xi\,\eta\,\zeta$ lauten daher jetzt

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= -\frac{m-2}{4\pi m G} P \frac{x}{r(z+r)} + \frac{P}{4\pi G}\frac{zx}{r^3} \\
\eta &= -\frac{m-2}{4\pi m G} P \frac{y}{r(z+r)} + \frac{P}{4\pi G}\frac{zy}{r^3} \\
\zeta &= \frac{2m-2}{4\pi m G} P \cdot \frac{1}{r} + \frac{P}{4\pi G}\frac{z^2}{r^3}
\end{aligned}\right\} \tag{367}$$

Zum Vergleiche dieser Ergebnisse mit der Erfahrung eignet sich am besten die Formel für ζ, bezogen auf Punkte in der Oberfläche, da die Messung der Einsenkungen der Oberfläche am leichtesten ausgeführt werden kann. Mit $z = 0$ verschwindet das zweite Glied des Ausdrucks für ζ und das erste lässt sich mit Rücksicht auf die Gl. (34)

$$G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

in der etwas bequemeren Form

$$\zeta_0 = \frac{m^2 - 1}{m^2 \pi E} \cdot \frac{P}{r} \tag{368}$$

anschreiben. Man schliesst daraus, dass die Oberfläche in ein Umdrehungshyperboloid übergehen müsste, wenn der Erdboden das Hooke'sche Gesetz befolgte. Ich erwähnte indessen schon in § 38, wo ich Messungen mittheilte, die ich hierüber ange-

stellt habe, dass diese Folgerung für den Erdboden nicht zutrifft.

Mit den Gleichungen (367) ist der ganze Zwangs- und Spannungszustand des Körpers gegeben. Man kann daran leicht weitere Folgerungen über die Spannungsvertheilung knüpfen. Ich will mich jetzt mit ausführlicheren Rechnungen hierüber nicht aufhalten, sondern nur noch einige Resultate angeben, die man sich, wenn es gewünscht wird, leicht selbst ableiten kann.

Es genügt, wenn man den Spannungszustand für alle Punkte untersucht, die auf irgend einer durch die Z-Axe gelegten Ebene enthalten sind, da für alle anderen Ebenen dieser Art dasselbe gilt. Wir wählen dazu die XZ-Ebene. Ausserdem ziehe man eine horizontale Ebene $z = \text{const.}$, die die XZ-Ebene in einer wagrechten Linie schneidet. Für alle Punkte dieser Linie wird (wie übrigens schon aus Symmetriegründen zu schliessen ist) τ_{zy} zu Null. Die Spannungscomponenten σ_z und τ_{zx} setze man zur resultirenden Spannung p für den wagrechten Schnitt zusammen. Man findet dann, dass die Richtung von p durch den Ursprung geht und der Grösse nach durch die Formel

$$p = \frac{3P}{2\pi}\frac{z^2}{r^4} \qquad (369)$$

dargestellt wird. Ferner denke man sich einen Kreis von beliebigem Halbmesser durch den Ursprung gelegt, dessen Mittelpunkt auf der Z-Axe enthalten ist. Für alle Punkte dieses Kreises nimmt dann, wie sich leicht zeigen lässt, p denselben Werth an. — Damit hat man schon ein ziemlich deutliches Bild der Spannungsvertheilung gewonnen, namentlich wenn noch hinzugefügt wird, dass p umgekehrt proportional dem Quadrate des Halbmessers dieses Kreises ist.

§ 72. **Fortsetzung; Theorie von Hertz.**

Die Hertz'sche Theorie bewegt sich in ganz ähnlichen Bahnen, wie die von Boussinesq, macht aber dabei noch etwas mehr Rechnungen erforderlich. Aus diesem Grunde habe ich

mich hier für eine etwas ausführlichere Behandlung der Boussinesq'schen Theorie entschieden, während ich mich darauf beschränken werde, von der Hertz'schen nur die wichtigsten Resultate mitzutheilen. Es kommt mir hier eigentlich nur darauf an, eine ungefähre Vorstellung von dem Gedankengange solcher Betrachtungen zu geben, während für ein eingehenderes Studium auf die Originalarbeiten oder auch auf das schon in der Vorrede erwähnte Werk von Love, Treatise on the theory of Elasticity, 2 vol. Cambridge 1892—1893 verwiesen werden muss.

Auch Hertz giebt ein System von Verschiebungscomponenten $\xi\,\eta\,\zeta$ an, das mit den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen verträglich ist und die Grenzbedingungen befriedigt. Dabei wird angenommen, dass zwei Körper mit beliebig gestalteter Oberfläche aufeinander gedrückt werden, dass aber die Abmessungen der Druckfläche klein im Vergleiche zu den Krümmungshalbmessern der Oberflächen bleiben. Der wesentliche Unterschied gegenüber den Untersuchungen des vorigen Paragraphen besteht indessen darin, dass ein Ausdruck für den Zwangszustand aufgestellt wird, der grade in der Druckfläche und deren Umgebung die Erscheinungen genau darstellt, während in endlichen Entfernungen davon die Verschiebungen $\xi\,\eta\,\zeta$ im Vergleiche hiermit nahezu verschwinden.

Zunächst zeigt sich, dass die Druckfläche die Gestalt eines Kegelschnitts annimmt, dass sie also etwa durch eine Ellipse oder in besonderen Fällen durch einen Kreis begrenzt wird.

Die Ausdrücke für die Verschiebungscomponenten sind hier complicirter als bei Boussinesq. Man kann sich die Sache etwa in folgender Weise klar machen. Drückt man die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen in der Form von Gl. (296)

$$\nabla^2 \mathfrak{v} + \frac{m}{m-2} \nabla \operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$$

aus, so weiss man zunächst aus der Potentialtheorie, dass die Kraft $\mathfrak{v}$, die von irgendwie gelegenen Massen nach dem Gesetze des umgekehrten Quadrats der Entfernung ausgeht, überall ausserhalb der Massen, diese Gleichung befriedigt. Man denke

sich also etwa die Druckfläche mit einer solchen Masse, z. B. mit Electricität nach einem bestimmten Dichtigkeitsgesetze belegt und die davon ausgehende electrostatische Kraft abgeleitet. Setzt man dann die Verschiebung im elastischen Körper der gefundenen Kraft überall proportional, so hat man schon einen möglichen Zwangszustand. Dieser befriedigt aber noch nicht die vorgeschriebenen Grenzbedingungen. Man kann aber von da aus auch zu verwandten Functionen übergehen, die ebenfalls die Grundgleichung erfüllen und so nach einigem Probiren zu der wirklichen Lösung gelangen. Auf diesem Wege scheint wenigstens Hertz, obschon er sich selbst nicht darüber ausspricht, zu seinem Resultate gelangt zu sein.

Die Potentialfunction der auf der Druckfläche vertheilten Massen sei mit V bezeichnet. Dann bilde man eine neue Function Π, die durch die Gleichung

$$\Pi = azV + b\int_z^\infty V dz \tag{370}$$

definirt ist und setze

$$\xi = \frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad \eta = \frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad \zeta = \frac{\partial \Pi}{\partial z} + cV. \tag{371}$$

Man kann ohne Schwierigkeit nachweisen, dass dieses System von Verschiebungen die Grundgleichungen befriedigt, falls zwischen den Constanten a, b, c die Bedingung

$$2a + \frac{m}{m-2}(2a + c) = 0 \tag{372}$$

erfüllt wird. Dann wendet man sich der Untersuchung der Grenzbedingungen zu. Auf der Körperoberfläche sollen die Schubspannungen überall verschwinden. Wenn man τ_{zx} und τ_{zy} bildet, überzeugt man sich, dass dies zutrifft, wenn zwischen den Constanten a, b, c noch die fernere Bedingungsgleichung

$$2a - 2b + c = 0 \tag{373}$$

besteht. Dann bildet man σ_z; man erhält nach einigen Umrechnungen, nachdem man b und c mit Hülfe von (372) und (373) eliminirt hat,

$$\sigma_z = 2aG\left(z\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - \frac{\partial V}{\partial z}\right). \tag{374}$$

An der Körperoberfläche, also für $z = 0$ wird dies

$$\sigma_{z,0} = -2aG\frac{\partial V}{\partial z}. \tag{375}$$

Dies wird aber in der That überall zu Null, mit Ausnahme des Inneren der Druckfläche. Zugleich sieht man jetzt auch den Grund ein, weshalb die gravitirenden Massen, von denen das Potential V zu nehmen war, über die Druckfläche vertheilt sein mussten.

Das ist so etwa im grossen Ganzen der Gedankengang der Hertz'schen Untersuchung; natürlich sind dabei beide Körper ins Auge zu fassen und auf das gegenseitige Verhalten beider beziehen sich auch noch einige Grenzbedingungen, worauf ich aber hier nicht weiter eingehen will.

Die wichtigsten Resultate, zu denen Hertz dabei gelangte, sind folgende. Man denke sich im natürlichen Zustande, wenn beide Körper sich nur in einem Punkte berühren, in nächster Nachbarschaft des Berührungspunktes, alle zusammengehörigen Punkte beider Oberflächen aufgesucht, die einen constanten kleinen Abstand e in der Richtung der Z-Axe voneinander besitzen. Diese Punkte geben bei ihrer Projection auf die Berührungsebene eine Ellipse. Die Druckfläche ist dann auch eine Ellipse von denselben Axenrichtungen; dagegen ist das Verhältniss der Axen von dem der Ellipse $e = \text{const.}$ verschieden. Für die beiden Halbaxen a und b der Druckfläche findet Hertz

$$\left.\begin{aligned} a &= \mu\sqrt[3]{\frac{3P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{8(\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})}} \\ b &= \nu\sqrt[3]{\frac{3P(\vartheta_1 + \vartheta_2)}{8(\varrho_{11} + \varrho_{12} + \varrho_{21} + \varrho_{22})}} \end{aligned}\right\} \tag{376}$$

Die Zahlen-Coefficienten μ und ν sind nur von dem Axenverhältnisse der Ellipse $e = \text{const.}$ abhängig. Hertz gibt dafür eine Tabelle. Wenn die Ellipsen $e = \text{const.}$ zu Kreisen werden, ist $\mu = \nu = 1$ und die Druckfläche wird auch ein Kreis. P ist der Druck, mit dem beide Körper aufeinander gepresst

werden; ϑ_1 und ϑ_2 sind Elasticitätsconstanten der beiden aufeinander gepressten Körper und zwar ist für jeden nach den in diesem Buche gebrauchten Bezeichnungen

$$\vartheta = \frac{4(m^2-1)}{m^2 E} = \frac{2(m-1)}{m G}$$

zu setzen. Ferner bedeuten die ϱ die 4 Hauptkrümmungen beider Körper im natürlichen Zustande an der Berührungsstelle (also die reciproken Werthe der Hauptkrümmungshalbmesser).

Die Vertheilung des Normaldrucks σ_z über die Druckfläche wird durch die Formel

$$\sigma_z = \frac{3P}{2ab\pi}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \qquad (377)$$

dargestellt. Am Rande der Druckfläche ist $\sigma_z = 0$ und nach der Mitte hin wächst es wie die Ordinaten eines über der Druckfläche construirten Ellipsoids. In der Mitte wird σ_z am grössten und zwar $1\frac{1}{2}$mal so gross als im Durchschnitt für die ganze Fläche. Bezeichnet man den grössten Werth von σ_z mit σ_0, so wird speciell für kreisförmige Druckflächen

$$\sigma_0 = \frac{3}{2\pi}\sqrt[3]{P\left\{\frac{8(\varrho_{11}+\varrho_{12}+\varrho_{21}+\varrho_{22})}{3(\vartheta_1+\vartheta_2)}\right\}^2} \qquad (378)$$

und die Annäherung α, die beide Körper durch die Abplattung erfahren, wird

$$\alpha = \frac{3P(\vartheta_1+\vartheta_2)}{16a}. \qquad (379)$$

Der Halbmesser der Druckfläche wächst proportional mit der dritten Wurzel des Druckes P und in demselben Masse wächst auch die Beanspruchung des Materials; die Annäherung α wächst dagegen proportional mit der zweidrittelten Potenz von P.

Speciell wird für zwei Kugeln aus demselben Material mit r_1 und r_2 nach Umrechnung der Elasticitätsconstanten ϑ auf E und mit $m = \frac{10}{3}$

$$a = 1{,}11\sqrt[3]{\frac{P}{E}\cdot\frac{r_1 r_2}{r_1 \pm r_2}}. \qquad (380)$$

Das untere Vorzeichen im Nenner ist zu nehmen, wenn die eine Kugel eine Hohlkugel ist. Ferner wird

$$\sigma_0 = 0{,}388 \sqrt[3]{PE^2\left(\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}\right)^2}, \tag{381}$$

$$\alpha = 1{,}23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2}\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}. \tag{382}$$

Praktisch wichtig ist namentlich der Fall, dass an Stelle der einen Kugel eine Platte tritt. Man braucht dann nur den betreffenden Halbmesser in den vorausgehenden Formeln unendlich gross zu setzen. Dadurch erhält man für eine Platte und eine Kugel vom Halbmesser r

$$a = 1{,}11 \sqrt[3]{\frac{Pr}{E}}, \tag{383}$$

$$\sigma_0 = 0{,}388 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}}, \tag{384}$$

$$\alpha = 1{,}23 \sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 r}}. \tag{385}$$

Ferner erhält man für zwei rechtwinklig gekreuzte Cylinder von demselben Halbmesser r

$$\sigma_0 = 0{,}388 \sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}}. \tag{386}$$

Praktisch wichtig ist ferner noch der Fall, dass sich zwei Cylinder von den Halbmessern r_1 und r_2 längs einer Erzeugenden berühren. Man muss sich die Cylinder unendlich lang denken. Die eine Halbaxe der Druckellipse wird dann auch unendlich gross und für die andere erhält man

$$a = 1{,}52 \sqrt{\frac{P'}{E}\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}, \tag{387}$$

$$\sigma_0 = 0{,}418 \sqrt{P'E\frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}. \tag{388}$$

Die Wurzeln sind hier Quadratwurzeln, worauf ich ausdrücklich aufmerksam mache; unter P' ist der Druck auf die Längeneinheit der Cylinder zu verstehen; P' hat daher die Dimension kg/cm.

Wenn einer der Cylinder durch eine Platte ersetzt wird (z. B. bei den Walzenlagern der Brückenträger) wird

$$a = 1{,}52 \sqrt{\frac{P'r}{E}} \tag{389}$$

$$\sigma_0 = 0{,}418 \sqrt{\frac{P'E}{r}}. \tag{390}$$

Vorausgesetzt wird dabei, dass die Platte hinreichend dick ist, so dass die Spannungen sich nahezu so vertheilen, als wenn die Dicke unendlich gross wäre.

§ 73. Die Härte der Körper, besonders der Metalle.

Der Begriff der Härte läuft neben den anderen Arten der Festigkeit ohne rechten Zusammenhang her; wenigstens war es so vor der Untersuchung, die Hertz darüber angestellt hat. Die Mineralogen prüften die Härte der Gesteine durch Ritzversuche und sie haben eine besondere Härtescala aufgestellt, in die die einzelnen Mineralien nach Ordnungsnummern eingereiht werden. Bei dieser Art der Prüfung und Eintheilung fehlt jede Uebersicht über den Zusammenhang der Härte mit den übrigen elastischen und Festigkeitseigenschaften der Körper. Von den Metallen wird der Begriff der Härte namentlich beim Stahle vielfach gebraucht. Man versteht dann unter der Härte im Allgemeinen den Widerstand gegen eine Bearbeitung durch schneidende Werkzeuge auf der Drehbank, der Hobelmaschine, der Bohrmaschine u. s. w. Da es sich gezeigt hat, dass diese Eigenschaft des Stahls besonders von dem Gehalte an Kohlenstoff (aber auch an Mangan, Chrom, Wolfram u. s. f.) abhängt, begnügt man sich häufig damit, die Härte des Stahls einfach durch Angabe des Kohlenstoffgehalts zu kennzeichnen.

Dieser Unsicherheit in der Feststellung des Begriffes der Härte hat Hertz durch seine Untersuchung abgeholfen. Er machte darauf aufmerksam, dass es sich bei der Härte immer um eine Festigkeitseigenschaft handelt, die sich bei der Berührung zweier Körper von gleicher oder verschiedener Art unter einem gewissen Drucke geltend macht. Wird unter

einem bestimmten Drucke bei der Berührung ein bleibender Eindruck hervorgerufen, so entsteht ein Ritz oder überhaupt eine sich der Länge nach hinziehende Beschädigung, wenn man den einen Körper unter diesem Drucke über den anderen fortbewegt. Wenn man sich über die Eigenschaft der Härte Rechenschaft ablegen will, muss man daher zunächst den Spannungs- und Zwangszustand untersuchen, der bei dem Aufeinanderdrücken zweier Körper entsteht. Diese Aufgabe hat aber Hertz durch die Entwickelungen gelöst, von denen im vorigen Paragraphen die Rede war.

Um zu einer absoluten Messung der Härte zu gelangen, schlug Hertz vor, jeden Stoff nur mit sich selbst zu prüfen, also zwei Stücke desselben Materials aufeinanderzudrücken. Die Oberflächen beider Stücke an der Berührungsstelle sollten so gewählt werden, dass die Druckflächen kreisförmig würden. Dann soll der Druck zwischen beiden Körpern allmählich so weit gesteigert werden, bis bleibende Formänderungen entstehen. Die nach den Formeln des vorigen Paragraphen berechnete grösste Druckspannung σ_0 in der Mitte der Druckfläche bei dieser Grenzbelastung gilt nach Hertz als das absolute Maass der Härte des Körpers.

Hertz selbst hat dieses Verfahren nur an Glas geprüft. Später hat es Auerbach auf verschiedene Mineralien und eine Reihe von weichen und harten Glassorten angewendet. Im Allgemeinen wurde dabei die Hertz'sche Theorie bestätigt; es zeigte sich aber unerwarteter Weise, dass die absoluten Dimensionen der Probekörper von Einfluss auf die Härteziffern waren. Dies kann nur durch das besondere Verhalten der Oberflächenschicht bedingt sein; die Erscheinung lässt sich mit den Capillaritätserscheinungen in Parallele stellen. Wäre nämlich ein solcher Grund für die Abweichung nicht vorhanden, so liesse sich gar kein Einfluss der absoluten Dimensionen der Probekörper — so lange man das Eigengewicht immer noch vernachlässigen kann — erwarten. Man brauchte sich ja nur z. B. jedes Volumenelement in doppelter linearer Vergrösserung zu denken, alle $\xi\ \eta\ \zeta$ zu verdoppeln, die specifischen Span-

nungen aber in gleicher Grösse zu lassen, um sofort eine Lösung zu erhalten, die ebenfalls mit allen Grenzbedingungen zutrifft, wenn dies von der vorigen galt. Wenn man nicht einen principiellen Fehler in der Hertz'schen Darstellung nachzuweisen vermag, ist man daher zu der Annahme genöthigt, dass sich die äussersten Oberflächenschichten eines festen Körpers, auf die es bei den Härteerscheinungen besonders ankommt, anders verhalten als die inneren Theile des Körpers. Darin liegt auch nichts Ueberraschendes, denn dass es bei den flüssigen Körpern ebenso ist, weiss man schon lange. Dort kann sich der Unterschied durch die verschiedenen Capillaritätserscheinungen nur viel deutlicher bemerklich machen als bei den festen Körpern, bei denen er vorher der Beobachtung entgangen ist.

Bei den vorher genannten spröden Stoffen lässt sich die Härte ohne Schwierigkeit in Uebereinstimmung mit der Hertz'schen Definition bestimmen. Die erste bleibende Formänderung eines solchen Körpers besteht in dem Auftreten eines Sprunges, dessen Eintritt leicht festgestellt werden kann. Für die Prüfung der Metalle auf ihre Härte lässt sich das Verfahren in dieser Gestalt aber nicht benutzen, da es an jedem sicheren Kennzeichen für den Eintritt der ersten bleibenden Formänderung fehlt.

Auf Grund von Versuchen, die ich zuerst selbst mit verschiedenen Eisen- und Stahlsorten anstellte und deren Weiterführung ich hierauf einem meiner Schüler, Herrn Ingenieur Schwerd, übertrug, hat sich inzwischen ein Verfahren zur Härteprüfung von Metallen herausgebildet, das allen berechtigten Ansprüchen zu genügen scheint. Man entnimmt dem Stoffe, der geprüft werden soll, zwei kleine Plättchen, die auf einer Breitseite cylindrisch abgedreht oder abgeschliffen und hierauf gut polirt werden. Der Halbmesser der Cylinderfläche wird stets zu 20 mm gewählt. Diese beiden Plättchen legt man kreuzweise übereinander, so dass sie sich in einem Punkte der polirten Cylinderfläche berühren. Dann setzt man sie einem gewissen Drucke aus und beobachtet den Durchmesser

der Druckfläche. Um dies bequem ausführen zu können, überzieht man vorher die eine Cylinderfläche mit einer dünnen Russschicht. Die Druckflächendurchmesser lassen sich nach Beendigung des Versuchs leicht mit dem Zirkel abgreifen. Dann wird der Versuch mit wachsenden Druckkräften nochmals wiederholt, so lange bis Druckflächen von 3—4 mm Durchmesser entstanden sind. Man überzeugt sich nun, dass von den kleinsten Durchmessern bis zu etwa $1^1/_2$—2 mm abgesehen, die Inhalte der Druckflächen ziemlich genau proportional mit dem angewendeten Drucke wachsen. Dies steht nur scheinbar im Widerspruche mit den Formeln des vorigen Paragraphen, denn diese beziehen sich nur auf rein elastische Formänderungen, während es sich hier um bleibende handelt. Man dividirt nun jeden Druck mit dem Inhalte der zugehörigen Druckfläche in Quadratmillimetern. Diese Zahlen weichen bei den Druckflächen zwischen etwa 2 und 4 mm Durchmesser nur unerheblich voneinander ab. Man nimmt von ihnen das arithmetische Mittel und hat damit jene specifische Druckbelastung gefunden, die als Maass für die Härte des Metalls angesehen werden kann.

Der Einfluss der absoluten Dimensionen der Probestücke hat sich auch bei diesen Versuchen gezeigt. Bei drei Versuchen mit derselben Bronze ergab sich die nach dem vorher beschriebenen Verfahren ermittelte Härte bei einem Halbmesser der Cylinderfläche von

	10	20	40 mm
zu	94	77	63 kg/qmm.

Es ist daher durchaus nöthig, dass man bei dem Versuche an dem Normalradius von 20 mm festhält, um zu vergleichbaren Zahlen zu gelangen.*)

*) Nöthigenfalls rechne man die Härte auf den Normalradius um, indem man berücksichtigt, dass die gefundenen Ziffern ziemlich genau der dritten Wurzel des Radius umgekehrt proportional sind.

§ 74. Spannungszustand in einem lockeren Erdkörper.

An dieser Stelle kann es sich nicht darum handeln, eine vollständige Theorie des Erddrucks zu entwickeln; nur soweit die Methoden der Festigkeitslehre dabei in Frage kommen, soll ein gedrängter Ueberblick über diese Sache gegeben werden.

Dass ein Erdkörper auch elastische Formänderungen auszuführen vermag, ist schon bei früheren Gelegenheiten bemerkt worden; aber auch darum soll es sich hier nicht handeln. Die Hauptfrage, die wir behandeln wollen, ist vielmehr folgende. Auf den horizontalen Erdboden sei eine Schicht lockeren Sandes in überall gleicher Höhe und auf grosse horizontale Entfernungen hin aufgeschüttet. Wir betrachten den Spannungszustand in dieser Sandschicht an irgend einer Stelle, die hinreichend weit von den Rändern entfernt ist, um annzhmeu en können, dass er von deren Nähe nicht beeinflusst ist. Längs jeder Lothrechten, die wir uns in dieser Weise durch die Sandschicht gezogen denken können, haben wir dann denselben Spannungszustand zu erwarten. Für eine Z-Axe, die senkrecht nach abwärts gezogen ist, können wir σ_z sofort angeben. Denken wir uns nämlich ein Prisma von der Grundfläche dF und der Höhe z, so muss

$$\sigma_z dF = \gamma z dF,$$

also

$$\sigma_z = \gamma z \tag{391}$$

sein, wenn wir mit γ das Gewicht der Volumeneinheit des Sandes bezeichnen. Der Druck in lothrechter Richtung ist ebenso gross als er in einer Flüssigkeit von demselben γ wäre.

Zugleich folgt, dass Z mit der Richtung der einen Hauptaxe des Spannungszustandes zusammenfällt, dass

$$\sigma_x = \sigma_y$$

ebenfalls Hauptspannungen sind und dass überhaupt jede horizontale Richtung zugleich die Richtung einer Hauptspannung angibt. Das Spannungsellipsoid ist hier ein Umdrehungsellipsoid mit senkrecht gerichteter Umdrehungsaxe.

Von dem Spannungszustande in einer Flüssigkeit weicht

der in unserem Sandkörper nur dadurch ab, dass σ_x und σ_y von σ_z verschieden sind und unsere nächste Aufgabe besteht darin, das Verhältniss der horizontal gerichteten Hauptspannungen zu der senkrecht gerichteten zu ermitteln. Offenbar hängt dieses Verhältniss von den besonderen physikalischen Eigenschaften des Sandes ab. Wären die einzelnen Sandkörner ohne jede Reibung aneinander verschieblich, so hätte der Sandkörper die Eigenschaften einer Flüssigkeit und σ_x müsste gleich σ_z, das gesuchte Verhältniss also gleich 1 sein. In der That wird also der horizontal gerichtete Druck von der Grösse der Reibung abhängig sein müssen.

Um den Grad der Reibung zu kennzeichnen, bedient man sich am besten des Reibungswinkels, der hier auch als der natürliche Böschungswinkel bezeichnet wird. Am Rande des Sandkörpers dacht sich dieser beim Aufschütten unter diesem Winkel ab. Eine steilere Böschung vermag der Sand nicht anzunehmen, denn wenn man versuchen wollte, die Böschung noch steiler aufzuschütten, würden die weiter aufgebrachten Sandkörner von der Oberfläche abrollen. Nach der Lehre von der Reibung tritt dies ein, sobald der Winkel zwischen der Normalen zur Böschung und dem lothrecht nach abwärts gerichteten Gewichte den Reibungswinkel übersteigt. In der That ist also der natürliche Böschungswinkel nichts anderes als der Reibungswinkel; dieser sei mit φ bezeichnet.

Wir wollen uns jetzt aus dem Erdkörper ein kleines Prisma herausgeschnitten denken. Die Längsrichtung des Primas möge in die horizontale Richtung der Y-Axe fallen; der Querschnitt sei ein rechtwinkliges Dreieck, von dem eine Kathete dx in die Richtung der X-Axe fällt, während die andere von der Länge dz senkrecht nach oben geht. Die Hypotenuse bilde den Winkel ψ mit der horizontalen Richtung. Als Zeichnung dieses Querschnitts kann daher Abb. 7 auf S. 35 angenommen werden, abgesehen davon, dass hier die Buchstaben etwas anders gewählt sind als dort. Wir können uns auch auf die in § 4 durchgeführten Untersuchungen über den Spannungszustand hier ohne Weiteres

stützen. Für die dort mit σ' und τ' bezeichneten Spannungscomponenten, die zur Hypotenuse gehören, haben wir nach den Gl. (9), da τ hier gleich Null ist,

$$\left.\begin{aligned} \sigma' &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} + \frac{\sigma_z - \sigma_x}{2} \cos 2\psi \\ \tau' &= \frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \sin 2\psi \end{aligned}\right\} . \qquad (392)$$

Es fragt sich jetzt, wie gross der Winkel ist, den der aus σ' und τ' resultirende Druck mit der Normalen zur Hypotenuse bildet. Dieser Winkel sei mit χ bezeichnet; man hat dafür

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{\tau'}{\sigma'} = \frac{(\sigma_x - \sigma_z) \sin 2\psi}{\sigma_x + \sigma_z + (\sigma_z - \sigma_x) \cos 2\psi} .$$

Entwickelt man die Functionen $\sin 2\psi$ und $\cos 2\psi$ und dividirt in Zähler und Nenner mit $\cos^2 \psi$, so geht dies über in

$$\operatorname{tg} \chi = \frac{(\sigma_x - \sigma_z) \operatorname{tg} \psi}{\sigma_z + \sigma_x \operatorname{tg}^2 \psi} . \qquad (393)$$

Für uns ist es nun von Wichtigkeit, die grösste Winkelabweichung χ' der resultirenden Spannung von der zugehörigen Normalen zu berechnen. Diese wird bei irgend einer Neigung ψ' der Hypotenuse zur Horizontalen eintreten, zu deren Ableitung wir uns des gewöhnlichen Verfahrens zur Aufsuchung eines Maximums oder Minimums bedienen. In Gl. (393) kommt ψ nur in der Form $\operatorname{tg} \psi$ vor und wir können daher gleich hiernach differentiiren. Wir finden

$$\frac{d \operatorname{tg} \chi}{d \operatorname{tg} \psi} = (\sigma_x - \sigma_z) \frac{\sigma_z + \sigma_x \operatorname{tg}^2 \psi - 2 \sigma_x \operatorname{tg}^2 \psi}{(\sigma_z + \sigma_x \operatorname{tg}^2 \psi)^2} .$$

Wenn wir diesen Ausdruck gleich Null setzen, erhalten wir zur Bestimmung von ψ' die Gleichung

$$\sigma_z - \sigma_x \operatorname{tg}^2 \psi' = 0.$$

Hiernach ist

$$\operatorname{tg} \psi' = \pm \sqrt{\frac{\sigma_z}{\sigma_x}} . \qquad (394)$$

Das doppelte Wurzelvorzeichen gibt an, dass ein Maximum oder Minimum, jedenfalls also der grösste Absolutwerth

der Winkelabweichung χ' bei zwei symmetrisch zueinander liegenden Schnittrichtungen auftritt, was freilich von vornherein selbstverständlich war. Wenn wir uns nur um diesen Absolutwerth kümmern, finden wir aus Gl. (393) nach Einsetzen von ψ' aus (394)

$$\operatorname{tg} \chi' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sigma_z}{\sigma_x}} - \sqrt{\frac{\sigma_x}{\sigma_z}}\right). \tag{395}$$

Jedenfalls darf χ' nicht grösser als der Reibungswinkel φ sein, weil sonst ein Abgleiten längs der durch ψ' angegebenen Schnittrichtungen eintreten müsste. Deshalb nennt man diese Schnittrichtungen auch die Gleitflächen und es kann kein Zweifel darüber bestehen, dass das allmähliche Setzen frisch aufgeschütteter lockerer Erdmassen durch ein solches Abgleiten zu Stande kommt. Für uns handelt es sich nun um den Grenzzustand des Gleichgewichts; der diesem entsprechende horizontale Druck σ_x wird als der aktive Erddruck bezeichnet. Wenn die Erdmasse vorher eine grosse Last trug, die nachher entfernt wurde, kann σ_x freilich auch grösser sein, ebenso wenn die Erde festgestampft wurde. Nach dem Abtragen einer grösseren Last muss sich σ_z sofort entsprechend vermindern, von dem horizontalen Drucke σ_x gilt dies aber nicht. Es kann sogar sein, dass σ_x von früher her einen Werth behält, der noch grösser ist, als σ_z. Indessen kann auch hier das Verhältniss zwischen beiden jenen Werth nicht übersteigen, der zu einem Gleiten im Erdkörper führt. Der grösste mit σ_z hiernach verträgliche Werth von σ_x wird als der passive Erddruck bezeichnet.

Wir ermitteln jetzt den aktiven Erddruck σ_x, also den kleinsten Werth dieses Seitendruckes, der mit dem Gleichgewichtszustande des Erdkörpers verträglich ist. Dazu setzen wir in Gl. (395) $\operatorname{tg} \chi' = \operatorname{tg} \varphi$ und lösen die Gleichung nach dem Verhältnisse $\frac{\sigma_x}{\sigma_z}$ auf. Wenn wir noch zur Abkürzung

$$\operatorname{tg} \varphi = f$$

setzen und f den Reibungscoefficienten nennen, erhalten wir

$$\frac{\sigma_z}{\sigma_x} = 2f^2 + 1 \mp 2f\sqrt{f^2 + 1}. \tag{396}$$

Um daraus den aktiven Erddruck zu erhalten, müssen wir das negative Wurzelzeichen nehmen; das positive Wurzelvorzeichen entspricht dem passiven Erddrucke.

Setzt man z. B. $\varphi = 35°$, also $f = 0{,}70$, ein Werth, der ungefähr dem wirklichen Verhalten des Sandes entsprechen soll (eigene Versuche habe ich darüber nicht angestellt), so wird σ_z nach Gl. (396)

$$\sigma_z = 0{,}27\, \sigma_x$$

gefunden, also rund gleich einem Viertel von σ_x, eine Verhältnisszahl, von der man bei ungefähren Abschätzungen öfters Gebrauch macht.

Man kann die vorher abgeleiteten Formeln auch noch in etwas anderer Weise verwenden. Durch Einsetzen von $\sqrt{\frac{\sigma_z}{\sigma_x}}$ aus Gl. (394) in (395) erhält man nämlich, mit $\chi' = \varphi$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg}^2 \psi' - 1}{2 \operatorname{tg} \psi'} = -\operatorname{cotg} 2\psi'. \tag{397}$$

Nun ist beim aktiven Erddrucke $\sigma_z < \sigma_x$, $\operatorname{tg} \psi'$ daher nach Gl. (394) grösser als 1, ψ' selbst daher grösser als 45°, $2\psi'$ demnach ein stumpfer, der Reibungswinkel φ dagegen ein spitzer Winkel. Aus Gl. (397) folgt somit

$$2\psi' = \frac{\pi}{2} + \varphi \quad \text{oder} \quad \psi' = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}. \tag{398}$$

Hieraus folgt eine einfache Regel für die Construction der Gleitflächen. Diese sind unter 45° + dem halben Reibungswinkel gegen die Horizontale, oder allgemeiner gegen die Richtung der kleineren Hauptspannung geneigt.

§ 75. Anwendbarkeit dieser Betrachtungen auf die Berechnung des Erddrucks gegen Stützmauern.

Man denke sich durch den Sandkörper, von dem vorher die Rede war, eine lothrechte Ebene gelegt und die auf der Seite dieser Ebene liegende Hälfte des Sandkörpers ent-

Dagegen soll an die Stelle dieser Hälfte eine Mauer

treten, gegen die sich die andere Hälfte des Sandkörpers stützt. Wenn die Mauer nicht da wäre, würde der Sand abstürzen und erst wieder in's Gleichgewicht kommen, nachdem die natürliche Böschung hergestellt wäre. Dieser Bewegung widersetzt sich die Mauer und sie erfährt dabei einen Druck von dem Erdkörper. Man soll diesen Druck ermitteln.

Am nächsten liegt es, diesen Druck auf die Stützmauer gleich dem Drucke σ_x zu setzen, den die eine Hälfte des Sandkörpers vorher auf die andere Hälfte ausübte. Zur Begründung kann man sagen, dass es für die stehen gebliebene Hälfte nichts ausmachen könne, ob sie durch die andere Hälfte oder durch eine diese ersetzende Mauer im Gleichgewichte gehalten werde. Indessen ist diese Erwägung doch nicht ganz richtig. So lange die eine Hälfte des Sandkörpers noch durch die andere gestützt ist, folgt aus Symmetriegründen, dass σ_x eine Hauptspannung sein muss. Diese Symmetrie geht aber vollständig verloren, sobald die Mauer an die Stelle der einen Hälfte tritt. Es kann dann sehr wohl sein, dass neben σ_x auch noch eine Tangentialspannung τ zwischen Erde und Mauer übertragen wird. Wenn man bedenkt, dass eine Mauer leicht ein wenig nachgibt, indem sie unter dem Einflusse der seitlichen Belastung eine kleine Drehung um eine wagrechte Axe ausführt, wird man sogar zu der Anschauung geführt, dass zwischen Erde und Mauer τ den vollen Betrag der mit der Normalcomponenten σ verträglichen Reibung annehmen werde. Ueber diesen Punkt ist schon viel gestritten worden und der Meinungsstreit wird auch wohl nicht eher aufhören, als bis es gelungen ist, die Frage auf einwandfreie Weise durch Versuche zu entscheiden.

Wenn die Hinterfläche der Mauer absolut glatt hergestellt werden könnte, so dass man sicher wäre, dass keine Reibung zwischen ihr und der Erde auftreten könnte, wäre es aber natürlich ganz unbedenklich, die Ergebnisse des vorigen Paragraphen auf diesen Fall zu übertragen. Unter diesen Umständen wäre es in der That gleichgültig, ob die Stützung der einen Hälfte des Erdkörpers durch die andere Hälfte oder

anstatt deren durch die Mauer erfolgte. Sonst ist aber von den früheren Ergebnissen nur mit Vorsicht Gebrauch zu machen.

Man kann sich einen durch eine horizontale Ebene begrenzten Erdkörper auch durch eine Mauer gestützt denken, deren Rückenfläche in die Richtung der einen Gleitfläche des unbegrenzten Erdkörpers geht. Dazu muss sie nach Gl. (398) den Winkel $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$, also bei $\varphi = 35^0$ einen Winkel von $62\frac{1}{2}^0$ mit der Horizontalen bilden. Ein solcher Fall kommt praktisch freilich kaum vor; wenn er aber verwirklicht wäre, könnte man mit grösserem Rechte als vorher bei der senkrecht begrenzten Mauer sagen, dass der Ersatz des fortgenommenen Theiles des Erdkörpers durch die Mauer in dem Spannungszustande des stehen gebliebenen Theiles keine Aenderung herbeigeführt haben könne. Denn in der That wird die Rückenfläche bei den kleinen Bewegungen, die Mauer und Erdkörper nachher noch ausführen, ganz wie vorher bei den Bewegungen des Sandkörpers allein als eine Gleitfläche dienen. Voraussetzung ist dabei, dass der Reibungswinkel zwischen Erde und Mauerwerk mindestens ebenso gross als der zwischen Erde und Erde ist. Als Erddruck auf die Rückenfläche der Mauer können wir daher die sich für eine Gleitfläche nach den Untersuchungen des vorigen Paragraphen ergebende Spannung annehmen. Diese fällt übrigens der Richtung nach mit der anderen Gleitfläche zusammen, denn der Winkel zwischen beiden Gleitflächen folgt nach Gl. (398) zu $\frac{\pi}{2} - \varphi$ bezw. $\frac{\pi}{2} + \varphi$. Die Componenten σ' und τ' dieses Erddrucks können aus den Gl. (392) ohne Weiteres entnommen werden, wenn man σ_x nach Gl. (396) in σ_z ausdrückt und ψ' an Stelle von ψ setzt; für $2\psi'$ nimmt man den aus Gl. (398) folgenden Werth. Es hat keinen Zweck, dies her weiter auszurechnen.

Ausserdem kommt noch ein anderer Fall in Betracht, auf den man die Untersuchungen über den Spannungszustand im unbegrenzten Erdkörper ebenfalls ohne Weiteres übertragen kann. Der Erdkörper sei hier nämlich nach oben hin durch eine unter dem natürlichen Böschungswinkel φ geneigte Ebene

begrenzt. In diesem Falle kennt man sofort die eine Gleitfläche für jeden Punkt des unbegrenzten Erdkörpers; sie läuft parallel mit der Oberfläche. Die andere Gleitfläche bildet aber mit dieser den Winkel $\frac{\pi}{2} - \varphi$ und daraus folgt, dass sie lothrecht steht. Die Richtungen der Hauptspannungen werden nun auch bekannt; sie fallen mit den Halbirungslinien der von den Gleitflächen gebildeten Winkel zusammen.

Denkt man sich diesen Erdkörper durch eine Mauer mit lothrechter Rückenfläche gestützt, so wird gegenüber dem Zustande im unbegrenzten Erdkörper keine Aenderung herbeigeführt, da die Rückenfläche nach wie vor als Gleitfläche dient. Aus der Symmetrie des Spannungszustandes um die Hauptrichtungen herum folgt ferner, dass der Druck auf die eine Gleitfläche ebenso gross ist als der auf die andere. Der Druck auf die zur natürlichen Böschung parallele Gleitfläche kann aber leicht angegeben werden. Er ist gleich dem Gewichte des darüber lastenden Erdkörpers. Für ein Flächenelement dF in der Tiefe z unter der Oberfläche (gemessen in der Richtung der Schwere) ist dieses Gewicht gleich

$$\gamma z dF \cos \varphi.$$

Der Druck auf die Flächeneinheit der Rückenfläche der Stützmauer in der Tiefe z ist daher ebenfalls gleich

$$\gamma z \cos \varphi,$$

und dieser Druck geht parallel zur Böschung, bildet also den Reibungswinkel φ mit der Normalen zur Rückenfläche.

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln.

Erster Abschnitt.

Allgemeine Untersuchungen über den Spannungszustand.

Seite

$$\sigma = \frac{P}{F}, \qquad (1) \quad 7$$

σ specifische Spannung, P Zug- oder Druckkraft, F Querschnitt.

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \qquad (4) \quad 21$$

τ_{xy} Schubspannungscomponente in der Richtung der Y-Axe für eine Schnittfläche, deren äussere Normale in der Richtung der positiven X-Axe geht.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (5) \quad 23$$

Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben; $X\,Y\,Z$ sind die Componenten der an der Volumeneinheit angreifenden Massenkraft (Gewicht oder Trägheitskraft).

$$\left.\begin{aligned} p_{nx} &= \sigma_x \cos(nx) + \tau_{yx} \cos(ny) + \tau_{zx} \cos(nz) \\ p_{ny} &= \sigma_y \cos(ny) + \tau_{xy} \cos(nx) + \tau_{zy} \cos(nz) \\ p_{nz} &= \sigma_z \cos(nz) + \tau_{xz} \cos(nx) + \tau_{yz} \cos(ny) \end{aligned}\right\} \qquad (6) \quad 25$$

Gleichgewicht am Tetraeder; besonders angewendet für Elemente an der äusseren Umgrenzung des Körpers, wobei p_{nx} u. s. f. die Componenten der äusseren Druckkraft auf die Oberfläche mit der Normalen n bedeuten.

Seite

Ebenes Problem.

Hier ist

$$\sigma_z = 0, \quad \tau_{xz} = 0, \quad \tau_{yz} = 0, \qquad (8)\ 27$$

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} \frac{2\tau}{\sigma_y - \sigma_x} + n\frac{\pi}{2}, \qquad (11)\ 29$$

Gleichung zur Bestimmung der Hauptrichtungen des Spannungszustandes, φ der Winkel, den die Hauptschnittrichtung mit der X-Axe bildet.

$$\sigma'_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}, \qquad (12)\ 31$$

$\sigma'_{\max}$ und $\sigma'_{\min}$ die Hauptspannungen.

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau}, \qquad (13)\ 31$$

Gleichung zur Bestimmung der Schnittrichtung, für die die Schubspannung τ' zu einem Maximum oder Minimum wird. Für diese Grenzwerthe selbst hat man

$$\tau'_{\substack{\max\\ \min}} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{4\tau^2 + (\sigma_x - \sigma_y)^2}. \qquad (14)\ 32$$

Zweiter Abschnitt.

Elastische Formänderung. Beanspruchung des Materials.

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \alpha\sigma, \qquad (18)\ 46$$

Hooke'sches Gesetz; ε specifische Dehnung, E Elasticitätsmodul, α Dehnungscoefficient.

$$\varepsilon = f(\sigma), \qquad (20)\ 51$$

allgemeiner Ausdruck für das Elasticitätsgesetz.

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{1}{f'(\sigma)}, \qquad (21)\ 51$$

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma}{f(\sigma)}. \qquad (22)\ 51$$

Die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen sind im Allgemeinen voneinander verschieden; jeder von beiden Werthen

Seite

Dritter Abschnitt.

Biegung des geraden Stabes.

$$\frac{\sigma}{\sigma_0} = \frac{y}{y_0} \quad \text{oder} \quad \sigma = y \cdot \frac{\sigma_0}{y_0}, \qquad (45) \quad 92$$

Gradliniengesetz für die Spannungsvertheilung bei der Biegung von Navier, σ und σ_0 Spannungen in den Abständen y und y_0 von der Nulllinie.

$$\sigma_0 = \frac{M}{\Theta} y_0, \qquad (48) \quad 94$$

Biegungsgleichung, M Biegungsmoment, Θ Trägheitsmoment.

$$\sigma = \frac{M}{W}, \qquad (50) \quad 94$$

W Widerstandsmoment.

$$\Phi_{yz} = 0, \qquad (52) \quad 96$$

Bedingung für die Anwendbarkeit der einfachen Biegungsformel, Φ_{yz} Centrifugalmoment.

$$\Theta_a = \Theta + a^2 \cdot F, \qquad (53) \quad 97$$

Θ Trägheitsmoment für die Schwerlinie, Θ_a für eine dazu parallele Axe im Abstande a, F Querschnittsfläche.

$$\Theta_\alpha = \cos^2\alpha\, \Theta_y + \sin^2\alpha\, \Theta_z - \sin 2\alpha\, \Phi_{yz}, \qquad (54) \quad 99$$

$$\Phi_\alpha = \frac{\Theta_y - \Theta_z}{2} \sin 2\alpha + \Phi_{yz} \cos 2\alpha. \qquad (55) \quad 99$$

Trägheitsmoment und Centrifugalmoment für eine Schwerlinie, die mit der Y-Axe den Winkel α bildet.

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\Phi_{yz}}{\Theta_z - \Theta_y}. \qquad (56) \quad 99$$

Durch diese Gleichung werden die Richtungen α der Querschnittshauptaxen bestimmt.

$$t_\alpha^2 = \frac{\Theta_\alpha}{F}, \qquad (58) \quad 101$$

t_α Trägheitshalbmesser.

$$t_\alpha^2 = \cos^2\alpha\, t_y^2 + \sin^2\alpha\, t_z^2. \qquad (59) \quad 101$$

$$\Theta_p = \Theta_y + \Theta_z, \qquad (63) \quad 105$$

Θ_p das polare Trägheitsmoment.

Seite

$$\sigma = \frac{M \cos\alpha}{\Theta_z} y + \frac{M \sin\alpha}{\Theta_y} z, \qquad (64)\ 106$$

Spannungsberechnung bei schiefer Belastung; speciell für den rechteckigen Querschnitt:

$$\sigma = \frac{6Mc}{b^2h^2}, \qquad (65)\ 108$$

c Breite der Horizontalprojection des Balkens, b und h Rechteckseiten.

$$\sigma = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{vz}{b^2} + \frac{uy}{a^2}\right), \qquad (66)\ 109$$

Formel für die Spannungsvertheilung bei excentrischer Zug- oder Druckbelastung, uv Coordinaten des Angriffspunktes von P, y und z Coordinaten der Stelle, zu der σ gehört, a und b Hauptträgheitshalbmesser.

$$\frac{uy}{a^2} + \frac{vz}{b^2} = -1, \qquad (67)\ 109$$

Gleichung der Nulllinie.

$$\sigma_0 = \frac{M}{F \cdot k} = \frac{M}{W}, \qquad (70) \text{ und } (71)\ 120$$

Biegungsgleichung für schiefe Belastung, k Kernweite, $W = Fk$ das Widerstandsmoment im erweiterten Sinne.

$$V = \frac{dM}{dx}, \qquad (72)\ 127$$

Zusammenhang zwischen Scheerkraft V und Biegungsmoment M.

$$\tau_{xy} = \frac{V}{b\Theta}\int_u^{\frac{h}{2}} y\,dF, \qquad (73)\ 129$$

τ_{xy} Schubspannung im gebogenen Stabe, b Querschnittsbreite im Abstande u von der Nulllinie. Das Integral ist das statische Moment des jenseits u liegenden Theiles der Querschnittsfläche.

$$P = \int \Delta\sigma\,dF = \frac{Ve}{\Theta}\int y\,dF = \frac{Ve}{\Theta} \cdot S, \qquad (75)\ 137$$

P Kraft, die von einem Niete in einem genieteten Träger zu übertragen ist, e Niettheilung, S statisches Moment des durch den Niet angeschlossenen Querschnittstheiles.

Seite

$$d\varphi = dx \frac{M}{E\Theta},$$ (76) 138

$d\varphi$ Verdrehung zweier benachbarter Querschnitte gegeneinander.

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E\Theta} \text{ oder } \varrho = \frac{E\Theta}{M},$$ (77) 138

ϱ Krümmungshalbmesser der elastischen Linie.

$$E\Theta \frac{d^2y}{dx^2} = -M,$$ (78) 139

Differentialgleichung der elastischen Linie.

$$f = \frac{5}{384} \frac{ql^4}{E\Theta} = \frac{5}{384} \frac{Ql^3}{E\Theta},$$ (80) 141

f Biegungspfeil eines Balkens für die gleichförmig vertheilte Last Q, l Spannweite.

$$f = \frac{Pl^3}{48 E\Theta},$$ (82) 142

desgl. für die Einzellast P in der Mitte.

$$du = \varkappa\, du' = \varkappa \frac{V dx}{GF},$$ (83) 145

du Einsenkung wegen des Einflusses der Schubspannungen auf die Biegungslinie, $\varkappa$ ein von der Gestalt des Querschnitts abhängiger Zahlenfactor, nämlich

$$\varkappa = \frac{F\int \tau^2 dF}{V^2}.$$ (84) 146

$$f' = \frac{Pl^3}{4Ebh^3} + 0{,}3 \frac{Pl}{Gbh} = \frac{Pl}{4Ebh}\left(\frac{l^2}{h^2} + 3\right),$$ (86) 149

f' Biegungspfeil für Einzellast P in der Mitte bei rechteckigem Querschnitt, mit Berücksichtigung der Schubspannungen, h Balkenhöhe.

Vierter Abschnitt.

Die Formänderungsarbeit.

$$dA = \frac{M^2}{2E\Theta} dx,$$ (87) 167

dA Formänderungsarbeit im Balkenelemente dx bei der reinen Biegung.

Seite

$$A = \frac{1}{2}\int \frac{M^2}{E\Theta} dx + \frac{1}{2}\int \frac{\varkappa V^2}{GF} dx, \qquad (89)\ 169$$

Formänderungsarbeit des ganzen Balkens mit Berücksichtigung der Schubspannungen.

$$A = \frac{1}{2}\sum Py, \qquad (90)\ 170$$

Arbeit der äusseren Kräfte gleich der potentiellen Energie.

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \frac{1}{2}\sum P\frac{\partial y}{\partial P_i} + \frac{1}{2}y_i, \qquad (91)\ 172$$

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = \sum P\frac{\partial y}{\partial P_i}, \qquad (92)\ 173$$

$$y_i = \frac{\partial A}{\partial P_i}, \qquad (93)\ 174$$

Formeln von Castigliano, P_i irgend eine der Lasten, y_i die elastische Verschiebung ihres Angriffspunktes im Sinne von P_i. Für eine Auflagerkraft geht dies über in

$$\frac{\partial A}{\partial P_i} = 0, \qquad (95)\ 175$$

Satz vom Minimum der Formänderungsarbeit.

$$\frac{1}{2}P' f_d = nP(h + f_d), \qquad (100)\ 185$$

Stossweise Belastung, h Fallhöhe von P, P' die gleichwerthig statische Belastung, f_d der dynamische Biegungspfeil, n ein echter Bruch, der am besten aus Versuchen zu entnehmen ist (siehe Anmerkung auf S. 195).

$$\frac{\partial y_i}{\partial P_k} = \frac{\partial y_k}{\partial P_i}, \qquad (103)\ 186$$

Satz von Maxwell über die Gegenseitigkeit der Verschiebungen.

Fünfter Abschnitt.

Stäbe mit gekrümmter Mittellinie.

$$\frac{1}{\varrho'} - \frac{1}{\varrho} = \frac{M}{E\Theta}, \qquad (111)\ 198$$

(Im Texte, S. 198 ist der Zähler des zweiten Bruches im Drucke nicht gekommen); Gleichung für die Aenderung der Krümmung durch ein Biegungsmoment M.

Seite

$$\Delta d\varphi = \frac{M}{E\Theta} ds, \qquad (112)\ 199$$

$\Delta d\varphi$ elastische Verdrehung zweier Querschnitte gegeneinander.

$$\sigma = E\frac{\Delta ds}{ds} = \frac{y}{r+y} E\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}, \qquad (113)\ 202$$

Formel für die hyperbolische Spannungsvertheilung unter der Voraussetzung, dass die Querschnitte eben bleiben; r Krümmungshalbmesser.

$$\sigma = \frac{ry}{r+y}\frac{M}{\Theta'}, \qquad (115)\ 203$$

anderer Ausdruck dafür; Θ' weicht von dem Trägheitsmomente Θ um eine gewöhnlich nur kleine Correctionsgrösse ab, nämlich

$$\Theta' = \int y^2 dF - \frac{1}{r}\int y^3 dF + \frac{1}{r^2}\int y^4 dF - \cdots$$

$$H = \frac{\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds}, \qquad (119)\ 206$$

H Horizontalschub eines Bogens mit zwei Gelenken; M_b Biegungsmoment, das ein Balkenträger unter derselben Belastung an der gleichen Stelle aufzunehmen hätte, z Ordinate der Bogenmittellinie, ds Bogenelement. In der Formel ist nur auf den Einfluss der Biegungsmomente Rücksicht genommen.

$$H = \frac{\int M_b z\, ds}{\int z^2 ds}, \qquad (120)\ 206$$

dasselbe, wenn E und Θ constant sind.

$$H = \frac{ql^2}{8h}, \qquad (121)\ 207$$

Horizontalschub für gleichförmige Belastung q für die Längeneinheit im Grundrisse, h Pfeilhöhe, l Spannweite.

$$H = \frac{\int \frac{M_b z}{E\Theta} ds}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds + \int \frac{ds}{EF}}, \qquad (122)\ 210$$

Seite

Formel für den Horizontalschub mit Berücksichtigung des Einflusses der Normalkraft; F Querschnittsfläche.

$$H = \frac{\int M_b z\, ds}{\int (z^2 + t^2)\, ds}, \qquad (123)$$ 210

dasselbe, wenn E, Θ und F constant sind; t Trägheitshalbmesser.

$$\Delta l = \int z \Delta d\varphi = \int \frac{Mz}{E\Theta} ds. \qquad (124)$$ 211

Δl Spannweitenvergrösserung eines gekrümmten Stabes unter dem Einflusse gegebener Momente M.

$$H = \frac{\eta l}{\int \frac{z^2}{E\Theta} ds}, \qquad (125)$$ 215

Horizontalschub für eine Temperaturänderung des Bogens; η Product aus Temperaturunterschied und Ausdehnungscoefficient.

$$\frac{\partial A}{\partial U} = -u \qquad (126)$$ 216

tritt an die Stelle der Gl. (95) von Castigliano, wenn Temperaturänderungen berücksichtigt werden.

$$\sigma = \frac{6 Pr}{\pi l \delta^2}, \qquad (127)$$ 222

σ Biegungsspannung in einem Ringe von rechteckigem Querschnitte, der längs eines Durchmessers mit P zusammengedrückt wird; r mittlerer Halbmesser, δ Wandstärke, l andere Querschnittsseite.

$$\sigma = \frac{6 Pr}{\pi l \delta^2}\left(1 - \frac{\delta^2}{12 r^2}\right), \qquad (129)$$ 223

dasselbe, mit Berücksichtigung der Normalkraft.

$$\Delta d = \frac{Pr^3}{E\Theta} \cdot \frac{4-\pi}{2\pi} = 1{,}639 \frac{Pr^3}{El\delta^3}, \qquad (130)$$ 223

Δd elastische Vergrösserung des zur Kraftrichtung senkrechten Durchmessers.

$$\Delta\varphi = \frac{Pp}{E\Theta} l, \qquad (131)$$ 226

$\Delta\varphi$ Winkel, um den man eine ebene Spiralfeder aufziehen muss, bis die Kraft am äusseren Ende zu P wird; p Ent-

fernung des äusseren Federendes von der Spindelmitte, Seite
l Länge der Spirallinie.

$$A = \frac{1}{2} M \Delta \varphi = \frac{(Pp)^2}{2 E \Theta} l, \qquad (132) \ 227$$

A Formänderungsarbeit, die in der Spiralfeder aufgespeichert wird.

$$A = \frac{\sigma^2 b h l}{24 E} = \frac{\sigma^2}{24 E} \cdot V, \qquad (134) \ 228$$

dasselbe für rechteckigen Querschnitt, V das Volumen der Feder, σ die grösste zulässige Spannung.

Sechster Abschnitt.

Stäbe auf nachgiebiger Unterlage.

$$\frac{dV}{dx} = p, \qquad (135) \ 241$$

V Scheerkraft, dx Längenelement des Stabes, p Druck für die Längeneinheit auf die Unterlage; hierfür auch

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = p. \qquad (136) \ 241$$

$$E \Theta \frac{d^4 y}{dx^4} = - p, \qquad (137) \ 242$$

Differentialgleichung für die elastische Linie der Eisenbahnschwelle u. s. f.

$$p = k y, \qquad (138) \ 242$$

k Bettungsziffer.

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \alpha x + C_2 e^{\alpha x} \sin \alpha x + C_3 e^{-\alpha x} \cos \alpha x + C_4 e^{-\alpha x} \sin \alpha x, \qquad (140) \ 242$$

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{k}{4 E \Theta}}, \qquad (141) \ 242$$

Endliche Gleichung der elastischen Linie für die Eisenbahnschwelle. Für die Constantenbestimmung dienen die Gleichungen (142) bis (146).

Seite

Siebenter Abschnitt.

Die Festigkeit von ebenen Platten, die am ganzen Umfange unterstützt sind.

$$\varepsilon_t = \frac{z\varphi}{x}, \qquad (147)\ \mathbf{257}$$

ε_t Dehnung in tangentialer Richtung, x Abstand von der Axe, z Abstand von der Mittelfläche, φ Neigung der Normalen zur elastischen Fläche gegen die Axe.

$$\varepsilon_r = \frac{z\,d\varphi}{dx}, \qquad (148)\ \mathbf{258}$$

ε_r Dehnung in radialer Richtung.

$$\sigma_t = \frac{mE}{m^2-1}(m\varepsilon_t + \varepsilon_r); \quad \sigma_r = \frac{mE}{m^2-1}(m\varepsilon_r + \varepsilon_t), \qquad (149)\ \mathbf{258}$$

Spannungen in den beiden Hauptrichtungen.

$$\text{Mom. der } \sigma_t = \frac{mE}{m^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(m\,\frac{\varphi}{x} + \frac{d\varphi}{dx}\right)dx\,d\alpha, \qquad (151)\ \mathbf{260}$$

$$\text{Mom. aller } \sigma_r = \frac{mE}{m^2-1}\cdot\frac{h^3}{12}\left(mx\,\frac{d^2\varphi}{dx^2} + m\,\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dx}\right)dx\,d\alpha, (152)\ \mathbf{261}$$

$$\text{Mom. der } \tau = \frac{x^2 p}{2}\,d\alpha\,dx; \qquad (153)\ \mathbf{262}$$

bei der letzten Formel ist vorausgesetzt, dass die Platte eine gleichförmig über die Fläche vertheilte Belastung p für die Flächeneinheit trägt.

$$x^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + x\,\frac{d\varphi}{dx} - \varphi + Nx^3 = 0, \qquad (155)\ \mathbf{262}$$

Differentialgleichung des Problems; N eine Constante, gegeben durch Gl. (154).

$$\varphi = \frac{N}{8}\left(r^2x - x^3\right) = \frac{3(m^2-1)}{4m^2Eh^3}\,p\,(r^2x - x^3), \qquad (157)\ \mathbf{263}$$

Lösung der Gleichung mit Berücksichtigung der Grenzbedingungen, wobei die Platte am Rande als eingespannt vorausgesetzt wird.

Seite

$$\sigma_{red} = E\frac{Nr^2}{4}\cdot\frac{h}{2} = \frac{3(m^2-1)}{4m^2}\cdot\frac{r^2}{h^2}p = 0{,}68p\frac{r^2}{h^2} \text{ für } m = \frac{10}{3}, \quad (159) \quad 264$$

σ_{red} Anstrengung des Materials (wird am Rande am grössten).

$$y = \frac{N}{32}(x^4 - 2r^2x^2 + r^4) = \frac{N}{32}(x^2 - r^2)^2, \quad (161) \quad 265$$

Gleichung der elastischen Fläche.

$$f = \frac{3(m^2-1)}{16m^2Eh^3}pr^4 = 0{,}17\frac{pr^4}{Eh^3}, \quad (162) \quad 265$$

f Biegungspfeil in der Mitte.

$$x^2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + x\frac{d\varphi}{dx} - \varphi + Qx = 0, \quad (165) \quad 266$$

Differentialgleichung für eine Einzellast P in der Mitte; Q eine Constante (Gl. 164).

$$\varphi = \frac{Q}{2}x\lg\frac{r}{x}, \quad (167) \quad 266$$

Lösung der Gleichung, Platte am Rande eingespannt.

$$\sigma_{red} = \frac{3(m^2-1)}{2\pi m^2}\frac{P}{h^2} = 0{,}43\frac{P}{h^2}, \quad (169) \quad 266$$

σ_{red} Anstrengung des Materials am Umfange.

$$\sigma_{red} = 0{,}43\frac{P}{h^2}\lg\frac{r}{a}, \quad (173) \quad 269$$

σ_{red} Anstrengung des Materials in der Mitte; a Halbmesser des kleinen Kreises, über den man sich P vertheilt denken kann (Logarithmus zur Basis e zu nehmen).

$$f = \frac{Qr^2}{8} = \frac{3(m^2-1)}{4\pi m^2}\cdot\frac{Pr^2}{Eh^3} = 0{,}22\frac{Pr^2}{Eh^3}, \quad (177) \quad 270$$

Biegungspfeil (immer noch eingespannte Platte).

$$\varphi = \frac{N}{8}\left(\frac{3m+1}{m+1}r^2x - x^3\right), \quad (180) \quad 271$$

tritt an Stelle von Gl. (157), wenn die Platte frei aufliegt und nicht merklich über den Auflagerkreis hinaus reicht.

$$\sigma_{red} = \frac{3(m^2-1)(3m+1)}{8m^2(m+1)}\cdot\frac{r^2}{h^2}p = 0{,}87\frac{r^2}{h^2}p, \quad (182) \quad 272$$

σ_{red} Anstrengung des Materials in der Mitte, wo sie am grössten wird.

Seite

$$f = \frac{3}{16} \cdot \frac{m^2 - 1}{m^2 E h^3} \cdot p \cdot \frac{5m + 1}{m + 1} r^4 = 0{,}70 \frac{p}{E} \cdot \frac{r^4}{h^3}, \qquad (185)\ 272$$

f Biegungspfeil für die frei aufliegende Platte.

$$f = \frac{3(m-1)(3m+1)}{4\pi m^2} \cdot \frac{Pr^2}{Eh^3} = 0{,}55 \frac{Pr^2}{Eh^3}, \qquad (188)\ 274$$

dasselbe für Einzellast P in der Mitte.

$$\sigma = p \frac{r^2}{h^2}, \qquad (190)\ 279$$

Formel der Näherungtheorie für die kreisförmige Platte.

$$\sigma = \frac{2a - b}{a} \cdot \frac{b^2}{h^2} p, \qquad (196)\ 285$$

Näherungsformel für elliptische Platte, a und b Halbaxen der Ellipse ($a > b$).

$$\sigma = \frac{6M}{dh^2} = p \frac{a^2}{h^2}, \qquad (197)\ 287$$

Näherungsformel für quadratische Platten, a Halbseite.

$$\sigma = 2p \frac{a^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{b^2}{h^2}, \qquad (198)\ 288$$

desgl. für die rechteckige Platte, a und b Rechteckhalbseiten.

Achter Abschnitt.

Die Festigkeit von Gefässen unter innerem oder äusserem Ueberdruck.

$$\sigma = \frac{pr}{2h}, \qquad (199)\ 293$$

σ Wandspannung in einem dünnwandigen Kugelkessel, r Radius, p innerer Ueberdruck, h Wandstärke.

$$\sigma_{red} = \frac{m-1}{m} \sigma = \frac{m-1}{m} \frac{pr}{2h} = 0{,}35 \frac{pr}{h} \left(\text{für } m = \frac{10}{3}\right), \qquad (200)\ 294$$

Ermittelung der zu σ gehörigen reducirten Spannung.

$$\sigma_{red} = \sigma_t - \frac{1}{m} \sigma_a = \frac{2m-1}{2m} \frac{pr}{h} = 0{,}85 \frac{pr}{h}, \qquad (202)\ 295$$

gilt für den cylindrischen Kessel.

Seite

$$p_k = \frac{E}{4}\left(\frac{h}{r}\right)^3, \qquad (210)\ 300$$

p_k der kritische äussere Ueberdruck, der das Ausknicken der Wand eines langen cylindrischen Rohres herbeiführt (Anwendung auf Flammrohre).

$$x^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + x\frac{du}{dx} - u = 0, \qquad (214)\ 305$$

Differentialgleichung für die elastische Verschiebung u in radialer Richtung bei dickwandigen Röhren; x Abstand von der Rohraxe.

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= p\,\frac{a^2}{b^2 - a^2}\cdot\frac{x^2 - b^2}{x^2}\\ \sigma_t &= p\,\frac{a^2}{b^2 - a^2}\cdot\frac{x^2 + b^2}{x^2}\end{aligned}\right\}, \qquad (219)\ 306$$

$$\sigma_{red} = E(\varepsilon_t)_{x=a} = E\left(\frac{u}{x}\right)_{x=a} = \frac{p}{b^2 - a^2}\left(\frac{m-1}{m}a^2 + \frac{m+1}{m}b^2\right), \qquad (220)\ 306$$

Formeln für die Spannungen in radialer und tangentialer Richtung und für die reducirte Spannung an der Innenseite des Rohrs; a innerer, b äusserer Halbmesser.

Ringgeschütz, Gl. (221) bis (226), S. 308—310.

Neunter Abschnitt.

Die Verdrehungsfestigkeit.

$$\tau = \frac{\tau' r}{a}, \qquad (228)\ 321$$

τ und τ' Torsionsspannungen in der Welle von kreisförmigem Querschnitte in den Abständen r und a.

$$\tau' = \frac{M}{\Theta_p}\cdot a, \qquad (229)\ 322$$

$$\tau' = \frac{2M}{\pi a^3}, \qquad (230)\ 322$$

$$\Delta\varphi = \frac{\tau l}{G r} = \frac{\tau' l}{G a} = \frac{2Ml}{\pi a^4 G}, \qquad (231)\ 322$$

Seite

Formeln für die Torsion von Wellen kreisförmigen Querschnitts, τ' Spannung am Rande, a Halbmesser, $\Delta\varphi$ Verdrehungswinkel für die Länge l, M Verdrehungsmoment.

$$\tau_{xy} = k a^2 z; \quad \tau_{xz} = -k b^2 y, \qquad (233) \quad 324$$

Spannungsvertheilungsgesetz für die Welle von elliptischem Querschnitte, a und b Halbaxen der Ellipse in der Richtung der y und z, k eine Constante, die aus

$$k = \frac{2M}{\pi a^3 b^3} \qquad (235) \quad 326$$

folgt.

$$\tau_{\max} = \frac{2M}{\pi a^2 b}, \qquad (236) \quad 326$$

wenn $a < b$ ist.

$$\tau_{xy} = c_1 z - \frac{c_1}{a^2} z y^2, \qquad (237) \quad 328$$

$$\tau_{xz} = k_1 y - \frac{k_1}{b^2} y z^2, \qquad (238) \quad 329$$

für annäherungsweise Berechnung angenommenes Spannungsvertheilungsgesetz für die Welle von rechteckigem Querschnitte; c_1 und k_1 Constanten, die weiterhin berechnet werden, a und b Halbseiten des Rechtecks.

$$\left.\begin{aligned} \tau_{xy} &= \frac{9M}{16ab^3} z \left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) \\ \tau_{xz} &= -\frac{9M}{16a^3 b} y \left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right) \end{aligned}\right\}, \qquad (242) \quad 331$$

$$\tau = \frac{9M}{2a_1^2 b_1}, \qquad (245) \quad 333$$

ebenfalls für den rechteckigen Querschnitt; in der letzten Formel ist τ die grösste Spannung, a_1 die ganze kleinere und b_1 die ganze grössere Rechteckseite.

$$\tau = \frac{2Pr}{\pi a^3}, \qquad (246) \quad 335$$

$$w = P \cdot \frac{4nr^3}{a^4 G}, \qquad (248) \quad 338$$

$$A = P^2 \frac{2nr^3}{a^4 G}, \qquad (249) \quad 338$$

Formeln für die cylindrischen Torsionsfedern, r Cylinderhalbmesser, a Querschnittshalbmesser, w Zusammendrückung der

Feder unter der Last P, A aufgespeicherte Formänderungsarbeit. Seite

---

Zehnter Abschnitt.

Die Knickfestigkeit.

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{E\Theta}}, \qquad (252)\ 344$$

$$v = \frac{\sin\alpha x}{\sin\alpha l}(u_l - u_0 \cos\alpha l) + u_0 \cos\alpha x, \qquad (253)\ 344$$

Gleichung der elastischen Linie, wenn die u die ursprünglichen Excentricitäten sind.

$$P_E = \pi^2 \frac{E\Theta}{l^2}, \qquad (255)\ 345$$

Euler'sche Formel für Lagerung zwischen Spitzen.

$$f = \frac{f_0}{\frac{P_E}{P} - 1}, \qquad (261)\ 347$$

f Ausbiegung der Mitte eines vorher schon ein wenig (um f_0) gekrümmten Stabes unter der Last P.

$$\varphi = \pi \frac{f}{l}, \qquad (262)\ 347$$

φ Drehungswinkel des Stabendes.

$$P_K = \frac{P_D + (\eta + 1)P_E}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{P_D + (\eta+1)P_E}{2}\right)^2 - P_D P_E}, \qquad (263)\ 349$$

P_K wirkliche Knickbelastung, P_D Belastung eines kürzeren Stückes bei Erreichung der Proportionalitätsgrenze, η die absolute Zahl

$$\eta = \frac{aFf_0}{\Theta}.$$

$$P_K = aF - b\frac{lF}{t}, \qquad (265)\ 351$$

$$\frac{P_K}{F} = \left(0{,}53\left(\frac{l}{t}\right)^2 - 120\frac{l}{t} + 7760\right)\text{atm}, \qquad (266)\ 351$$

Empirische Formeln v. Tetmajer, die letzte für Gusseisen, t kleinster Trägheitshalbmesser des Querschnitts.

Seite

$$P = 4\pi^2 \frac{E\Theta}{l^2},$$ (267) **354**

Euler'sche Formel für beiderseits eingespannte Stäbe.

$$P = 20 \frac{E\Theta}{l^2},$$ (268) **356**

desgl. für Einspannung auf einer Seite, während das andere Ende drehbar befestigt ist.

$$f = \frac{Q}{2P\alpha}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha l}{2} - \frac{\alpha l}{2}\right).$$ (269) **357**

f Biegungspfeil, wenn eine Knicklast P mit einer Biegungslast Q in der Mitte zusammenwirkt.

$$f = \frac{Ql^3}{48E\Theta}\left(1 + \frac{Pl^2}{10E\Theta}\right).$$ (270) **359**

dasselbe, weiter entwickelt.

$$p = \varkappa\frac{l^2}{a},$$ (273) **362**

Annahme für die Excentricität p', die der Navier-Schwarz-Rankine'schen Formel zu Grunde liegt', $\varkappa$ Erfahrungscoefficient.

$$P_{zul} = \frac{F\sigma_{zul}}{1 + \varkappa\frac{l^2}{i^2}}$$ (275) **363**

ist diese Formel selbst.

$$\frac{Ml}{E\Theta} = 2\pi \quad \text{oder} \quad M = 2\pi\frac{E\Theta}{l},$$ (283) **369**

Kritische Verdrehungsbelastung einer sehr langen Welle, bei der ein seitliches Ausknicken eintritt.

Elfter Abschnitt.

Grundzüge der mathematischen Elasticitätstheorie.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial\xi}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial\eta}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial\zeta}{\partial z},$$ (285) **378**

ε_x u. s. f. die specifischen Dehnungen in den Richtungen der Coordinatenaxen, ausgedrückt in den Verschiebungscomponenten $\xi\,\eta\,\zeta$.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x};\ \gamma_{xz} = \frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x};\ \gamma_{yz} = \frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (286)$$ Se. 380

γ_{xy} die Aenderung des ursprünglich rechten Winkels zwischen zwei parallel zur X- und zur Y-Axe gezogenen Graden.

$$e = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z}, \quad (287)$$ 381

e specifische Volumenänderung (kubische Ausdehnung).

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \eta}{\partial x}\right);\ \tau_{xz} = \tau_{zx} = G\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right);$$
$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = G\left(\frac{\partial \eta}{\partial z} + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right), \quad (288)$$ 381

τ die Schubspannungscomponenten ausgedrückt in den Verschiebungen, G Schubelasticitätsmodul.

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_y &= 2G\left(\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{e}{m-2}\right) \\ \sigma_z &= 2G\left(\frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{e}{m-2}\right) \end{aligned}\right\}, \quad (292)$$ 382

σ die Normalspannungscomponenten ausgedrückt in den Verschiebungen, m Verhältnissziffer zwischen Längsdehnung und Querzusammenziehung beim linearen Spannungszustand, gewöhnlich zwischen 3 und 4 liegend.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \quad (293)$$ 384

Einführung des Laplace'schen Operators ∇^2.

$$\left.\begin{aligned} \nabla^2 \xi + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial x} + \frac{X}{G} &= 0 \\ \nabla^2 \eta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial y} + \frac{Y}{G} &= 0 \\ \nabla^2 \zeta + \frac{m}{m-2}\frac{\partial e}{\partial z} + \frac{Z}{G} &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad (294)$$ 384

Grundgleichungen der mathematischen Elasticitätstheorie, XYZ sind die Componenten der äusseren Massenkraft (Gewicht oder auch Trägheitskraft.)

Seite

$$\nabla^2 \mathfrak{v} + \frac{m}{m-2} \nabla e + \frac{\mathfrak{P}}{G} = 0, \qquad (295) \quad 385$$

$$\nabla^2 \mathfrak{v} + \frac{m}{m-2} \nabla \operatorname{div} \mathfrak{v} + \frac{\mathfrak{P}}{G} = 0, \qquad (296) \quad 385$$

die auf die Coordinatenaxen bezogenen Grundgleichungen sind hier zu einer einzigen Vectorgleichung zusammengezogen, $\mathfrak{v}$ die Verschiebung mit den Componenten $\xi \eta \zeta$; $\mathfrak{P}$ die Kraft mit den Componenten XYZ; div ein aus anderen Theilen der mathematischen Physik bekanntes Operationszeichen

$$\xi = A \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right); \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0, \qquad (298) \quad 388$$

Schwingungsbewegung in einer ebenen Schallwelle, λ Wellenlänge, τ Schwingungsdauer.

$$v = \frac{\lambda}{\tau} = \sqrt{\frac{G}{\mu} \cdot \frac{2m-2}{m-2}}, \qquad (300) \quad 391$$

v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles, μ die specifische Masse, d. h. das Gewicht der Raumeinheit getheilt durch die Beschleunigung der Schwere.

$$\xi = A \sin 2\pi \left(\frac{y}{\lambda} - \frac{t}{\tau}\right); \quad \eta = 0; \quad \zeta = 0, \qquad (301) \quad 392$$

für die transversale Schwingung.

$$v_t = \sqrt{\frac{G}{\mu}}, \qquad (303) \quad 394$$

v_t Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Transversalwellen.

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = 0, \qquad (305) \quad 398$$

diese Gleichungen charakterisiren den von de Saint-Vénant untersuchten Spannungszustand.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2}{\partial y \, \partial z}\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = 0, \qquad (317) \quad 402$$

diese Bedingungen muss die specifische Dehnung $\frac{\partial \xi}{\partial x}$ in der Richtung der Stabaxe erfüllen, wenn der durch die Gleichungen (305) angegebene Spannungszustand zu Stande kommen soll.

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_4 xy + a_5 xz \qquad (318) \quad 403$$

folgt daraus durch Integration. Damit wird die Navier'sche Spannungsvertheilung bei der Biegung bestätigt. Se.

$$\xi = \varphi(y, z), \qquad (320)\ 408$$

$$\eta = b_0 + b_1 x + z(b_2 + b_3 x), \qquad (325)\ 409$$

$$\zeta = c_0 + c_1 x + y(c_2 + c_3 x), \qquad (326)\ 409$$

Lösung der Grundgleichungen für den Fall der reinen Torsion; die Verschiebungscomponente ξ muss noch der Bedingungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi(yz)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi(yz)}{\partial z^2} = 0 \qquad (327)\ 409$$

genügen. Bei geeigneter Festlegung des Coordinatensystems vereinfachen sich die vorigen Formeln zu

$$\eta = cxz; \quad \zeta = -cxy; \quad \xi = \varphi(yz). \qquad (329)\ 410$$

$$\frac{\frac{\partial \xi}{\partial z} - cy}{\frac{\partial \xi}{\partial y} + cz} = \frac{dz}{dy}, \qquad (333)\ 412$$

Grenzbedingung, die am Umfange erfüllt sein muss, damit die Schubspannung in die Richtung der Tangente fällt.

$$\xi = \varphi(yz) = ayz, \qquad (336)\ 414$$

eine partikuläre Lösung von Gl. (327), die nach Einsetzen in die Grenzbedingung Gl. (333) zur Gleichung einer Ellipse für den Querschnittsumriss führt. Die einfachere Theorie der Torsion für den elliptischen Querschnitt wird hierbei bestätigt.

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0, \qquad (341)\ 418$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} = -2Gc, \qquad (342)\ 419$$

Gleichungen für das „Spannungsfeld“ in dem Querschnitte einer auf Verdrehen beanspruchten Welle (hydrodynamisches Gleichniss).

Seite

$$\left.\begin{aligned}\xi &= -\frac{m-2}{4\pi m G} P \frac{x}{r(z+r)} + \frac{P}{4\pi G}\frac{zx}{r^3}\\ \eta &= -\frac{m-2}{4\pi m G} P \frac{y}{r(z+r)} + \frac{P}{4\pi G}\frac{zy}{r^3}\\ \zeta &= \frac{2m-2}{4\pi m G} P \frac{1}{r} + \frac{P}{4\pi G}\frac{z^2}{r^3}\end{aligned}\right\}, \quad (367)\ 431$$

$\xi\ \eta\ \zeta$ Verschiebungscomponenten innerhalb eines sonst unbegrenzten elastischen Körpers, der auf einer Seite durch eine Ebene begrenzt ist und auf den in der Umgebung des Coordinatenursprungs eine äussere Kraft P übertragen wird; die Z-Axe geht in der Richtung der inneren Normale (Lösung von Boussinesq).

Formeln von Hertz für die Berührung elastischer Körper:

a) Zwei Kugeln von den Radien r_1 und r_2:

$$a = 1{,}11\sqrt[3]{\frac{P}{E}\cdot\frac{r_1 r_2}{r_1 \pm r_2}}, \quad (380)\ 436$$

$$\sigma_0 = 0{,}388\sqrt[3]{PE^2\left(\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2}\right)^2}, \quad (381)\ 437$$

$$\alpha = 1{,}23\sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2}\frac{r_1+r_2}{r_1 r_2}}, \quad (382)\ 437$$

a Halbmesser der Druckfläche, σ_0 grösste Druckspannung in der Mitte der Druckfläche, α Annäherung, die beide Körper durch die Abplattung erfahren, P Belastung.

b) Kugel vom Halbmesser r und Platte:

$$a = 1{,}11\sqrt[3]{\frac{Pr}{E}}, \quad (383)\ 437$$

$$\sigma_0 = 0{,}388\sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}}, \quad (384)\ 437$$

$$\alpha = 1{,}23\sqrt[3]{\frac{P^2}{E^2 r}}. \quad (385)\ 437$$

c) Zwei rechtwinklig gekreuzte Cylinder:

$$\sigma_0 = 0{,}388\sqrt[3]{\frac{PE^2}{r^2}}. \quad (386)\ 437$$

Seite

d) Zwei parallele Cylinder:

$$a = 1{,}52 \sqrt{\frac{P'}{E} \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}}, \qquad (387)\ 437$$

$$\sigma_0 = 0{,}418 \sqrt{P' E \frac{r_1 + r_2}{r_1 r_2}}, \qquad (388)\ 437$$

P' ist die auf die Längeneinheit der Cylinderaxe kommende Belastung.

e) Cylinder und Platte:

$$a = 1{,}52 \sqrt{\frac{P' r}{E}}, \qquad (389)\ 438$$

$$\sigma_0 = 0{,}418 \sqrt{\frac{P' E}{r}}. \qquad (390)\ 438$$

Gleichung für das Verhältniss zwischen dem Erddrucke σ_x in horizontaler Richtung und der Belastung σ_z im horizontal begrenzten lockeren Erdkörper:

$$\frac{\sigma_x}{\sigma_z} = 2 f^2 + 1 \pm 2 f \sqrt{f^2 + 1}; \qquad (396)\ 445$$

das obere Vorzeichen entspricht dem passiven, das untere dem activen Erddrucke, f Reibungscoefficient.

$$2 \psi' = \frac{\pi}{2} + \varphi \quad \text{oder} \quad \psi' = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}, \qquad (398)\ 446$$

Formel für die Richtung ψ' der Gleitflächen, φ Reibungswinkel.



